UNIV. OF MD COLLEGE PARK
31430027943721
LSC
H.16.S3

PROPERTY OF
ENGINEERING AND PHYSICAL SCIENCES
LIBRARY

34-35

MÉMOIRES

PRÉSENTÉS PAR DIVERS SAVANTS

À L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT DE FRANCE

MÉMOIRES

PRÉSENTÉS PAR DIVERS SAVANTS

À L'ACADÉMIE DES SCIENCES,

DE L'INSTITUT DE FRANCE

ET IMPRIMÉS PAR SON ORDRE

TOME TRENTE-QUATRIÈME

DEUXIÈME SÉRIE

PARIS

IMPRIMERIE NATIONALE

MDCCCCIX

Engin
506
Actm
ser. 2, v. 24-25
9

MÉMOIRES

CONTENUS

DANS LE TOME TRENTE-QUATRIÈME

DES SAVANTS ÉTRANGERS

Numéros.		Pages.
1.	Mémoire sur la théorie des transformations des surfaces applicables sur les quadriques générales, par M. Luigi Bianchi...	1 à 274
2.	Mémoire sur la déformation des quadriques, par M. C. Guichard, correspondant de l'Institut, professeur à l'Université de Clermont.....	1 à 147

187609

MÉMOIRES

PRÉSENTÉS PAR DIVERS SAVANTS

À L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT NATIONAL DE FRANCE.

TOME XXXIV. — N° 1.

MÉMOIRE

SUR LA THÉORIE DES TRANSFORMATIONS DES SURFACES APPLICABLES SUR LES QUADRIQUES GÉNÉRALES

PAR

M. LUIGI BIANCHI.

INTRODUCTION HISTORIQUE.

Les premiers fondements de la théorie que nous allons développer dans ce mémoire ont été posés, il y a presque trente ans, avec la *transformation complémentaire* des surfaces pseudosphériques. C'est dans ma thèse d'habilitation de 1879, et successivement dans les *Mathematische Annalen* [t. XVI, 1880] que j'ai exposé cette méthode de transformation des surfaces pseudosphériques, ou à courbure constante négative. J'ignorais alors que Ribaucour, en 1870, avait déjà énoncé une proposition générale, concernant les systèmes cycliques à rayon constant, qui contenait mes résul-

IMPRIMERIE NATIONALE.

tats, bien que Ribaucour n'ait pas poursuivi les conséquences de sa proposition fondamentale, comme méthode de transformation.

S. Lie apporta aussitôt à cette méthode des perfectionnements importants et fit, entre autres, la remarque essentielle que son application indéfiniment répétée exige seulement des quadratures. Il donna aussi une nouvelle transformation des surfaces pseudosphériques qui porte son nom. La transformation de Lie est de nature purement analytique : elle fait dériver d'une surface pseudosphérique connue un groupe de telles surfaces, dépendant d'une seule constante arbitraire. Ces surfaces transformées se trouvent définies *intrinsèquement*, et n'ont pas une position nécessairement déterminée dans l'espace, par rapport à la surface primitive.

Le progrès le plus important de la théorie fut réalisé, en 1883, par M. Bäcklund, qui généralisa la transformation complémentaire dans la transformation qui porte son nom. La transformation de Bäcklund peut se résoudre, il est vrai, dans une transformation complémentaire, précédée et suivie de deux transformations de Lie inverses l'une de l'autre. Mais l'importance qu'elle conserve, malgré cela, provient de ce qu'elle est réalisable, comme la transformation complémentaire, par une construction effective dans l'espace. Dans la transformation de Bäcklund, la surface primitive et sa transformée sont les deux nappes de la surface focale d'une congruence (congruence pseudosphérique), caractérisée par les propriétés d'avoir constants à la fois, sur chaque rayon de la congruence, la distance des foyers et l'angle des plans focaux. Toute surface pseudosphérique (et c'est là la source des transformations) appartient, comme première nappe de la surface focale, à *une double infinité* de congruences pseudosphériques : les deuxièmes nappes sont alors les transformées (de Bäcklund) de la surface primitive.

Comme pour la transformation complémentaire, l'application répétée de la transformation de Bäcklund exige d'abord de successives quadratures. Mais un nouveau perfectionnement de la théorie

fut atteint, en 1892, par mon *théorème de permutabilité* des transformations de Bäcklund. À l'aide de ce théorème, après l'intégration de la première équation de Riccati de la méthode, l'application successive des transformations s'effectue par de seules opérations algébriques, sans aucune quadrature.

J'ai insisté sur ces points principaux, bien connus, de la théorie des transformations des surfaces pseudosphériques, parce que nous allons les retrouver tous, généralisés, dans notre théorie des transformations des surfaces applicables sur une quadrique quelconque.

Les surfaces pseudosphériques étant applicables sur la sphère (imaginaire), qui est une quadrique particulière, on pouvait songer à chercher des méthodes analogues de transformation pour les surfaces applicables sur les quadriques générales. C'est à M. Guichard que revient le mérite d'avoir abordé, le premier, la question générale. À partir de 1897, il donna, à plusieurs reprises, dans les *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, les énoncés de propositions générales, concernant les *réseaux* dans les espaces à plusieurs dimensions, la loi des *éléments orthogonaux* et les *systèmes de cercles et de sphères*, d'où il déduisit des transformations pour les surfaces applicables sur les quadriques générales, et aussi pour les surfaces isothermiques. Pour ce qui se rapporte aux quadriques générales, les courtes communications de M. Guichard ne semblent pas avoir permis de reconnaître la nature géométrique de ses transformations, qui, utilisant les propriétés de la géométrie à plusieurs dimensions, s'écartaient considérablement des méthodes employées jusqu'ici, en particulier de celles relatives aux surfaces à courbure constante. Il faudra attendre, pour une connaissance exacte de ces transformations du savant géomètre, qu'il ait exposé en détail ses méthodes dans la publication qu'il nous a promise.

Mais, parmi les résultats que nous devons à M. Guichard, il faut rappeler ici les théorèmes si élégants, et d'une frappante signification géométrique, qui se rapportent aux déformées des qua-

driques de révolution. Ces théorèmes, énoncés dans une communication du 20 janvier 1899 aux *Comptes rendus*[1], ont exercé une influence considérable sur le développement ultérieur de la théorie. M. Darboux et moi-même[2], nous avons aussitôt donné des démonstrations diverses des théorèmes de M. Guichard, et nous en avons poursuivi les conséquences pour les transformations réelles des surfaces à courbure constante *positive*. M. Darboux a été, en outre, conduit par ses recherches à la découverte d'une relation remarquable entre la déformation des quadriques *générales* et une classe particulière de surfaces isothermiques, que j'appelle surfaces isothermiques *spéciales*. Il a donné aussi, pour les surfaces isothermiques générales, des transformations très remarquables qui, à l'aide des enveloppes *conformes* d'une double infinité de sphères, font dériver d'une surface isothermique donnée ∞^4 surfaces isothermiques nouvelles.

Poursuivant ces recherches de M. Darboux, j'ai démontré[3] qu'on a encore ici un théorème de permutabilité qui permet les mêmes simplifications que dans le cas des transformations de Bäcklund des surfaces pseudosphériques. Puis, m'attachant surtout à ces surfaces isothermiques spéciales, dont dépend, d'après M. Darboux, la déformation des quadriques, j'ai démontré que, parmi les ∞^4 transformées de Darboux d'une telle surface, il en existe une triple infinité (détachable linéairement) qui sont encore isothermiques spéciales et attachées à la même quadrique.

Cela donnait, en même temps, une méthode de transformation pour les surfaces applicables sur les quadriques générales. Mais

[1] M. Guichard n'a fait connaître ses démonstrations que plus tard (en 1903) dans son Mémoire : Sur les systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques (*Annales de l'École normale supérieure*, t. XX).

[2] Darboux, *Comptes rendus de l'Académie*. Séances des 27 mars, 4, 17 et 24 avril 1899. — Bianchi, *Rendiconti dei Lincei*. 23 février, 5 mars et 23 avril 1899.

[3] Ricerche sulle superficie isoterme e sulla deformazione delle quadriche (*Annali di matematica*, t. XI della serie III [1905]).

l'exemple des surfaces à courbure moyenne constante, attachées à la sphère, démontrait que ces transformations des déformées des quadriques n'étaient pas encore les vrais *éléments* des transformations, mais plutôt résultaient de la combinaison de deux transformations élémentaires.

Dès lors, le problème se posait de chercher ces transformations élémentaires qui, pour les déformées des quadriques générales, devaient jouer le même rôle que les transformations de Bäcklund pour les surfaces pseudosphériques. Il était bien naturel d'essayer de réaliser les transformations demandées par le passage de la première à la deuxième nappe focale d'une congruence rectiligne. Une série de recherches préparatoires[1] a confirmé d'abord mes prévisions pour les quadriques de révolution (Mém. A) et, successivement, pour les paraboloïdes (Mém. B). Les circonstances géométriques observées dans ces cas particuliers m'ont servi pour entrevoir les lois du cas général, que je confirmais ensuite par la recherche directe. Alors, j'ai pu énoncer les résultats généraux dans deux notes que l'Académie a bien voulu accueillir dans ses *Comptes rendus* (t. 142 et 143, 5 mars et 29 octobre 1906), et, enfin, j'ai complété ma théorie dans une note du 5 mars 1907 dans les *Rendiconti dei Lincei*.

Dans le mémoire qu'on va lire je me propose d'exposer les parties fondamentales de la nouvelle théorie, sans rien emprunter aux publications antérieures, sauf en quelque point secondaire à la fin du travail, qui y sera expressément indiqué. Comme les propriétés géométriques de nos transformations sont d'une simplicité

[1] 1re Note. Sulle superficie deformate per flessione dell' iperboloide rotondo ad una falda [*Rendiconti dei Lincei*, maggio 1905].

Mémoire A. Teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche rotonde (*Memorie della Società Italiana delle Scienze*, Se 3a, t. XIV [1905]).

Mémoire B. Teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sui paraboloidi (*Annali di matematica*, Se 3a, t. XIII [1906]).

Mémoire C. Ricerche sulla deformazione delle quadriche (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. XXII [1906]).

remarquable, j'ai pris le parti, dans le dessein surtout d'abréger, autant que possible, l'exposition, de faire précéder mon mémoire d'un résumé des principaux théorèmes de la théorie. Le lecteur n'aura qu'à recourir aux énoncés de cet aperçu pour suivre les calculs qu'on développera dans le cours du mémoire.

APERÇU DE LA THÉORIE

DES TRANSFORMATIONS.

I

Notre théorie des transformations des surfaces applicables sur les quadriques sera entièrement fondée sur l'existence de congruences rectilignes, dont les deux nappes de la surface focale sont applicables sur une même quadrique, d'ailleurs quelconque. Comme dans le cas particulier des congruences pseudosphériques, ces congruences appartiennent à la classe des *congruences* W, c'est-à-dire que sur les deux nappes de la surface focale, il y a correspondance entre les lignes asymptotiques : elles existent au même degré de généralité des congruences pseudosphériques, dépendant, lorsque la première nappe est fixée, de deux constantes arbitraires. Nous précisons ces faits géométriques par la première proposition fondamentale de notre théorie :

Théorème I. — *Toute surface* (S), *applicable sur une quadrique quelconque* Q, *appartient, comme première nappe de la surface focale, à une double infinité de congruences rectilignes* W_1 *dont la deuxième nappe* (S_1) *est applicable sur la même quadrique* Q.

C'est dans le passage de la première nappe (S) à la deuxième (S_1) que consiste notre transformation. Pour toute déformée (S) d'une quadrique, il y a donc ∞^2 surfaces transformées (S_1). Nos transformations se répartissent, à vrai dire, en deux classes distinctes, contenant chacune ∞^2 transformations, qui correspondent aux deux systèmes de génératrices de la quadrique; mais, comme les propriétés sont les mêmes dans les deux classes, nous nous rapporterons toujours à une seule des classes.

II

Il faut, avant tout, donner la signification géométrique des deux constantes arbitraires qui entrent dans la transformation.

L'interprétation géométrique de la première constante s'obtient de la manière suivante. Prenons une quelconque de nos congruences W_1 avec les deux nappes focales (S) et (S_1) applicables sur Q, et soient F, F_1 deux points quelconques qui se correspondent sur (S), (S_1), c'est-à-dire les deux points (foyers) où un rayon mobile de la congruence touche les deux nappes. Imaginons maintenant que la surface (S), flexible et inextensible, se déforme, entraînant les segments tangents FF_1, et déformons (S) jusqu'à l'appliquer sur la quadrique Q. Nous avons alors la propriété d'importance capitale pour la suite :

Les extrêmes F_1 *des segments focaux* FF_1, *entraînés par la surface* (S) *dans son application sur la quadrique* Q, *se disposeront, à déformation accomplie, sur une autre quadrique homofocale à* Q.

C'est de la *première* constante de la transformation que dépend, dans le système homofocal, la position, d'ailleurs quelconque, de la deuxième quadrique. Nous pouvons donc prendre, comme première constante, la valeur même du paramètre k qui fixe la position de la quadrique homofocale, que nous appellerons Q_k.

On indiquera alors la transformation même comme *transformation* B_k.

Pour une valeur donnée de k, la transformation B_k fait dériver de la surface primitive (S) ∞^1 surfaces transformées (S_1). Pour trouver effectivement ces nouvelles déformées de la quadrique Q, on a à intégrer une équation différentielle (aux différentielles totales) du premier ordre et du type de Riccati, *dont les coefficients contiennent la première constante* k. La deuxième constante s'introduit par l'intégration, et, en disposant de celle-ci, on pourra fixer arbitrairement pour un point initial F de (S) la *direction* du rayon de la

congruence. On dispose à la fois des deux constantes, si l'on fixe comme l'on veut, sur le plan tangent à (S) dans un point initial F, le segment focal FF_1, en grandeur et orientation.

L'interprétation géométrique des deux constantes est ainsi donnée et nous ajoutons encore que : *Les transformations* B_k *existent même pour les valeurs extrêmes de* k, *qui réduisent la quadrique homofocale (comme enveloppe) à une des coniques focales.* Nous les appellerons les *transformations singulières.*

III

Dans notre problème d'intégration, il se présente, nous l'avons dit, une équation de Riccati. Cela tient à une raison géométrique qu'il importe d'approfondir.

Considérons les ∞^1 surfaces (S_1) transformées d'une déformée initiale (S) de la quadrique Q par une transformation B_k. À un point quelconque F de (S) correspond sur chaque surface (S_1) un point F_1, qui se trouve sur le plan tangent en F à (S). *Quel est le lieu des* ∞^1 *points* F_1? Ce qu'on dit plus haut démontre que c'est une conique C qui, entraînée par la surface (S), devient, après l'application de (S) sur Q, la section produite par le plan tangent correspondant de Q dans la quadrique homofocale Q_k. Pour toute déformée (S) de Q, en correspondance à la valeur fixée pour k, nous avons donc ∞^2 coniques C, tracées individuellement dans les ∞^2 plans tangents de (S), et invariablement liées à (S) dans ses déformations. Cela posé, la présence de l'équation de Riccati dans la recherche des surfaces transformées (S_1) tient à la propriété géométrique suivante :

Les ∞^1 *surfaces* (S_1), *dérivées de la surface initiale* (S) *à l'aide d'une transformation* B_k, *divisent homographiquement les* ∞^2 *coniques* C.

Si l'on introduit comme inconnue le paramètre λ, d'où dépendent rationnellement (par des fonctions de second degré) les

IMPRIMERIE NATIONALE.

coordonnées d'un point mobile sur la conique C, l'équation différentielle qui sert à déterminer la valeur de λ au point de rencontre avec une surface transformée (S_1) acquiert par cela même la forme de Riccati, puisque le rapport anharmonique de quatre quelconques de ses solutions particulières est constant.

Nous devons bien remarquer que les coniques C sont invariablement liées, ainsi qu'on l'a dit, aux déformations de la surface (S), mais leurs points de rencontre F_1 avec les surfaces transformées (S_1) changent au contraire de position à chaque déformation de (S).

IV

Nous arrivons maintenant à un autre point fondamental de notre théorie, la *loi d'applicabilité* des deux nappes focales (S), (S_1) d'une quelconque de nos congruences W.

On a vu (n° II) que, lorsque la première nappe (S) s'applique sur la quadrique Q, les segments focaux $F F_1$, entraînés dans la déformation, se disposent avec leurs extrêmes F_1 sur la quadrique homofocale Q_k. L'applicabilité de (S) sur Q fixe donc une correspondance déterminée entre les points F_1 de la deuxième nappe (S_1) et les points M_1 de la quadrique homofocale Q_k. D'ailleurs, comme la surface (S_1) est applicable à son tour sur Q, à chaque point F_1 de (S_1) correspondra, dans cette applicabilité, un point déterminé M de Q. La recherche de la loi d'applicabilité entre (S) et (S_1) revient donc à reconnaître la nature de la correspondance entre les points M, M_1 des deux quadriques homofocales Q, Q_k.

Or il y a une loi, qu'on peut dire naturelle, de correspondance entre les points de deux quadriques homofocales : c'est l'*affinité d'Ivory*, qui transforme par une simple homographie l'une des deux quadriques dans l'autre, en faisant correspondre leurs points de rencontre avec une même trajectoire orthogonale du système homofocal. (Voir par exemple : *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, Bd III_2, Heft 2, n° 62.) Nous écrivons ici les

simples formules de l'affinité d'Ivory, car nous aurons à les appliquer constamment dans la suite.

Si les deux quadriques homofocales à centre ont les équations respectives

$$(Q) \qquad \frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}=1,$$

$$(Q_k) \qquad \frac{x_1^2}{A+k}+\frac{y_1^2}{B+k}+\frac{z_1^2}{C+k}=1,$$

les formules de l'affinité d'Ivory s'écrivent :

$$x_1=x\sqrt{\frac{A+k}{A}}, \qquad y_1=y\sqrt{\frac{B+k}{B}}, \qquad z_1=z\sqrt{\frac{C+k}{C}}.$$

S'il s'agit des deux paraboloïdes homofocaux

$$(Q) \qquad \frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z,$$

$$(Q_k) \qquad \frac{x_1^2}{p+k}+\frac{y_1^2}{q+k}=2z_1-k,$$

nous avons alors :

$$x_1=x\sqrt{\frac{p+k}{p}}, \qquad y_1=y\sqrt{\frac{q+k}{q}}, \qquad z_1=z+\frac{k}{2}.$$

On remarquera que, si les deux quadriques Q, Q_k appartiennent, dans le système triple homofocal, à la même famille, l'affinité d'Ivory fait correspondre les régions réelles des deux quadriques. Lorsque les deux quadriques appartiennent au contraire à des familles différentes, à la région réelle d'une des quadriques correspond une région imaginaire dans l'autre.

Cela posé, nous avons le simple théorème :

La loi d'applicabilité entre les deux nappes focales (S), (S_1) *d'une de nos congruences* W *est donnée par l'affinité d'Ivory entre les deux quadriques homofocales* Q, Q_k.

Même dans le cas, que nous aurons particulièrement en vue, des transformations réelles des déformées réelles des quadriques, il pourra arriver que les deux quadriques Q, Q_k appartiennent à la même famille ou à des familles différentes. Dans le premier cas les deux surfaces seront effectivement applicables par leurs régions réelles, et nous dirons qu'il s'agit d'une applicabilité *réelle*. Dans l'autre cas les éléments linéaires de (S), (S_1) seront bien transformables analytiquement l'un dans l'autre, mais à la région réelle de (S) correspondra une région imaginaire de (S_1). Nous dirons alors que l'applicabilité de (S) sur (S_1) est *idéale* [1].

V

Pour trouver toutes les ∞^1 transformées (S_1) d'une surface initiale (S) par une transformation B_k nous avons à intégrer une équation de Riccati. Il suffit donc d'en connaître une solution particulière, et l'intégration s'achève par des quadratures. En appliquant de nouveau la même transformation B_k à une quelconque des surfaces dérivées (S_1), comme nous connaissons déjà une de ses surfaces transformées, la surface primitive (S), on n'aura qu'à effectuer des quadratures, et ainsi de suite. À ce point l'application répétée de la méthode de transformation exige donc toujours de nouvelles quadratures. Mais, comme pour les surfaces pseudosphériques, on peut perfectionner la méthode à l'aide du théorème suivant, que j'appelle le théorème de permutabilité :

Théorème II. — *Si, en partant d'une surface* (S), *applicable sur la quadrique* Q, *on a déduit deux telles surfaces dérivées* (S_1), (S_2), *à*

[1] Cette distinction entre les deux espèces d'applicabilité se trouve mentionnée, à ce qu'il semble, la première fois dans les travaux du géomètre russe Peterson, particulièrement dans le mémoire (traduit du russe par M. E. Davoux) : *Sur la déformation des surfaces du second ordre* (*Annales de la Faculté des sciences de Toulouse*, 2e série, t. VII).

l'aide de deux transformations B_{k_1}, B_{k_2}, *il existe une quatrième déformée* (S′) *de* Q, *qui se trouve liée aux mêmes surfaces* (S_1), (S_2) *par deux transformations* B'_{k_2}, B'_{k_1} *avec les mêmes constantes* k_2, k_1 *permutées.*

Cette quatrième surface (S′) est parfaitement fixée par les trois (S), (S_1), (S_2), et s'en déduit, en termes finis, par la simple construction suivante que je donne ici pour la première fois. Soient F, F_1, F_2 trois points correspondants de (S), (S_1), (S_2). Les deux plans tangents en F_1, F_2 à (S_1), (S_2) se rencontrent dans une droite r qui passe par F et contient le point F′ correspondant de la quatrième surface (S′). Pour fixer la position de F′ sur r, considérons les deux tangentes à (S_1), (S_2) en F_1, F_2 qui correspondent, dans l'applicabilité de (S_1), (S_2) sur Q, aux directions des génératrices d'un même système de la quadrique Q. Soient r_1, r_2 ces deux tangentes et soient N_1, N_2 les points où la droite r (située à la fois dans les deux plans tangents) rencontre r_1, r_2. Alors nous avons simplement : *Le rapport anharmonique* $(N_1 N_2 F F')$ *des quatre points* N_1, N_2, F, F′ *est constant et égal au rapport* $\frac{k_1}{k_2}$ *des deux constantes* k *des transformations* B_{k_1}, B_{k_2}.

De là résulte la construction demandée : *Par chaque point* F *de* (S) *on tire la droite* r *appuyée aux deux tangentes* r_1, r_2 *de* (S_1), (S_2), *et l'on prend sur* r *un point* F′ *tel que la droite* r *soit divisée en* F, F′ *et par les deux droites* r_1, r_2 *dans le rapport anharmonique constant* $\frac{k_1}{k_2}$. *Le point* F′ *décrira alors la quatrième surface* (S′) *du théorème de permutabilité.*

On voit par cette construction même que si les deux constantes k_1, k_2 sont égales (et dans ce cas seulement), la quatrième surface (S′) coïncide avec la première (S).

Il suit du théorème de permutabilité que dans l'application de notre méthode de transformation il suffira d'avoir intégré, *pour toute valeur arbitraire de* k, la première équation de Riccati, après quoi on n'aura plus qu'à effectuer des calculs algébriques sans aucune quadrature.

VI

Parmi les déformées des quadriques les surfaces réglées méritent une attention particulière, car nos théorèmes acquièrent dans ce cas une forme plus simple et expressive. Pour rester dans le cas *réel*, nous supposerons maintenant que la quadrique Q soit à génératrices réelles.

Lorsque la surface (S), applicable sur Q, est une surface réglée R, toutes ses surfaces dérivées par une transformation B_k sont aussi des surfaces réglées R_1. Leur construction dépend de la proposition suivante :

Théorème III. — *Si la quadrique* Q *roule sur une quelconque de ses déformées réglées* R, *entraînant la quadrique homofocale* Q_k, *les génératrices de celle-ci, aussi bien de l'un que de l'autre système, engendrent une congruence* Γ, *qui se décompose, d'une manière parfaitement déterminée, en* ∞^1 *surfaces réglées* R_1, *chacune desquelles forme, avec la surface primitive* R, *les deux nappes focales d'une congruence* W. *Les nouvelles surfaces réglées* R_1 *sont à leur tour applicables sur la quadrique* Q *et donnent les* ∞^1 *surfaces dérivées de* R *par la transformation* B_k, *qui correspond à la quadrique homofocale* Q_k.

Dans le cas où la quadrique homofocale Q_k se réduit à une des coniques focales, *ce sont les tangentes de la conique focale, entraînée par* Q *dans son roulement sur* R, *qui engendrent la congruence* Γ *du théorème*. La transformation B_k correspondante est alors une transformation singulière.

Remarquons encore la forme que prend le théorème de permutabilité dans le cas actuel des déformées réglées :

Théorème IV. — *Quatre droites correspondantes* r_1, r_2, r, r' *des quatre déformées réglées* R_1, R_2, R, R′ *du théorème de permutabilité sont génératrices (d'un même système) sur une quadrique, et leur rapport anharmonique* $(r_1 r_2 r r')$ *est constant et égal au rapport* $\frac{k_1}{k_2}$ *des deux constantes des transformations* B_{k_1}, B_{k_2}.

VII

Revenons aux transformations B_k des déformées générales des quadriques. La correspondance entre les points de la surface primitive (S) et de la surface dérivée (S_1) conserve les lignes asymptotiques ou, ce qui est la même chose, les systèmes conjugués.

Or, parmi les systèmes conjugués de (S), il y a lieu de considérer ce système particulier qui reste conjugué, lorsque la surface (S) s'applique sur la quadrique fondamentale Q. Nous l'appelons le système conjugué *persistant* de (S) : il est formé par un double système de lignes, réelles ou imaginaires, mais distinctes, sauf dans le cas des déformées réglées R, où elles coïncident dans les génératrices.

Cela posé, nous avons le :

Théorème V. — *Sur les deux nappes focales* (S), (S_1) *d'une de nos congruences* W *les systèmes conjugués persistants se correspondent.*

VIII

Nous allons maintenant signaler de nouvelles propriétés qui permettent de regarder nos transformations B_k comme des *transformations de courbes :* les lignes asymptotiques de la surface.

Fixons sur la surface initiale (S) une de ses lignes asymptotiques; soit a cette ligne. Déformons la surface (S) sans déformer l'asymptotique a, ce qui peut se faire d'une infinité de manières (dépendant d'une fonction arbitraire). Fixons de plus un point F sur a et le segment focal FF_1 tangent à (S), c'est-à-dire dans le plan osculateur de a. Pour chacune des configurations de (S), autour de l'asymptotique invariable a, ces éléments initiaux fixent la surface

transformée (S_1) de (S) par une transformation B_k. Nous avons alors le :

Théorème VI. — *Lorsque la surface* (S) *se déforme autour de l'asymptotique invariable* a, *la surface transformée* (S_1), *définie par un segment focal initial invariable, se déforme de la même manière autour de la ligne asymptotique correspondante* a_1, *qui demeure invariable.*

Par conséquent cette nouvelle courbe a_1 dépend seulement de la primitive a et du segment FF_1 issu d'un point F de a et situé dans le plan osculateur de a. Nous pouvons donc résoudre les transformations B_k de *surfaces* en transformations B_k de *courbes*, qui sont leurs lignes asymptotiques.

IX

Parmi les déformations de la surface (S), à ligne asymptotique fixe a, il y en a deux parfaitement déterminées, qui changent (S) dans une surface réglée. Ces deux déformées réglées de (S) correspondent aux deux systèmes de droites de Q et s'obtiennent (d'après un théorème de M. Chieffi que nous démontrons au paragraphe 29 de ce mémoire) en tirant par les points de a les droites qui touchent, en ces points, les lignes géodésiques de (S) qui s'appliquent sur les droites de Q. On a donc, comme cas particulier du théorème VI, le :

Théorème VII. *Sur les deux nappes focales* (S), (S_1) *d'une de nos congruences* W *on prend deux lignes asymptotiques correspondantes* a, a_1, *et dans les points de celles-ci on tire les droites tangentes aux lignes géodésiques de* (S), (S_1), *transformées des droites d'un même système de* Q. *Les deux surfaces réglées* R, R_1, *qui en résultent, sont applicables sur la quadrique* Q *et forment à leur tour les deux nappes focales d'une congruence* W.

La construction s'applique encore lorsque les surfaces (S), (S_1) sont elles-mêmes réglées. Dans ce cas on tirera les tangentes aux lignes géodésiques *courbes* qui deviennent sur Q les droites de l'autre système.

X

Les transformations B_k s'appliquent à toutes les surfaces dont le ds^2 est réductible à l'élément linéaire d'une quadrique, réelle ou imaginaire. Même en se bornant à considérer des surfaces réelles, il y en a plusieurs classes dont les quadriques correspondantes sont imaginaires; le cas typique est donné par les surfaces pseudo-sphériques, applicables sur la sphère imaginaire.

Considérons maintenant le cas d'une quadrique fondamentale Q *réelle*. Les transformations réelles B_k des surfaces applicables sur Q s'obtiennent alors en prenant pour quadrique homofocale Q_k une quadrique à génératrices réelles. Lorsque la quadrique Q est elle-même gauche, l'affinité d'Ivory fait correspondre les deux régions réelles des quadriques Q, Q_k et l'applicabilité des deux nappes (S), (S_1) de la congruence W est *réelle*. Si, au contraire, la quadrique fondamentale est à points elliptiques, l'applicabilité des deux nappes devient *idéale* (C. n° IV).

Dans le cas particulier des quadriques de révolution nous avons d'effectives *quadriques réglées* dans le système homofocal seulement lorsque Q est un hyperboloïde à une nappe, ou un ellipsoïde aplati; aussi y a-t-il toujours pour ces formes de quadriques de révolution les transformations B_k réelles. Mais pour les trois autres formes : paraboloïde, ellipsoïde allongé, hyperboloïde à deux nappes, les quadriques homofocales réglées se réduisent aux plans par l'axe. Ainsi, dans ces cas, les transformations réelles B_k disparaissent, ou plus exactement elles se réduisent à une seule transformation : la transformation complémentaire.

IMPRIMERIE NATIONALE.

XI

Nous allons maintenant considérer une nouvelle transformation des déformées des quadriques générales de tout autre nature que les transformations B_k.

Toute quadrique générale peut se transformer par une homographie, distincte d'une homothétie, dans une autre quadrique $\overline{Q}$ telle que l'homographie change les lignes géodésiques de Q dans les lignes géodésiques de $\overline{Q}$. Alors à tout système d'asymptotiques *virtuelles* sur Q correspond un système d'asymptotiques virtuelles sur $\overline{Q}$ et à chaque déformation de Q dans une surface (S) correspond une déformation parfaitement déterminée de $\overline{Q}$ dans une autre surface $(\overline{S})$. Sur les deux surfaces (S), $(\overline{S})$ les systèmes conjugués et les lignes géodésiques se correspondent; nous les appelons surfaces conjuguées en déformation. Notre nouvelle transformation, que nous appelons la *transformation* H, consiste dans le passage de (S) à $(\overline{S})$. Elle a la période 2 et fait passer des surfaces applicables sur la quadrique Q à celles applicables sur l'autre quadrique $\overline{Q}$. Plusieurs propriétés des transformations B_k appartiennent aussi à la transformation H, en particulier celles des théorèmes V, VI et VII. Mais la propriété la plus importante de la transformation H consiste dans sa permutabilité avec les transformations B_k, telle qu'elle résulte du suivant :

Théorème VIII. *La transformation* H *change une de nos congruences* W, *avec les deux nappes focales* (S), (S_1) *applicables sur la quadrique* Q, *dans une autre telle congruence* W, *dont les deux nappes focales* $(\overline{S})$, $(\overline{S_1})$ *sont conjuguées en déformation à* (S), (S_1) *et applicables par conséquent sur* $\overline{Q}$. *Les rayons des deux congruences* W *sont tirés dans les directions correspondantes.*

Il suit de ce théorème que, si l'on connaît les deux surfaces (S), (S_1) et la conjuguée en déformation $(\overline{S})$ de (S), on obtient

en termes finis la conjuguée $(\overline{S_1})$ de (S_1) comme deuxième nappe de la congruence que l'on forme en tirant par les points de $(\overline{S})$ les rayons tangents dans les directions que la transformation H fait correspondre à celles des rayons de la première congruence.

Remarquons encore que la notion de surfaces conjuguées en déformation s'étend à des couples de surfaces (S), $(\overline{S})$ qui existent dans deux espaces divers à courbure constante, égale ou différente. Nos théorèmes supérieurs relatifs aux déformées des quadriques subsistent aussi dans ce cas plus général, et la théorie des transformations des surfaces applicables sur les quadriques s'étend ainsi à tout espace à courbure constante.

XII

Nous avons décrit les principales circonstances géométriques et les propriétés fondamentales de nos transformations. Avant de commencer l'exposition de nos démonstrations, je crois devoir expliquer la division que j'ai adoptée du mémoire en deux parties, la première se rapportant aux déformées gauches, la seconde aux déformées générales. Dans le cas des déformées gauches toutes les propriétés géométriques subsistent encore, comme dans le cas général, mais elles revêtent une forme plus simple et plus facile pour une première traduction en analyse. D'ailleurs les formules que nous aurons à développer et les résultats de la première partie nous seront aussi indispensables pour le cas général, dont l'exposition en sera de beaucoup abrégée.

Enfin, comme dans ce mémoire j'ai dû me borner aux fondements de la théorie, je me permets d'indiquer ici les divers compléments à y donner dans la suite :

1° On aura à rechercher tous les ds^2 réels qui appartiennent à des quadriques, réelles ou imaginaires. Pour toutes ces classes de surfaces applicables il y a lieu d'étudier les transformations B_k correspondantes.

2° Même pour les surfaces qui admettent seulement des transformations simples B_k imaginaires, on peut utiliser celles-ci pour obtenir, en les composant d'après le théorème de permutabilité, des transformations réelles, de la même manière que les transformations imaginaires de Bäcklund des surfaces à courbure constante *positive* donnent lieu, par composition, aux transformations réelles de ces surfaces.

3° On devra reprendre l'étude des surfaces isothermiques spéciales de M. Darboux et résoudre leurs transformations de Darboux en deux transformations élémentaires B_k.

4° Les congruences W de notre théorie ont les deux nappes de la surface focale applicables sur la *même* quadrique. Mais on connaît aussi des classes de congruences W dont les deux nappes focales sont applicables sur des quadriques différentes [Mém. C]. L'étude générale de ces congruences est à faire.

5° L'étude des systèmes conjugués persistants sur les quadriques, en relation avec les transformations B_k, à peine abordée à la fin de ce mémoire, devra être approfondie.

6° On aura à développer la théorie des transformations B_k pour les déformées des quadriques dans les espaces à courbure constante.

7° Il est à présumer que nos méthodes de transformation pourront s'appliquer à d'autres classes (si ce n'est pas à toutes les classes) de surfaces applicables sur des surfaces réglées. Ainsi nous avons des transformations toutes pareilles aux transformations B_k pour les déformées de l'hélicoïde gauche à plan directeur, bien que cette surface ne soit pas applicable sur une quadrique.

PREMIÈRE PARTIE.

TRANSFORMATIONS DES SURFACES RÉGLÉES APPLICABLES SUR LES QUADRIQUES.

§ 1.

RAPPEL DE QUELQUES FORMULES FONDAMENTALES.

Considérons une surface (S) rapportée à un système quelconque (u, v) de coordonnées curvilignes. Soient x, y, z les coordonnées cartésiennes orthogonales du point (u, v) mobile sur (S), et soient X, Y, Z les cosinus directeurs de la normale (positive) en ce point. Faisant usage des notations habituelles qui proviennent de la méthode de Gauss, nous indiquons par[1]

$$(1) \qquad Sdx^2 = \mathcal{E}du^2 + 2\mathcal{F}dudv + \mathcal{G}dv^2$$

$$(2) \qquad -SdxdX = \mathfrak{D}du^2 + 2\mathfrak{D}'dudv + \mathfrak{D}''dv^2$$

les deux *formes quadratiques fondamentales* de la surface (S). On sait que les conditions nécessaires et suffisantes pour que les deux formes quadratiques (1) et (2) appartiennent, comme formes fondamentales, à une surface, sont les suivantes :

1° Les coefficients $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$; $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}', \mathfrak{D}''$ doivent satisfaire à l'*équation de Gauss :*

$$(3) \qquad \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{D}'' - \mathfrak{D}'^2}{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2} = K,$$

[1] Le signe S signifie, d'après Lamé, une somme de trois termes jouant le même rôle par rapport aux trois axes coordonnés.

où K désigne la courbure de la première forme (1), ou courbure totale de la surface;

2° Ils doivent en outre satisfaire aux deux *équations de Codazzi :*

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathfrak{D}}{\partial v} - \dfrac{\partial \mathfrak{D}'}{\partial u} = \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} \mathfrak{D} + \left(\left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 1\,1 \\ 1 \end{matrix} \right\} \right) \mathfrak{D}' - \left\{ \begin{matrix} 1\,1 \\ 2 \end{matrix} \right\} \mathfrak{D}'', \\ \dfrac{\partial \mathfrak{D}''}{\partial u} - \dfrac{\partial \mathfrak{D}'}{\partial v} = - \left\{ \begin{matrix} 2\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} \mathfrak{D} + \left(\left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 2\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\} \right) \mathfrak{D}' + \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\} \mathfrak{D}'', \end{cases}$$

les symboles de Christoffel $\left\{ \begin{matrix} i\,k \\ l \end{matrix} \right\}$ étant calculés par rapport à la forme différentielle (1).

Lorsque les coefficients $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$; $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$ (satisfaisant à ces conditions) sont donnés, la surface (S) est *intrinsèquement* déterminée, c'est-à-dire qu'elle est fixée à moins de mouvements dans l'espace. Si la surface (S), supposée flexible et inextensible, se déforme, les coefficients $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ demeurent les mêmes, tandis que $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$ changent, toujours en satisfaisant aux équations (3) et (4).

Il nous faut encore rappeler ici les formules fondamentales de Gauss, qui donnent les dérivées secondes de x, y, z :

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \left\{ \begin{matrix} 1\,1 \\ 1 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial x}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 1\,1 \\ 2 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial x}{\partial v} + \mathfrak{D}\mathrm{X}, \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial x}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial x}{\partial v} + \mathfrak{D}'\mathrm{X}, \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \left\{ \begin{matrix} 2\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial x}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 2\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial x}{\partial v} + \mathfrak{D}''\mathrm{X}, \end{cases}$$

où nous supprimons les formules analogues qui s'obtiennent en remplaçant (x, X) par (y, Y) et par (z, Z).

Imaginons maintenant tiré par chaque point $\mathrm{F} \equiv (u, v)$ de la surface (S) un segment rectiligne FF_1 *tangent* à (S) dans une direc-

tion arbitraire, fixée avec F. Les coordonnées x_1, y_1, z_1 de l'extrême F_1 seront données par des formules du type suivant :

$$(6)\qquad \begin{cases} x_1 = x + l\dfrac{\partial x}{\partial u} + m\dfrac{\partial x}{\partial v}, \\ y_1 = y + l\dfrac{\partial y}{\partial u} + m\dfrac{\partial y}{\partial v}, \\ z_1 = z + l\dfrac{\partial z}{\partial u} + m\dfrac{\partial z}{\partial v}, \end{cases}$$

où l, m désignent des fonctions déterminées de u, v. Une observation simple mais fondamentale pour la suite consiste en ce que : *si la surface* (S) *se déforme, entraînant les segments tangents* FF_1, *les fonctions* l, m *dans ces formules* (6) *demeurent toujours les mêmes*. Le lieu des extrêmes F_1 sera, dans chaque configuration de (S), une surface (S_1) (exceptionnellement une ligne ou un point). Les éléments fondamentaux de cette surface (S_1) se calculeront par dérivation des formules (6), en y remplaçant les dérivées secondes de x, y, z par leurs valeurs (5). Cela donne les formules :

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial u} = \mathcal{L}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \mathfrak{M}\dfrac{\partial x}{\partial v} + (\mathfrak{D}l + \mathfrak{D}'m)\,\mathrm{X}, \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v} = \mathrm{P}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \mathrm{Q}\dfrac{\partial x}{\partial v} + (\mathfrak{D}'l + \mathfrak{D}''m)\,\mathrm{X}, \end{cases}$$

où les coefficients $\mathcal{L}$, $\mathfrak{M}$, P, Q ont les significations suivantes :

$$(8)\qquad \begin{cases} \mathcal{L} = \dfrac{\partial l}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 1\,1 \\ 1 \end{matrix} \right\} l + \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} m + 1, \quad \mathfrak{M} = \dfrac{\partial m}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 1\,1 \\ 2 \end{matrix} \right\} l + \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\} m, \\ \mathrm{P} = \dfrac{\partial l}{\partial v} + \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} l + \left\{ \begin{matrix} 2\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} m, \qquad \mathrm{Q} = \dfrac{\partial m}{\partial v} + \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\} l + \left\{ \begin{matrix} 2\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\} m + 1. \end{cases}$$

Nous avons écrit les seules formules (7) relatives à x_1; les autres pour y_1, z_1 s'en déduisent, en remplaçant dans les seconds membres (x, X) par (y, Y) et (z, Z).

Dans les applications de ces formules pour la suite, nous aurons à considérer une configuration particulière de (S) dans laquelle les segments $F F_1$, tangents en F à (S), toucheront aussi en F_1 la deuxième surface (S_1); alors (S) et (S_1) seront les deux nappes focales de la congruence engendrée par les droites $F F_1$. Pour qu'il en soit ainsi il faut que l'on ait :

$$(9)\qquad \begin{vmatrix} x_1 - x & y_1 - y & z_1 - z \\ \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial y_1}{\partial u} & \frac{\partial z_1}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial y_1}{\partial v} & \frac{\partial z_1}{\partial v} \end{vmatrix} = 0;$$

et réciproquement, si ce déterminant s'annule, les segments $F F_1$ toucheront (S_1), ou bien cette surface se réduira à une ligne (ou à un point), ce qui n'est qu'un cas particulier, où notre condition doit être regardée comme satisfaite.

Or, à cause des équations (7), le déterminant (9) est le produit de deux déterminants, dont le premier

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \mathrm{X} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \mathrm{Y} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \mathrm{Z} \end{vmatrix} = \sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}$$

n'est pas nul; l'équation (9) équivaut donc à la suivante :

$$(10)\qquad \begin{vmatrix} l & m & 0 \\ \mathcal{L} & \mathcal{M} & \mathfrak{D} l + \mathfrak{D}' m \\ \mathrm{P} & \mathrm{Q} & \mathfrak{D}' l + \mathfrak{D}'' m \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on fixe à l'avance l et m, et si l'on écarte pour un instant le cas exceptionnel où cette équation (10) est identiquement satisfaite en $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$, elle nous donne une équation linéaire (homogène) entre $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$. En y adjoignant l'équation (3) de Gauss, on en tirera par exemple $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$ en fonction de $\mathfrak{D}$. Substituant dans les équations (4) de Codazzi, celles-ci nous donnent une équation aux différentielles totales pour la fonction inconnue $\mathfrak{D}$. On forme cette équation de la manière la plus simple en supposant par exemple $m=0$, ce qui ne diminue pas la généralité, car il suffit de prendre pour lignes (v) sur (S) celles enveloppées par les rayons $F F_1$. Alors $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$ seront des fonctions linéaires de $\mathfrak{D}$ de la forme

$$\mathfrak{D}' = a\mathfrak{D}, \qquad \mathfrak{D}'' = b\mathfrak{D} + \frac{c}{\mathfrak{D}},$$

(a, b, c fonctions de u, v), et si l'on pose $\mathfrak{D}^2 = \Delta$, notre équation aux différentielles totales prend, dans l'inconnue Δ, la forme de Riccati. Chaque solution possible pour Δ donne deux systèmes de solutions pour $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$, égales et de signes contraires, auxquelles correspondent deux configurations symétriques de (S), que nous regarderons donc comme une seule solution. Cela posé, nous pourrons avoir les quatre cas suivants :

1° Il n'y a aucune solution pour Δ et par suite il n'existe pas la configuration demandée pour (S). C'est le cas général, lorsque les segments tangents $F F_1$ sont pris arbitrairement.

2° Il y a une seule solution pour Δ, et par suite une seule configuration de (S) *satisfaisante*.

3° Il y a deux solutions pour Δ, et deux configurations de (S) satisfaisantes.

4° L'équation de Riccati en Δ est complètement intégrable, ce qui donne une solution Δ contenant une constante arbitraire. Alors nous avons une série continue à un paramètre de configurations possibles pour (S).

IMPRIMERIE NATIONALE.

Il reste encore à considérer le cas où l'équation (10) est identiquement satisfaite. Alors toutes les configurations de (S) sont satisfaisantes et dans toute déformation de (S), entraînant les segments tangents FF_1, le deuxième foyer F_1 de la congruence rectiligne reste fixe avec le premier. Il est facile de voir qu'il faut et il suffit pour cela que les lignes enveloppées par les rayons FF_1 sur (S) soient des lignes géodésiques et que les segments FF_1 soient les rayons de courbure géodésique de leurs trajectoires orthogonales. Nous le voyons par exemple en prenant les lignes indiquées pour lignes (v), ce qui rend $m=0$. Pour que l'équation (10) soit une identité, il faut alors et il suffit que l'on ait à la fois :

$$\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} l = 0, \qquad \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} l + 1 = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 0, \qquad \frac{1}{l} = -\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}.$$

La première équation nous dit que les lignes (v) sont géodésiques et la seconde que les points F_1 sont les centres de courbure géodésique de leurs trajectoires orthogonales. Dans le cas actuellement considéré nous avons donc : *Dans toute déformation de la surface* (S), *la surface* (S_1), *lieu des extrêmes* F_1, *est la deuxième nappe focale de la congruence; elle est la surface complémentaire de* (S) *par rapport aux lignes géodésiques* (v).

§ 2.

PREMIÈRES FORMULES RELATIVES AU PARABOLOÏDE HYPERBOLIQUE.

Ces préliminaires étant posés, nous allons commencer nos recherches sur les déformées gauches des quadriques, ayant pour but de démontrer les théorèmes énoncés au n° VI de l'aperçu. Comme nous visons particulièrement au cas réel, nous aurons à

distinguer deux cas : 1° la quadrique fondamentale Q est un paraboloïde hyperbolique; 2° elle est un hyperboloïde à une nappe. Commençons par le premier, où les formules sont plus simples. Soit P_0 le paraboloïde hyperbolique fondamental, dont nous écrirons l'équation sous la forme normale

$$\frac{x_0^2}{p} - \frac{y_0^2}{q} = 2z_0, \tag{11}$$

en supposant p, q positifs. Rapportons le paraboloïde à ses génératrices rectilignes u, v à l'aide des équations

$$x_0 = \sqrt{p}\,(u+v), \qquad y_0 = \sqrt{q}\,(u-v), \qquad z_0 = 2uv. \tag{12}$$

On en tire :

$$ds^2 = \mathcal{E}du^2 + 2\mathcal{F}dudv + \mathcal{G}dv^2,$$

$$\mathcal{E} = p+q+4v^2, \quad \mathcal{F} = p-q+4uv, \quad \mathcal{G} = p+q+4u^2; \tag{13}$$

si l'on pose en outre :

$$\mathrm{H} = p\,(u-v)^2 + q\,(u+v)^2 + pq, \tag{14}$$

on aura :

$$\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2 = 4\mathrm{H}. \tag{14*}$$

Nous trouvons pour les cosinus directeurs de la normale (positive) :

$$\mathrm{X}_0 = \frac{\sqrt{q}\,(u+v)}{\sqrt{\mathrm{H}}}, \qquad \mathrm{Y}_0 = \frac{\sqrt{p}\,(v-u)}{\sqrt{\mathrm{H}}}, \qquad \mathrm{Z}_0 = -\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{\mathrm{H}}},$$

d'où nous déduisons pour les valeurs $\mathfrak{D}_0\ \mathfrak{D}'_0,\ \mathfrak{D}''_0$ des coefficients de la deuxième forme fondamentale du paraboloïde :

$$(15) \qquad \mathfrak{D}_0 = \mathfrak{D}''_0 = 0, \qquad \mathfrak{D}'_0 = -2\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{H}}.$$

Ensuite la courbure K sera donnée par

$$K = -\frac{pq}{H^2},$$

ce que nous écrivons :

$$(16) \qquad K = -\frac{1}{\rho^2}, \qquad \rho = \frac{H}{\sqrt{pq}}.$$

Il nous faut encore écrire les valeurs des symboles de Christoffel, qui sont ici :

$$(17) \qquad \begin{cases} \left\{ \begin{matrix} 1\,1 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 2\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} = 0, & \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}\frac{\partial \log \rho}{\partial v}, \\ \left\{ \begin{matrix} 1\,1 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 2\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 0, & \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}\frac{\partial \log \rho}{\partial u}. \end{cases}$$

Prenons maintenant un deuxième paraboloïde hyperbolique P_k, *homofocal au primitif* P_0, dont l'équation soit :

$$\frac{x^2}{p-k} - \frac{y^2}{q+k} - 2z + k = 0,$$

le paramètre k ayant une valeur quelconque dans l'intervalle $(-q \ldots\ldots p)$:

$$-q \leqslant k \leqslant p.$$

Nous excluons toutefois la valeur $k = 0$, qui ferait coïncider P_k avec P_0; mais nous n'excluons pas les valeurs extrêmes $k = -q$,

$k=p$, qui réduisent le paraboloïde P_k au plan $y=0$ ou $x=0$ (recouvert deux fois), ou mieux à la portion de ces plans extérieure à la parabole focale correspondante.

Le plan tangent à P_0 dans le point (x_0, y_0, z_0) coupe le paraboloïde homofocal P_k suivant une conique C (suivant une droite r pour les valeurs singulières $k=-q$, $k=p$). Un point quelconque $(\bar{x}_0\ \bar{y}_0\ \bar{z}_0)$ de cette conique aura, d'après les formules (6), des coordonnées de la forme

$$(18)\qquad \begin{cases} x_0=\sqrt{p}\,(u+v+l+m), \\ y_0=\sqrt{q}\,(u-v+l-m), \\ z_0=2\,(uv+lv+mu), \end{cases}$$

où il restera à calculer les fonctions l, m de u, v et d'un paramètre arbitraire.

À cet effet, introduisons comme paramètre λ d'un point mobile sur la conique C le paramètre de la génératrice variable sur P_k, soit dans l'un soit dans l'autre système. Or, si nous posons pour abréger :

$$(19)\qquad p'=p-k, \qquad q'=q+k,$$

p', q' seront positifs et les équations des génératrices de P_k seront données par les formules

$$(20)\qquad \begin{cases} x_1=\lambda\sqrt{p'}\left(z_1-\frac{k}{2}\right)+\frac{\sqrt{p'}}{2\lambda}, \\ y_1=\pm\lambda\sqrt{q'}\left(z_1-\frac{k}{2}\right)\mp\frac{\sqrt{q'}}{2\lambda}, \end{cases}$$

le double signe distinguant les deux systèmes de génératrices. Il suffit de substituer dans ces formules pour x_1, y_1, z_1 les valeurs

(18) de $\bar{x}_0$, $\bar{y}_0$, $\bar{z}_0$, et, en résolvant des équations linéaires, nous avons les valeurs cherchées de l, m sous la forme

$$(21) \qquad l = \frac{U}{W}, \qquad m = \frac{V}{W},$$

les fonctions U, V, W de u, v et λ ayant les significations suivantes :

$$(22) \quad \begin{cases} U = 2\left(\sqrt{qp'} \mp \sqrt{pq'}\right)\lambda^2 u^2 - 2\left(\sqrt{pq} \mp \sqrt{p'q'}\right)\lambda u \\ \qquad\qquad - \frac{k}{2}\left(\sqrt{qp'} \pm \sqrt{pq'}\right)\lambda^2 + \frac{1}{2}\left(\sqrt{qp'} \mp \sqrt{pq'}\right), \\ V = 2\left(\sqrt{qp'} \pm \sqrt{pq'}\right)\lambda^2 v^2 - 2\left(\sqrt{pq} \pm \sqrt{p'q'}\right)\lambda v \\ \qquad\qquad - \frac{k}{2}\left(\sqrt{qp'} \mp \sqrt{pq'}\right)\lambda^2 + \frac{1}{2}\left(\sqrt{qp'} \pm \sqrt{pq'}\right), \\ W = 2\lambda\left[\sqrt{pq} - \sqrt{qp'}\,(u+v)\,\lambda \pm \sqrt{pq'}\,(u-v)\,\lambda\right]. \end{cases}$$

Il est bon de remarquer que l'on passe des signes supérieurs aux inférieurs en échangeant dans toutes les formules u et v.

§ 3.

SURFACES GAUCHES APPLICABLES SUR P_0 ET CONGRUENCES Γ.

Soit maintenant R une quelconque des déformées réglées du paraboloïde P_0, et supposons par exemple que les droites de R correspondent aux génératrices (v) du paraboloïde. La surface R sera définie intrinsèquement (§ 1) par ses deux formes quadratiques fondamentales, dont la première coïncide avec le ds^2 de P_0. Dans la deuxième, puisque les lignes (v) sont restées asymptotiques, on aura $\mathfrak{D} = 0$, et par suite, d'après l'équation (3) de Gauss, $\mathfrak{D}'^2 = \mathfrak{D}_0'^2$, d'où $\mathfrak{D}' = \pm \mathfrak{D}_0'$. Qu'est-ce que signifie le double signe ?

Si c'est le signe supérieur qui a lieu, on peut passer par une *déformation continue* de P_0 à R et cela est impossible dans l'autre cas[1]. Nous supposerons, pour plus de netteté, que c'est le premier cas qui a lieu pour R, bien que les calculs suivants conservent leur valeur dans le cas opposé. Quant à la valeur de $\mathfrak{D}''$, on tire de la deuxième équation (4) de Codazzi :

$$\frac{\partial \log \mathfrak{D}''}{\partial u} = \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \frac{\partial \log \sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}}{\partial u},$$

d'où, en intégrant :

$$\mathfrak{D}'' = \sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}\,\varphi(v) = 2\sqrt{\mathrm{H}}\,\varphi(v),$$

désignant ici par $\varphi(v)$ une fonction arbitraire de v seule. Fixer $\varphi(v)$ c'est fixer la forme de la surface R. Écrivons explicitement les valeurs de $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$ pour R :

$$(23) \qquad \mathfrak{D} = 0, \quad \mathfrak{D}' = \mathfrak{D}'_0 = -2\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{\mathrm{H}}}, \quad \mathfrak{D}'' = 2\sqrt{\mathrm{H}}\,\varphi(v),$$

d'où :

$$(24) \qquad \frac{\mathfrak{D}''}{\mathfrak{D}'} = -\rho\varphi(v).$$

Faisons maintenant rouler le paraboloïde P_0 sur R et considérons la congruence, que nous appelons Γ, engendrée par les génératrices de l'un ou de l'autre système du paraboloïde homofocal P_k, entraîné par P_0 dans le mouvement de roulement. Il s'agit d'écrire, en premier lieu, les formules relatives à une *quelconque* des sur-

[1] En d'autres termes, dans le premier cas, lorsqu'un point décrit une droite (v) de P_0, et le point correspondant de R la droite correspondante, les deux plans tangents tournent dans le même sens; dans l'autre ils tournent en sens contraires.

faces réglées de cette congruence. Pour cela, prenons les formules (6) :

$$x_1 = x + l\frac{\partial x}{\partial u} + m\frac{\partial x}{\partial v}, \text{ etc.},$$

en y faisant parcourir au point (x, y, z) la surface R, et dans les valeurs de l, m, données par les formules (21), (22), substituons pour λ une *fonction arbitraire* $\lambda(v)$ de v seule; nous aurons bien défini, de la sorte, une surface réglée quelconque de Γ.

Or, d'après l'énoncé du théorème III (n° VI de l'Aperçu), nous devons tâcher de déterminer cette fonction $\lambda(v)$ de telle manière que la surface réglée R_1, lieu du point (x_1, y_1, z_1), satisfasse aux conditions de ce théorème. Une première circonstance heureuse se présente ici : la première condition qu'on doit imposer à R_1, d'être la deuxième nappe focale de la congruence rectiligne que l'on obtient en joignant chaque point $F \equiv (x, y, z)$ de R au correspondant $F_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$ de R_1, est suffisante à elle seule pour déterminer la décomposition de la congruence Γ dans les ∞^1 surfaces réglées R_1 dont parle le théorème. Les autres conditions énoncées en dérivent comme des conséquences.

Exprimons donc que le segment FF_1 est tangent en F_1 à la surface R_1; nous avons pour cela l'équation (10), § 1, laquelle, à cause de

$$\mathfrak{D} = 0, \qquad \frac{\mathfrak{D}''}{\mathfrak{D}'} = -\rho\varphi(v),$$

devient ici :

$$(25) \qquad \begin{vmatrix} l & m & 0 \\ \mathfrak{L} & \mathfrak{M} & m \\ P & Q & l - \rho\varphi(v)\, m \end{vmatrix} = 0.$$

Comme dans les seconds membres des formules (8), qui définissent $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, P, Q, les dérivations impliquent aussi la fonction

inconnue λ, contenue dans l, m, nous indiquerons par $\mathfrak{L}_0, \mathfrak{M}_0, \mathrm{P}_0, \mathrm{Q}_0$ les valeurs que prennent $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathrm{P}, \mathrm{Q}$ *dans l'hypothèse de* λ *constante*, et nous aurons donc :

$$(26)\qquad \begin{cases} \mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0, & \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0, \\ \mathrm{P} = \mathrm{P}_0 + \dfrac{\partial l}{\partial \lambda}\dfrac{d\lambda}{dv}, & \mathrm{Q} = \mathrm{Q}_0 + \dfrac{\partial m}{\partial \lambda}\dfrac{d\lambda}{dv}. \end{cases}$$

Quant aux valeurs de $\mathfrak{L}_0, \mathfrak{M}_0, \mathrm{P}_0, \mathrm{Q}_0$, elles sont données par les formules (8), qui, à cause des valeurs actuelles (17) des symboles de Christoffel, deviennent :

$$(26^*)\qquad \begin{cases} \mathfrak{L}_0 = \dfrac{\partial l}{\partial u} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \log \rho}{\partial v} m + 1, & \mathfrak{M}_0 = \dfrac{\partial m}{\partial u} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \log \rho}{\partial u} m, \\ \mathrm{P}_0 = \dfrac{\partial l}{\partial v} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \log \rho}{\partial v} l, & \mathrm{Q}_0 = \dfrac{\partial m}{\partial v} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \log \rho}{\partial u} l + 1. \end{cases}$$

Dans ces dernières formules, nous le répétons, les dérivations dans les seconds membres sont faites en tenant λ constante.

Notre équation fondamentale (25) devient après cela :

$$(27)\qquad \begin{vmatrix} l & m & 0 \\ \mathfrak{L}_0 & \mathfrak{M}_0 & m \\ \mathrm{P}_0 & \mathrm{Q}_0 & l \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} l & m & 0 \\ \mathfrak{L}_0 & \mathfrak{M}_0 & m \\ \dfrac{\partial l}{\partial \lambda}\dfrac{d\lambda}{dv} & \dfrac{\partial m}{\partial \lambda}\dfrac{d\lambda}{dv} & -\rho\varphi(v)m \end{vmatrix} = 0.$$

C'est pour la fonction inconnue $\lambda(v)$ une équation différentielle, qui implique en apparence aussi l'autre variable u; nous allons vérifier que la variable u, en effet, disparaît de la relation (27), et il reste pour $\lambda(v)$ l'équation pure qui régit notre problème.

IMPRIMERIE NATIONALE.

§ 4.

ÉQUATION DE RICCATI POUR LA FONCTION $\lambda(v)$.

Une première simplification qui s'introduit dans l'équation (27) dépend de ce que le premier déterminant :

$$\Theta = \begin{vmatrix} l & m & 0 \\ \mathfrak{L}_0 & \mathfrak{M}_0 & m \\ P_0 & Q_0 & l \end{vmatrix}$$

s'annule identiquement. Il est aisé d'en voir, *a priori*, la raison, car le premier membre de l'équation (27) se réduit à Θ si nous prenons $\varphi(v) = 0$ et $\lambda =$ constante.

Mais alors, R se réduit au paraboloïde P_0 et R_1 à la génératrice (λ) du paraboloïde P_k; et, comme dans ce cas l'équation (10) doit être satisfaite (§ 1), on a nécessairement $\Theta = 0$. Mais, nous allons le vérifier aussi par le calcul, car les identités que nous allons rencontrer nous seront utiles plus tard. À cause des équations (26'), nous avons :

$$(28)\quad \begin{cases} l\mathfrak{M}_0 - m\mathfrak{L}_0 = l\dfrac{\partial m}{\partial u} - m\dfrac{\partial l}{\partial u} + \frac{1}{2}\dfrac{\partial \log\rho}{\partial u} lm - \frac{1}{2}\dfrac{\partial \log\rho}{\partial v} m^2 - m \\ lQ_0 - mP_0 = l\dfrac{\partial m}{\partial v} - m\dfrac{\partial l}{\partial v} + \frac{1}{2}\dfrac{\partial \log\rho}{\partial u} l^2 - \frac{1}{2}\dfrac{\partial \log\rho}{\partial v} lm + l, \end{cases}$$

et, par conséquent :

$$\Theta = l\left(l\frac{\partial m}{\partial u} - m\frac{\partial l}{\partial u}\right) - m\left(l\frac{\partial m}{\partial v} - m\frac{\partial l}{\partial v}\right) - 2lm.$$

Divisons Θ par l^2 :

$$\frac{\Theta}{l^2} = l\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{m}{l}\right) - m\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{m}{l}\right) - 2\frac{m}{l},$$

ou :

$$\frac{\Theta}{l^2} = \frac{U}{W}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{V}{U}\right) - \frac{V}{W}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{V}{U}\right) - 2\frac{V}{U}.$$

Désignons par U′, V′ les dérivées *explicites* de U, V par rapport à u et v; nous pouvons écrire :

$$\frac{\Theta}{l^2} = -\frac{V}{UW}(U' + V' + 2W).$$

Or, on vérifie de suite, sur les équations (22), qu'on a identiquement :

$$U' + V' + 2W = 0; \tag{29}$$

donc Θ s'annule, q. e. d.

Après cela, l'équation (27) nous donne :

$$\frac{\partial\lambda}{\partial v} = \rho\varphi(v)\frac{l\mathfrak{M}_0 - m\mathfrak{L}_0}{m\dfrac{\partial l}{\partial\lambda} - l\dfrac{\partial m}{\partial\lambda}},$$

laquelle, à cause de la première équation (28), s'écrit aussi :

$$\frac{\partial\lambda}{\partial v} = \varphi(v)\frac{\frac{1}{2}\dfrac{\partial\rho}{\partial u}\dfrac{l}{m} - \rho\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{l}{m}\right) - \frac{1}{2}\dfrac{\partial\rho}{\partial v} - \dfrac{\rho}{m}}{\dfrac{\partial}{\partial\lambda}\left(\dfrac{l}{m}\right)},$$

ou encore, puisque $\frac{l}{m} = \frac{U}{V}$, $\frac{1}{m} = \frac{W}{V}$:

$$\frac{d\lambda}{dv} = V\varphi(v)\frac{\rho(U' + W) - \frac{U}{2}\dfrac{\partial\rho}{\partial u} + \frac{V}{2}\dfrac{\partial\rho}{\partial v}}{U\dfrac{\partial V}{\partial\lambda} - V\dfrac{\partial U}{\partial\lambda}}.$$

Or, d'après l'équation (16), on a :

$$\rho = \frac{pq + p(u-v)^2 + q(u+v)^2}{\sqrt{pq}},$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \rho}{\partial u} = \frac{p(u-v) + q(u+v)}{\sqrt{pq}}, \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial \rho}{\partial v} = \frac{q(u+v) - p(u-v)}{\sqrt{pq}},$$

et des valeurs effectives (22) de U, V, W, on tire facilement l'identité :

$$(30) \qquad U\frac{\partial V}{\partial \lambda} - V\frac{\partial U}{\partial \lambda} = k\left[\rho(U' + W) - \frac{1}{2}\frac{\partial \rho}{\partial u}U + \frac{1}{2}\frac{\partial \rho}{\partial v}V\right],$$

que nous écrirons aussi sous la forme équivalente, utile dans la suite :

$$(30') \qquad m\frac{\partial l}{\partial \lambda} - l\frac{\partial m}{\partial \lambda} = \frac{k\rho}{V}\left(l\mathfrak{M}_0 - m\mathfrak{L}_0\right).$$

Maintenant, il reste simplement pour $\frac{d\lambda}{dv}$ l'équation :

$$\frac{d\lambda}{dv} = \frac{V\varphi(v)}{k},$$

où, comme l'on voit, la variable u a disparu dans le second nombre. Substituant pour V sa valeur (22_2), nous avons l'équation définitive :

$$(I) \qquad \frac{d\lambda}{dv} = \frac{\varphi(v)}{k}\left\{\begin{array}{l} \left[2\left(\sqrt{qp'} \pm \sqrt{pq'}\right)v^2 - \frac{k}{2}\left(\sqrt{qp'} \mp \sqrt{pq'}\right)\right]\cdot\lambda^2 \\ -2\left(\sqrt{pq} \pm \sqrt{p'q'}\right)v\cdot\lambda + \frac{1}{2}\left(\sqrt{qp'} \pm \sqrt{pq'}\right) \end{array}\right\}.$$

Son second membre est un polynôme du deuxième degré dans la fonction inconnue $\lambda(v)$: c'est bien l'équation de Riccati que nous avions annoncée.

§ 5.

LES SURFACES TRANSFORMÉES R_1.

Il résulte de notre analyse que si l'on prend pour $\lambda(v)$ une solution de l'équation (I) de Riccati, les formules

$$x_1 = x + l\frac{\partial x}{\partial u} + m\frac{\partial x}{\partial v}, \text{ etc.},$$

nous définiront une surface réglée R_1 de la congruence Γ qui remplira les conditions suivantes :

Les droites qui joignent deux points quelconques correspondants $F \equiv (x, y, z)$, $F_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$ *des deux surfaces* R *et* R_1 *formeront une congruence, dont* R *et* R_1 *seront les deux nappes de la surface focale.*

D'ailleurs, lorsque le premier foyer F décrit une droite (v) sur R, l'autre F_1 décrit aussi une droite (v) sur R_1. Les génératrices rectilignes se correspondent donc sur les deux nappes focales R, R_1 et, par suite, les asymptotiques curvilignes se correspondent aussi[1] : *la congruence considérée est une congruence* W.

Résumons les résultats que nous avons obtenus jusqu'ici dans le théorème :

Si l'on fait rouler le paraboloïde hyperbolique P_0 *sur une surface réglée applicable* R, *les génératrices de l'un ou de l'autre système d'un paraboloïde homofocal* P_k, *entraîné par* P_0 *dans le roulement, engendrent une congruence* Γ. *Les rayons de celle-ci se distribuent, d'une manière parfaitement déterminée, dans une simple infinité de surfaces* R_1 *telles*

[1] Dans toute congruence rectiligne, les deux systèmes conjugués interceptés sur les deux nappes focales par les développables de la congruence se correspondent. Il suffit donc qu'un autre système conjugué de la première nappe se conserve conjugué sur la deuxième pour que *tous* les systèmes conjugués se conservent, et que la congruence soit W. En particulier, la correspondance sur les deux nappes des asymptotiques d'un système assure la correspondance des autres asymptotiques.

que chaque surface R_1 *forme avec* R *les deux nappes focales d'une congruence* W.

C'est, pour le cas des déformées gauches du paraboloïde, la première partie du théorème III (n° VI de l'aperçu). Nous avons trouvé, de plus, que pour effectuer la décomposition de la congruence Γ dans les ∞^1 surfaces R_1, on a à intégrer l'équation (I) de Riccati. La correspondance entre les génératrices g, g_1 de R, R_1 reste ensuite fixée de ce que chaque valeur de v donne deux génératrices correspondantes, et la correspondance des points par la loi qu'à chaque point F de g correspond le point F_1 où la droite g_1 rencontre le plan tangent à R en F.

Or, nous avons énoncé (aperçu, n° VI) ces autres propriétés essentielles des surfaces R_1 :

α. *Chaque nouvelle surface* R_1 *est applicable, comme la primitive* R, *sur le paraboloïde* P_0;

β. *La relation entre les deux surfaces* R *et* R_1 *est invertible.*

Pour ne pas interrompre le cours de nos déductions, nous admettons provisoirement ces propriétés, qui seront démontrées bientôt (§ 7-§ 11). Appelons *transformation* B_k le passage de la déformée R du paraboloïde à l'autre déformée R_1. Ces transformations contiennent deux constantes arbitraires : la constante k qui fixe le paraboloïde homofocal P_k et qui figure dans les coefficients de l'équation (I) de Riccati; puis la deuxième constante provenant de l'intégration de cette équation. Il est maintenant bien évident que pour individuer *une* des ∞^2 transformées R_1 de R, il suffit :

1° De choisir l'un ou l'autre des systèmes des génératrices du paraboloïde;

2° D'assigner, en grandeur et orientation, un segment focal initial FF_1.

Aussi avons-nous les deux classes de transformations indiquées dans l'aperçu (n° 1); et, dans chaque classe, ∞^2 transformations.

Fixons la première constante k. La transformation B_k fait naître

alors, de la déformée gauche R du paraboloïde, ∞^1 nouvelles déformées R_1. Les points F_1 de ces ∞^1 surfaces R_1 qui correspondent à un point F de R, remplissent, dans le plan tangent en F à R, une conique C; celle-ci, entraînée par R dans l'application sur le paraboloïde P_0, devient la section produite par le plan tangent correspondant de P_0 dans le paraboloïde homofocal P_k.

Considérons maintenant quatre surfaces particulières R_1; elles correspondent à quatre solutions particulières λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 de l'équation (I) de Riccati. Comme le rapport anharmonique de ces quatre solutions est constant, nous avons :

a. *Quatre surfaces* R_1, *transformées de la surface primitive* R *par une transformation* B_k, *coupent les* ∞^2 *coniques* C, *tracées dans les plans tangents de* R, *suivant des groupes de quatre points d'égal rapport anharmonique.*

C'est, sous une autre forme, et pour les déformées gauches du paraboloïde, le théorème n° III de l'aperçu.

Revenons à l'équation (I) de Riccati et, au lieu de donner $\varphi(v)$, fixons λ comme fonction (arbitraire) de v; nous en déduirons une seule valeur correspondante pour $\varphi(v)$. Or assigner λ en fonction de v, c'est fixer (d'après une loi arbitraire) une correspondance entre les génératrices d'un même système ou de divers systèmes de deux paraboloïdes homofocaux P_0 et P_k. Nous concluons de là :

Si l'on fixe, d'une loi continue arbitraire, une correspondance entre une génératrice g mobile sur P_0 *et une génératrice* g_1 *du paraboloïde homofocal* P_k, *il existe une et une seule déformation de* P_0 *dans une surface réglée* R *telle que les génératrices* g_1, *entraînées par les g correspondantes, remplissent, à déformation accomplie, une surface* R_1 *transformée de* R, *à l'aide de la transformation* B_k.

Par exemple, si l'on prend λ constante, il vient $\varphi(v) = 0$. La surface R coïncide avec le paraboloïde P_0 et la surface R_1 se rétrécit à une génératrice (λ) du paraboloïde homofocal P_k (C. § 4).

§ 6.

LES TRANSFORMATIONS SINGULIÈRES B_{-q}, B_p, B_0.

Nous avons déjà dit (§ 2) que toutes nos déductions restent vraies pour chaque valeur de k dans l'intervalle $(-q \ldots p)$, y compris les valeurs extrêmes $k=-q$, $k=p$, qui donnent les transformations singulières B_{-q}, B_p.

Examinons de plus près ces transformations. Alors les deux systèmes de génératrices du paraboloïde P_k, données par les équations (20), § 2, viennent coïncider dans les tangentes de l'une ou de l'autre parabole focale :

$$(31)\qquad \begin{cases} y=0, & \dfrac{x^2}{p+q}=2z+q \quad \text{pour} \quad k=-q, \\ x=0, & \dfrac{y^2}{p+q}=-2z+p \quad \text{pour} \quad k=p, \end{cases}$$

et les deux classes de transformations coïncident dans une seule classe. Toutes les formules antérieures conservent une signification bien déterminée pour ces valeurs extrêmes de k. Par exemple, pour $k=-q$, on a $p'=p+q$, $q'=0$, et l'équation (I) de Riccati devient :

$$(32)\qquad \frac{d\lambda}{dv}+\varphi(v)\left\{\begin{array}{l}\left[2\sqrt{\dfrac{p+q}{q}}\cdot v^2+\dfrac{1}{2}\sqrt{q(p+q)}\right]\cdot\lambda^2 \\ -2\sqrt{\dfrac{p}{q}}v\cdot\lambda+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{p+q}{q}}\end{array}\right\}=0.$$

Dans ce cas, ce sont les tangentes de la parabole focale, entraînée par le paraboloïde P_0 roulant sur R, qui engendrent la congruence J, et la décomposition de celle-ci dans les ∞^1 réglées transformées R_1 dépend de l'équation (32) de Riccati, ou de son analogue pour $k=p$. Chaque surface R_1 prend une génératrice

entre les tangentes de chacune des ∞^1 positions de la parabole focale. Le théorème *a* du cas général (§ précédent) devient ici :

Sur quatre quelconques des surfaces transformées R_1, *les quatre génératrices qui correspondent à une même génératrice de* R *et sont tangentes à une même position de la parabole focale forment un rapport anharmonique constant.*

Considérons maintenant le cas que nous avons exclu jusqu'ici : $k = 0$. Dans ce cas, nous avons toutefois toujours les congruences Γ, qui sont engendrées par les génératrices mêmes du paraboloïde P_0 dans son roulement sur R. Appelons Γ_1 celle relative aux génératrices (v) et Γ_2 l'autre, relative aux génératrices (u), et examinons si quelques-unes des propriétés de la congruence générale Γ persistent ici. Je dis que les congruences Γ_1 et Γ_2 sont décomposables, comme dans le cas général, dans ∞^1 réglées R_1 applicables sur P_0. La chose est bien évidente pour la première congruence Γ_1; en effet, les ∞^1 positions du paraboloïde roulant donnent les surfaces R_1 demandées. Quant à la deuxième congruence Γ_2, remarquons en premier lieu qu'elle est la congruence (normale) formée par les tangentes aux lignes géodésiques de R transformées des génératrices (u). Voyons maintenant ce que nous dit l'équation (I) de Riccati dans le cas actuel. Comme nous devons prendre les déterminations inférieures de signes et faire $k = 0$, les coefficients de l'équation de Riccati se présentent d'abord sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$; mais, en calculant leurs vraies valeurs, on trouve de suite :

$$\frac{d\lambda}{dv} = \frac{\varphi(v)}{\sqrt{pq}}\left\{(p-q)v\lambda - \left[(p+q)v^2 + pq\right]\lambda^2 - \frac{1}{4}(p+q)\right\}.$$

D'ailleurs, les formules (20) § 2, où l'on prendra les signes inférieurs avec $k = 0$, comparées aux formules (12) du même paragraphe, donnent : $u = \frac{1}{2\lambda}$. Notre équation de Riccati devient donc :

$$\frac{du}{dv} = \frac{\varphi(v)}{2\sqrt{pq}}\,\mathrm{H};$$

IMPRIMERIE NATIONALE.

celle-ci coïncide, à cause de l'équation (24) § 3, avec l'équation différentielle des asymptotiques curvilignes de R :

$$2\Theta' du + \Theta'' dv = 0.$$

Donc, l'équation (I) de Riccati nous apprend que, pour décomposer, dans le cas actuel, la congruence Γ_2 dans les ∞^1 réglées R_1, il faut assembler les rayons de Γ_2 (tangents à R) le long des asymptotiques curvilignes de R. Or, un théorème de M. Chiefli (voir 2ᵉ partie, § 29) assure que ces surfaces R_1 sont toutes applicables sur le paraboloïde P_0. Aussi, même dans le cas singulier $k = 0$, les propriétés essentielles des congruences Γ, par rapport à l'applicabilité, conservent leur valeur.

Remarquons enfin que pour la congruence Γ_2 le théorème a, § 5, se change dans la propriété bien connue (P. Serret) : *les génératrices rectilignes de la surface gauche* R *sont divisées homographiquement par les asymptotiques curvilignes.*

§ 7.

CALCUL DE L'ÉLÉMENT LINÉAIRE DES SURFACES TRANSFORMÉES R_1.

Revenons aux transformations générales B_k. Il nous reste encore à démontrer les propriétés énoncées sous α et β au paragraphe 5.

Commençant par la première, il faut avant tout calculer l'élément linéaire ds_1 des surfaces transformées R_1, après quoi nous aurons à prouver qu'il est transformable dans le ds^2 du paraboloïde P_0.

Les formules fondamentales (7), § 1, en y substituant pour $\mathcal{L}$, $\mathfrak{M}$, P, Q leurs valeurs (26), § 3, deviennent :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial u} = \mathcal{L}_0 \dfrac{\partial x}{\partial u} + \mathfrak{M}_0 \dfrac{\partial x}{\partial v} + \Theta' m X, \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v} = P_0 \dfrac{\partial x}{\partial u} + Q_0 \dfrac{\partial x}{\partial v} + \Theta' l X + \left(\dfrac{\partial l}{\partial \lambda} \dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial m}{\partial \lambda} \dfrac{\partial x}{\partial v} \right) \dfrac{d\lambda}{dv} + \Theta'' m X. \end{cases}$$

Si l'on pose :

$$ds_1^2 = \mathcal{E}_1 du^2 + 2\mathcal{F}_1 du\,dv + \mathcal{G}_1 dv^2,$$

on a donc :

$$(33)\quad \begin{cases} \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}\mathcal{L}_0^2 + 2\mathcal{F}\mathcal{L}_0\mathcal{M}_0 + \mathcal{G}\mathcal{M}_0^2 + \mathfrak{D}'^2 m^2; \\ \mathcal{F}_1 = \mathcal{E}\mathcal{L}_0 P_0 + \mathcal{F}(\mathcal{L}_0 Q_0 + \mathcal{M}_0 P_0) + \mathcal{G}\mathcal{M}_0 Q_0 + \mathfrak{D}'^2 lm \\ \qquad + \left[(\mathcal{E}\mathcal{L}_0 + \mathcal{F}\mathcal{M}_0)\frac{\partial l}{\partial\lambda} + (\mathcal{F}\mathcal{L}_0 + \mathcal{G}\mathcal{M}_0)\frac{\partial m}{\partial\lambda}\right]\cdot\frac{d\lambda}{dv} \\ \qquad + \mathfrak{D}'\mathfrak{D}'' m^2; \\ \mathcal{G}_1 = \mathcal{E}P_0^2 + 2\mathcal{F}P_0 Q_0 + \mathcal{G}Q_0^2 + \mathfrak{D}'^2 l^2 + 2\left[(\mathcal{E}P_0 + \mathcal{F}Q_0)\frac{\partial l}{\partial\lambda}\right. \\ \qquad \left. + (\mathcal{F}P_0 + \mathcal{G}Q_0)\frac{\partial m}{\partial\lambda}\right]\frac{d\lambda}{dv} + 2\mathfrak{D}'\mathfrak{D}'' lm + \left[\mathcal{E}\left(\frac{\partial l}{\partial\lambda}\right)^2\right. \\ \qquad \left. + 2\mathcal{F}\frac{\partial l}{\partial\lambda}\frac{\partial m}{\partial\lambda} + \mathcal{G}\left(\frac{\partial m}{\partial\lambda}\right)^2\right]\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2 + \mathfrak{D}''^2 m^2. \end{cases}$$

Pour simplifier les calculs, rappelons (§ 4) que, si l'on réduit R au paraboloïde P_0, la surface R_1 se rétrécit à une seule génératrice (λ) du paraboloïde homofocal P_k. Appelons x_0, y_0, z_0 et $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0$ ce que deviennent alors respectivement x, y, z et x_1, y_1, z_1; nous aurons [§ 1 (7)] :

$$(34)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\bar{x}_0}{\partial u} = \mathcal{L}_0\dfrac{\partial x_0}{\partial u} + \mathcal{M}_0\dfrac{\partial x_0}{\partial v} + \mathfrak{D}'_0 m X_0, \\ \dfrac{\partial\bar{x}_0}{\partial v} = P_0\dfrac{\partial x_0}{\partial u} + Q_0\dfrac{\partial x_0}{\partial v} + \mathfrak{D}'_0 l X_0. \end{cases}$$

Si l'on pose :

$$\mathcal{E}_0 = S\left(\frac{\partial\bar{x}_0}{\partial u}\right)^2, \qquad \mathcal{F}_0 = S\frac{\partial\bar{x}_0}{\partial u}\frac{\partial\bar{x}_0}{\partial v}, \qquad \mathcal{G}_0 = S\left(\frac{\partial\bar{x}_0}{\partial v}\right)^2,$$

il suit de là :

$$\begin{cases} \mathcal{E}_0 = \mathcal{E}\mathcal{L}_0^2 + 2\mathcal{F}\mathcal{L}_0\mathcal{M}_0 + \mathcal{G}\mathcal{M}_0 + \mathfrak{D}_0'^2 m^2, \\ \mathcal{F}_0 = \mathcal{E}\mathcal{L}_0 P_0 + \mathcal{F}(\mathcal{L}_0 Q_0 + \mathcal{M}_0 P_0) + \mathcal{G}\mathcal{M}_0 Q_0 + \mathfrak{D}_0'^2 lm, \\ \mathcal{G}_0 = \mathcal{E}P_0^2 + 2\mathcal{F}P_0 Q_0 + \mathcal{G}Q_0^2 + \mathfrak{D}_0'^2 l^2, \end{cases}$$

et, puisque $\mathfrak{D}' = \mathfrak{D}_0'$, les formules (33) deviennent :

$$(33') \quad \begin{cases} \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_0, \\ \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_0 + \left[(\mathcal{E}\mathcal{L}_0 + \mathcal{F}\mathcal{M}_0)\frac{\partial l}{\partial \lambda} + (\mathcal{F}\mathcal{L}_0 + \mathcal{G}\mathcal{M}_0)\frac{\partial m}{\partial \lambda}\right]\frac{d\lambda}{dv} + \mathfrak{D}'\mathfrak{D}'' m^2, \\ \mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_0 + 2\left[(\mathcal{E}P_0 + \mathcal{F}Q_0)\frac{\partial l}{\partial \lambda} + (\mathcal{F}P_0 + \mathcal{G}Q_0)\frac{\partial m}{\partial \lambda}\right]\frac{d\lambda}{dv} + 2\mathfrak{D}'\mathfrak{D}'' lm \\ \qquad + \left[\mathcal{E}\left(\frac{\partial l}{\partial \lambda}\right)^2 + 2\mathcal{F}\frac{\partial l}{\partial \lambda}\frac{\partial m}{\partial \lambda} + \mathcal{G}\left(\frac{\partial m}{\partial \lambda}\right)^2\right]\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2 + \mathfrak{D}''^2 m^2. \end{cases}$$

Maintenant, d'après la manière même dont on a calculé, au paragraphe 2, $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0$, on a :

$$(35) \quad \begin{cases} \bar{x}_0 = \lambda\sqrt{p'}\left(\bar{z}_0 - \frac{k}{2}\right) + \frac{\sqrt{p'}}{2\lambda}, \\ \bar{y}_0 = \pm\lambda\sqrt{q'}\left(\bar{z}_0 - \frac{k}{2}\right) \mp \frac{\sqrt{q'}}{2\lambda}, \end{cases}$$

d'où, en différentiant pour λ constante,

$$(36) \quad \begin{cases} \frac{\partial \bar{x}_0}{\partial u} = \lambda\sqrt{p'}\frac{\partial \bar{z}_0}{\partial u}, \qquad \frac{\partial \bar{x}_0}{\partial v} = \lambda\sqrt{p'}\frac{\partial \bar{z}_0}{\partial v}, \\ \frac{\partial \bar{y}_0}{\partial u} = \pm\lambda\sqrt{q'}\frac{\partial \bar{z}_0}{\partial u}, \qquad \frac{\partial \bar{y}_0}{\partial v} = \pm\lambda\sqrt{q'}\frac{\partial \bar{z}_0}{\partial v}, \end{cases}$$

et par suite

$$(37)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathcal{E}_0=[1+(p+q)\lambda^2]\left(\dfrac{\partial\bar z_0}{\partial u}\right)^2, \qquad \mathcal{F}_0=[1+(p+q)\lambda^2]\dfrac{\partial\bar z_0}{\partial u}\dfrac{\partial\bar z_0}{\partial v}, \\ \mathcal{G}_0=[1+(p+q)\lambda^2]\left(\dfrac{\partial\bar z_0}{\partial v}\right)^2. \end{array}\right.$$

Or, si l'on forme effectivement $\bar z_0$ de la formule (18_3), § 2,

$$\bar z_0=2\left(uv+\frac{uV+vU}{W}\right),$$

il vient :

$$(38)\quad \bar z_0=\frac{[\pm\sqrt{pq'}\,(u-v)-\sqrt{qp'}\,(u+v)]\,k\lambda^2-4\sqrt{pq}\,uv\lambda+\sqrt{qp'}\,(u+v)\pm\sqrt{pq'}\,(u-v}{W}.$$

Si l'on dérive cette valeur de $\bar z_0$ par rapport à u et v (explicitement), on obtient, après de faciles réductions :

$$(39)\qquad \frac{\partial\bar z_0}{\partial u}=4\sqrt{pq}\,\lambda\frac{V}{W^2}, \qquad \frac{\partial\bar z_0}{\partial v}=4\sqrt{pq}\,\lambda\frac{U}{W^2}.$$

Substituant dans les équations (37), on a les valeurs définitives de $\mathcal{E}_0$, $\mathcal{F}_0$, $\mathcal{G}_0$:

$$(40)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathcal{E}_0=\dfrac{16\,pq\,[1+(p+q)\lambda^2]}{W^4}\lambda^2V^2, \quad \mathcal{F}_0=\dfrac{16\,pq\,[1+(p+q)\lambda^2]}{W^4}\lambda^2UV, \\ \mathcal{G}_0=\dfrac{16\,pq\,[1+(p+q)\lambda^2]}{W^4}\lambda^2U^2. \end{array}\right.$$

Pour calculer les autres termes dans les expressions (33*) de $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{G}_1$, remarquons que, si l'on forme les sommes

$$S\frac{\partial x_0}{\partial u}\frac{\partial\bar x_0}{\partial u}, \qquad S\frac{\partial x_0}{\partial v}\frac{\partial\bar x_0}{\partial u}, \qquad S\frac{\partial x_0}{\partial u}\frac{\partial\bar x_0}{\partial v}, \qquad S\frac{\partial x_0}{\partial v}\frac{\partial\bar x_0}{\partial v},$$

il vient, d'après les formules (34) et 36) :

$$(41)\qquad \begin{cases} \mathcal{E}\mathfrak{L}_0+\mathcal{F}\mathfrak{M}_0=\frac{\partial\bar z_0}{\partial u}\left[\sqrt{p'}\,\lambda\frac{\partial x_0}{\partial u}\pm\sqrt{q'}\,\lambda\frac{\partial y_0}{\partial u}+\frac{\partial z_0}{\partial u}\right], \\ \mathcal{F}\mathfrak{L}_0+\mathcal{G}\mathfrak{M}_0=\frac{\partial\bar z_0}{\partial u}\left[\sqrt{p'}\,\lambda\frac{\partial x_0}{\partial v}\pm\sqrt{q'}\,\lambda\frac{\partial y_0}{\partial v}+\frac{\partial z_0}{\partial v}\right], \end{cases}$$

$$(41^*)\qquad \begin{cases} \mathcal{E}\mathrm{P}_0+\mathcal{F}\mathrm{Q}_0=\frac{\partial\bar z_0}{\partial v}\left[\sqrt{p'}\,\lambda\frac{\partial x_0}{\partial u}\pm\sqrt{q'}\,\lambda\frac{\partial y_0}{\partial u}+\frac{\partial z_0}{\partial u}\right], \\ \mathcal{F}\mathrm{P}_0+\mathcal{G}\mathrm{Q}_0=\frac{\partial\bar z_0}{\partial v}\left[\sqrt{p'}\,\lambda\frac{\partial x_0}{\partial v}\pm\sqrt{q'}\,\lambda\frac{\partial y_0}{\partial u}+\frac{\partial z_0}{\partial v}\right]. \end{cases}$$

Dérivons les formules

$$x_0=x_0+l\frac{\partial x_0}{\partial u}+m\frac{\partial x_0}{\partial v},\ \text{etc.},$$

par rapport à la variable λ, qui entre dans les seconds membres seulement en l, m; il vient :

$$(42)\qquad \frac{\partial\bar x_0}{\partial\lambda}=\frac{\partial l}{\partial\lambda}\frac{\partial x_0}{\partial u}+\frac{\partial m}{\partial\lambda}\frac{\partial x_0}{\partial v},\ \text{etc.}$$

Les deux équations de chaque couple (41), (41*), multipliées respectivement par $\frac{\partial l}{\partial\lambda}, \frac{\partial m}{\partial\lambda}$, donnent alors en sommant :

$$(43)\qquad \begin{cases} (\mathcal{E}\mathfrak{L}_0+\mathcal{F}\mathfrak{M}_0)\frac{\partial l}{\partial\lambda}+(\mathcal{F}\mathfrak{L}_0+\mathcal{G}\mathfrak{M}_0)\frac{\partial m}{\partial\lambda}=\frac{\partial\bar z_0}{\partial u}\left[\sqrt{p'}\,\lambda\frac{\partial\bar x_0}{\partial\lambda}\pm\sqrt{q'}\,\lambda\frac{\partial\bar y_0}{\partial\lambda}+\frac{\partial\bar z_0}{\partial\lambda}\right], \\ (\mathcal{E}\mathrm{P}_0+\mathcal{F}\mathrm{Q}_0)\frac{\partial l}{\partial\lambda}+(\mathcal{F}\mathrm{P}_0+\mathcal{G}\mathrm{Q}_0)\frac{\partial m}{\partial\lambda}=\frac{\partial\bar z_0}{\partial v}\left[\sqrt{p'}\,\lambda\frac{\partial\bar x_0}{\partial\lambda}\pm\sqrt{q'}\,\lambda\frac{\partial\bar y_0}{\partial\lambda}+\frac{\partial\bar z_0}{\partial\lambda}\right]. \end{cases}$$

Formons, à l'aide des formules (42), la somme $\mathrm{S}\left(\frac{\partial\bar x_0}{\partial\lambda}\right)^2$; nous avons :

$$(44)\qquad \mathrm{S}\left(\frac{\partial\bar x_0}{\partial\lambda}\right)^2=\mathcal{E}\left(\frac{\partial l}{\partial\lambda}\right)^2+2\mathcal{F}\frac{\partial l}{\partial\lambda}\frac{\partial m}{\partial\lambda}+\mathcal{G}\left(\frac{\partial m}{\partial\lambda}\right)^2.$$

Après avoir préparé toutes ces formules, nous substituons les valeurs trouvées dans les expressions (33*) de $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{G}_1$, en remarquant que l'on a, d'après les équations (23), § 3 :

$$\mathfrak{D}'\mathfrak{D}'' = -4\sqrt{pq}\,\varphi(v), \qquad \mathfrak{D}''^2 = 4\mathrm{H}\varphi^2(v);$$

les expressions (33*) de $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{G}_1$, deviennent :

$$(45)\quad \begin{cases} \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_0, \\ \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_0 + \frac{\partial \bar{z}_0}{\partial u}\frac{d\lambda}{dv}\left[\sqrt{p'}\,\lambda\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \lambda} \pm \sqrt{q'}\,\lambda\frac{\partial \bar{y}_0}{\partial \lambda} + \frac{\partial \bar{z}_0}{\partial \lambda}\right] - 4\sqrt{pq}\,\frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{W}^2}\varphi(v), \\ \mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_0 + 2\frac{\partial \bar{z}_0}{\partial v}\frac{d\lambda}{dv}\left[\sqrt{p'}\,\lambda\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \lambda} \pm \sqrt{q'}\,\lambda\frac{\partial \bar{y}_0}{\partial \lambda} + \frac{\partial \bar{z}_0}{\partial \lambda}\right] - 8\sqrt{pq}\,\frac{\mathrm{UV}}{\mathrm{W}^2}\varphi(v) \\ \qquad + \left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2 \mathrm{S}\left(\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \lambda}\right)^2 + 4\mathrm{H}\varphi^2(v)\frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{W}^2}. \end{cases}$$

Il nous faut encore enfin donner une autre forme de l'expression

$$\sqrt{p'}\,\lambda\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \lambda} \pm \sqrt{q'}\,\lambda\frac{\partial \bar{y}_0}{\partial \lambda} + \frac{\partial \bar{z}_0}{\partial \lambda}.$$

A cet effet, dérivons les formules (35) par rapport à λ, ce qui donne :

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \lambda} = \sqrt{p'}\left(\bar{z}_0 - \frac{k}{2}\right) - \frac{\sqrt{p'}}{2\lambda^2} + \lambda\sqrt{p'}\frac{\partial \bar{z}_0}{\partial \lambda}, \\ \frac{\partial \bar{y}_0}{\partial \lambda} = \pm\sqrt{q'}\left(\bar{z}_0 - \frac{k}{2}\right) \pm \frac{\sqrt{q'}}{2\lambda^2} \pm \lambda\sqrt{q'}\frac{\partial \bar{z}_0}{\partial \lambda}; \end{cases}$$

nous en déduisons pour la formule cherchée :

$$(46)\quad \begin{cases} \sqrt{p'}\,\lambda\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \lambda} \pm \sqrt{q'}\,\lambda\frac{\partial \bar{y}_0}{\partial \lambda} + \frac{\partial \bar{z}_0}{\partial \lambda} = \left[1 + (p+q)\lambda^2\right]\frac{\partial \bar{z}_0}{\partial \lambda} \\ \qquad + (p+q)\lambda\left(\bar{z}_0 - \frac{k}{2}\right) + \frac{q-p+2k}{2\lambda}. \end{cases}$$

§ 8.

FORMULES D'APPLICABILITÉ DÉDUITES DE L'AFFINITÉ D'IVORY.

Nous avons préparé toutes les formules nécessaires au calcul de l'élément linéaire des surfaces R_1. Il reste maintenant à prouver que ce ds_1 est transformable dans l'élément linéaire du paraboloïde fondamental P_0.

Si nous devions appliquer ici la méthode générale classique, les calculs deviendraient bientôt [à cause particulièrement de la présence de la fonction arbitraire $\varphi(v)$] presque inextricables. Mais une deuxième circonstance heureuse se produit (C. § 3), qui nous permet d'atteindre bien plus facilement le but.

C'est que nous pouvons écrire *a priori* les formules pour la transformation des deux éléments linéaires, comme données par l'affinité d'Ivory (aperçu, n° IV), après quoi nous n'avons plus qu'à effectuer des calculs de vérification.

Si l'on applique la surface R sur le paraboloïde P_0, les extrêmes F, F_1 des segments FF_1, entraînés par R, se superposent le premier au point (x_0, y_0, z_0) de P_0 et le second au point $(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$ du paraboloïde homofocal P_k. Appelons ξ, η, ζ les coordonnées du point de P_0 qui correspond, dans l'affinité d'Ivory, au point $(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$ de P_k; nous aurons (aperçu, n° IV) :

$$\frac{\xi}{\sqrt{p}} = \frac{\bar{x}_0}{\sqrt{p'}}, \qquad \frac{\eta}{\sqrt{q}} = \frac{\bar{y}_0}{\sqrt{q'}}, \qquad \zeta = \bar{z}_0 - \frac{k}{2},$$

ce qui, à cause des formules (35), donne :

$$\begin{cases} \dfrac{\xi}{\sqrt{p}} = \lambda\left(\bar{z}_0 - \dfrac{k}{2}\right) + \dfrac{1}{2\lambda}, \\ \dfrac{\eta}{\sqrt{q}} = \pm\lambda\left(\bar{z}_0 - \dfrac{k}{2}\right) \mp \dfrac{1}{2\lambda}, \\ \zeta = \bar{z}_0 - \dfrac{k}{2}. \end{cases}$$

Nous remarquons explicitement que ces formules s'appliquent aussi aux transformations singulières; elles font correspondre alors à un point de P_0 un point du plan principal extérieur à la parabole focale.

Soient maintenant u_1, v_1 les valeurs des coordonnées curvilignes u, v dans le point (ξ, η, ζ) du paraboloïde; nous avons [§ 2 (11)] :

$$u_1 + v_1 = \frac{\xi}{\sqrt{p}}, \qquad u_1 - v_1 = \frac{\eta}{\sqrt{q}},$$

et par suite :

$$(47) \qquad \begin{cases} u_1 + v_1 = \lambda\left(\bar{z}_0 - \frac{k}{2}\right) + \frac{1}{2\lambda}, \\ u_1 - v_1 = \pm\lambda\left(\bar{z}_0 - \frac{k}{2}\right) \mp \frac{1}{2\lambda}. \end{cases}$$

En substituant ici pour $\bar{z}_0$ sa valeur (38), nous allons démontrer que ces relations (47) donnent précisément les formules d'applicabilité de la surface R_1 sur le paraboloïde P_0. Nous avons donc à prouver que le ds_1^2 de R_1,

$$ds_1^2 = \mathcal{E}_1 du^2 + 2\mathcal{F}_1 du\,dv + \mathcal{G}_1 dv^2,$$

calculé en coordonnées u, v, se transforme dans les nouvelles coordonnées u_1, v_1, définies par les formules (47), dans le $\overline{ds_1^2}$ de P_0 :

$$\overline{ds_1^2} = \overline{\mathcal{E}}_1 du_1^2 + 2\overline{\mathcal{F}}_1 du_1 dv_1 + \overline{\mathcal{G}}_1 dv_1^2,$$

où l'on a posé, d'après les formules (13), § 2 :

$$(48) \qquad \overline{\mathcal{E}}_1 = p + q + 4v_1^2, \qquad \overline{\mathcal{F}}_1 = p - q + 4u_1 v_1, \qquad \overline{\mathcal{G}}_1 = p + q + 4u_1^2.$$

A ce point il devient nécessaire de séparer les deux cas des signes supérieurs ou inférieurs dans nos formules, suivant que la congruence Γ est engendrée par les droites du premier ou du second système du paraboloïde homofocal P_k.

IMPRIMERIE NATIONALE.

Mais les formules (47) montrent que l'on passe d'un cas à l'autre en échangeant u_1 et v_1; et nous avons remarqué, à la fin du paragraphe 2, que le même passage revient à l'échange de u, v dans toutes nos formules. Aussi suffira-t-il de développer les vérifications pour le premier cas; celles relatives à l'autre cas s'en obtiennent par un simple changement des notations. Dans tout ce qui suit nous choisirons donc toujours les signes supérieurs; en particulier les formules (47) deviendront :

$$u_1 = \lambda\left(\bar{z}_0 - \frac{k}{2}\right), \qquad v_1 = \frac{1}{2\lambda}. \tag{49}$$

§ 9.

APPLICABILITÉ DES SURFACES R_1 SUR LE PARABOLOÏDE.

Comme, d'après la deuxième équation (49), v_1 est fonction de v seule, l'identité de deux éléments linéaires ds_1 et $\overline{ds_1}$ sera démontrée par les trois équations suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} &\mathcal{E}_1 = \bar{\mathcal{E}}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2, \qquad \mathcal{F}_1 = \bar{\mathcal{E}}_1\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial u_1}{\partial v} + \left(\bar{\mathcal{E}}_1\frac{\partial u_1}{\partial \lambda} + \bar{\mathcal{F}}_1\frac{\partial v_1}{\partial \lambda}\right)\cdot\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{d\lambda}{dv}, \\ &\mathcal{G}_1 = \bar{\mathcal{E}}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2 + 2\left(\bar{\mathcal{E}}_1\frac{\partial u_1}{\partial \lambda} + \bar{\mathcal{F}}_1\frac{\partial v_1}{\partial \lambda}\right)\cdot\frac{\partial u_1}{\partial v}\frac{d\lambda}{dv} \\ &\qquad\qquad + \left[\bar{\mathcal{E}}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial \lambda}\right)^2 + 2\bar{\mathcal{F}}_1\frac{\partial u_1}{\partial \lambda}\frac{\partial v_1}{\partial \lambda} + \bar{\mathcal{G}}_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial \lambda}\right)^2\right]\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2, \end{aligned}\right. \tag{50}$$

où $\frac{\partial u_1}{\partial u}$, $\frac{\partial u_1}{\partial v}$ signifient les dérivées *explicites* de u_1 rapport à u, v (pour λ constante).

On tire des équations (49) et (39) :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial u_1}{\partial u} = \lambda\frac{\partial \bar{z}_0}{\partial u} = 4\sqrt{pq}\,\lambda^2\cdot\frac{V}{W^2}, \\ &\frac{\partial u_1}{\partial v} = \lambda\frac{\partial \bar{z}_0}{\partial v} = 4\sqrt{pq}\,\lambda^2\frac{U}{W^2}, \end{aligned}\right. \tag{51}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial \lambda} = -\frac{1}{2\lambda^2}. \tag{52}$$

Maintenant la première des équations (50) nous donne :

$$\mathcal{E}_1 = \left(p+q+\frac{1}{\lambda^2}\right)\frac{16\,pq\lambda^4 V^2}{W^3},$$

ou encore, à cause de la formule (40_1) :

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_0;$$

c'est précisément la formule (45_1). Donc la première équation (50) est vérifiée.

Les deux autres formules (50), comparées aux équations (45), reviennent aux équations suivantes, qu'il s'agira de démontrer :

$$(\alpha)\quad \begin{cases} \overline{\mathcal{E}}_1 \frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial u_1}{\partial v} + \left(\overline{\mathcal{E}}_1 \frac{\partial u_1}{\partial \lambda} + \overline{\mathcal{F}}_1 \frac{\partial v_1}{\partial \lambda}\right)\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{d\lambda}{dv} = \mathcal{F}_0 \\ \qquad + \frac{\partial \bar{z}_0}{\partial u}\frac{d\lambda}{dv}\left[\sqrt{p}\,\lambda\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \lambda} + \sqrt{q}\,\lambda\frac{\partial \bar{y}_0}{\partial \lambda} + \frac{\partial \bar{z}_0}{\partial \lambda}\right] - 4\sqrt{pq}\,\frac{V^2}{W^2}\varphi(v), \end{cases}$$

$$(\beta)\quad \begin{cases} \overline{\mathcal{E}}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)^2 + 2\left(\overline{\mathcal{E}}_1\frac{\partial u_1}{\partial \lambda} + \overline{\mathcal{F}}_1\frac{\partial v_1}{\partial \lambda}\right)\frac{\partial u_1}{\partial v}\frac{d\lambda}{dv} + \left[\overline{\mathcal{E}}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial \lambda}\right)^2 + 2\overline{\mathcal{F}}_1\frac{\partial u_1}{\partial \lambda}\frac{\partial v_1}{\partial \lambda}\right. \\ \quad \left. + \overline{\mathcal{G}}_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial \lambda}\right)^2\right]\cdot\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2 = \mathcal{G}_0 + 2\frac{\partial \bar{z}_0}{\partial v}\frac{d\lambda}{du}\left[\sqrt{p}\,\lambda\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \lambda} + \sqrt{q}\,\lambda\frac{\partial \bar{y}_0}{\partial \lambda} + \frac{\partial \bar{z}_0}{\partial \lambda}\right] \\ \quad - 8\sqrt{pq}\,\frac{UV}{W^2}\varphi(v) + \left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2\cdot S\left(\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \lambda}\right)^2 + 4H\varphi^2(v)\frac{V^2}{W^2}. \end{cases}$$

Or, d'après les calculs effectués plus haut, nous avons les formules :

$$(52^*)\qquad \overline{\mathcal{E}}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2 = \mathcal{E}_0, \qquad \overline{\mathcal{E}}_1\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial u_1}{\partial v} = \mathcal{F}_0, \qquad \overline{\mathcal{E}}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)^2 = \mathcal{G}_0;$$

celles-ci prouvent que les premiers termes dans les deux membres de chacune des équations (α) et (β) sont identiques. L'équation (α) reste donc :

$$\left(\overline{\mathcal{E}}\frac{\partial u_1}{\partial \lambda} + \overline{\mathcal{F}}_1\frac{\partial v_1}{\partial \lambda}\right)\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{d\lambda}{dv} = \frac{\partial \bar{z}_0}{\partial u}\frac{d\lambda}{dv}\left[\sqrt{p}\,\lambda\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \lambda} + \sqrt{q}\,\lambda\frac{\partial \bar{y}_0}{\partial \lambda} + \frac{\partial \bar{z}_0}{\partial \lambda}\right] - 4\sqrt{pq}\,\frac{V^2}{W^2}\varphi(v),$$

et comme

$$\frac{d\lambda}{dv}=\frac{V\varphi(v)}{k},\qquad \frac{\partial\bar z_0}{\partial u}=4\sqrt{pq}\,\lambda\frac{V}{W^2},\qquad \frac{\partial u_1}{\partial u}=4\sqrt{pq}\,\lambda^2\frac{V}{W^2},$$

elle peut s'écrire :

$$(53)\quad \left(\bar{\mathcal{E}}_1\frac{\partial u_1}{\partial\lambda}+\bar{\mathcal{F}}_1\frac{\partial v_1}{\partial\lambda}\right)\lambda^2=\lambda\left[\sqrt{p'}\lambda\frac{\partial\bar x_0}{\partial\lambda}+\sqrt{q'}\lambda\frac{\partial\bar y_0}{\partial\lambda}+\frac{\partial\bar z_0}{\partial\lambda}\right]-k,$$

ou encore, à cause de l'équation (46), § 7 :

$$(53^*)\quad \left(\bar{\mathcal{E}}_1\frac{\partial u_1}{\partial\lambda}+\bar{\mathcal{F}}_1\frac{\partial v_1}{\partial\lambda}\right)\lambda^2=\lambda\left[1+(p+q)\lambda^2\right]\frac{\partial\bar z_0}{\partial\lambda}+(p+q)\lambda^2\left(\bar z_0-\frac{k}{2}\right)+\frac{q-p}{2}.$$

Or les équations (49) donnent :

$$\frac{\partial u_1}{\partial\lambda}=\lambda\frac{\partial\bar z_0}{\partial\lambda}+\left(\bar z_0-\frac{k}{2}\right),\qquad \frac{\partial v_1}{\partial\lambda}=-\frac{1}{2\lambda^2},$$

et l'on a, d'après les équations (48) :

$$\mathcal{E}_1\lambda^2=1+(p+q)\lambda^2,\qquad \bar{\mathcal{F}}_1=p-q+2\left(\bar z_0-\frac{k}{2}\right),$$

ce qui réduit l'équation (53*) à une identité, q.e.d.

Il reste seulement à démontrer l'équation (β). L'identité (53), que nous avons démontrée, prouve que l'on a aussi :

$$2\left(\bar{\mathcal{E}}_1\frac{\partial u_1}{\partial\lambda}+\bar{\mathcal{F}}\frac{\partial v_1}{\partial\lambda}\right)\frac{\partial u_1}{\partial v}\frac{d\lambda}{dv}=2\frac{\partial\bar z_0}{\partial v}\frac{\partial\lambda}{\partial v}\left[\sqrt{p'}\lambda\frac{\partial\bar x_0}{\partial\lambda}+\sqrt{q'}\lambda\frac{\partial\bar y_0}{\partial\lambda}+\frac{\partial\bar z_0}{\partial\lambda}\right]$$

$$-8\frac{\sqrt{pq}}{W^2}UV\varphi(v),$$

et comme, d'après la troisième formule (52*),

$$\bar{\mathcal{E}}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)^2=\mathcal{G}_0,$$

l'équation (β) reste :

$$\left[\overline{\mathcal{E}}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial\lambda}\right)^2+2\overline{\mathcal{F}}_1\frac{\partial u_1}{\partial\lambda}\frac{\partial v_1}{\partial\lambda}+\overline{\mathcal{G}}_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial\lambda}\right)^2\right]\cdot\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2=\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2\cdot S\left(\frac{\partial\overline{x}_0}{\partial\lambda}\right)^2+4H\varphi^2(v)\frac{V^2}{W^2}.$$

Celle-ci, après division par

$$\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)^2=\frac{V^2\varphi^2(v)}{k^2},$$

devient :

$$(54)\qquad \overline{\mathcal{E}}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial\lambda}\right)^2+2\overline{\mathcal{F}}\frac{\partial u_1}{\partial\lambda}\frac{\partial v_1}{\partial\lambda}+\overline{\mathcal{G}}_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial\lambda}\right)^2=S\left(\frac{\partial\overline{x}_0}{\partial\lambda}\right)^2+\frac{4k^2H}{W^2}.$$

Pour la vérifier, remarquons que la manière même dont on a calculé, au paragraphe 8, u_1 et v_1 donne :

$$\overline{\mathcal{E}}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial\lambda}\right)^2+2\overline{\mathcal{F}}_1\frac{\partial u_1}{\partial\lambda}\frac{\partial v_1}{\partial\lambda}+\overline{\mathcal{G}}_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial\lambda}\right)^2=S\left(\frac{\partial\overline{\xi}}{\partial\lambda}\right)^2=\frac{p}{p'}\left(\frac{\partial\overline{x}_0}{\partial\lambda}\right)^2+\frac{q}{q'}\left(\frac{\partial\overline{y}_0}{\partial\lambda}\right)^2+\left(\frac{\partial\overline{z}_0}{\partial\lambda}\right)^2,$$

après quoi l'équation (54) reste :

$$(54^*)\qquad \frac{1}{p'}\left(\frac{\partial\overline{x}_0}{\partial\lambda}\right)^2-\frac{1}{q'}\left(\frac{\partial\overline{y}_0}{\partial\lambda}\right)^2=\frac{4kH}{W^2}.$$

Or des formules

$$\frac{\overline{x}_0}{\sqrt{p'}}=u_1+\frac{1}{2\lambda},\qquad \frac{\overline{y}_0}{\sqrt{q'}}=u_1-\frac{1}{2\lambda},$$

on tire :

$$\frac{1}{p'}\left(\frac{\partial\overline{x}_0}{\partial\lambda}\right)^2-\frac{1}{q'}\left(\frac{\partial\overline{y}_0}{\partial\lambda}\right)^2=-\frac{2}{\lambda^2}\frac{\partial u_1}{\partial\lambda},$$

ce qui réduit l'équation (54*) à la suivante :

$$(55)\qquad \frac{\partial u_1}{\partial\lambda}=-2\frac{k\lambda^2}{W^2}\cdot H.$$

Formons effectivement, d'après la formule (38), § 7, l'expression

$$u_1 = \lambda\left(\bar{z}_0 - \frac{k}{2}\right);$$

nous avons alors pour les formules d'applicabilité :

$$(56)\qquad \begin{cases} u_1 = \dfrac{\sqrt{qp'}\,(u+v) + \sqrt{pq'}\,(u-v) - \sqrt{pq}\,(4uv+k)\,\lambda}{2\left[\sqrt{pq'}\,(u-v)\,\lambda - \sqrt{qp'}\,(u+v)\,\lambda + \sqrt{pq}\right]}, \\ v_1 = \dfrac{1}{2\lambda}. \end{cases}$$

En dérivant cette fonction linéaire u_1 de λ, nous avons de suite :

$$\frac{\partial u_1}{\partial \lambda} = \frac{2\lambda^2\left[qp'(u+v)^2 - pq'(u-v)^2 - pq(4uv+k)\right]}{W^2}.$$

Or, comme $p' = p - k$, $q' = q + k$, on a identiquement :

$$\begin{aligned} qp'(u+v)^2 - pq'(u-v)^2 - pq(4uv+k) \\ = -k\left[p(u-v)^2 + q(u+v)^2 + pq\right] = -k\mathrm{H}; \end{aligned}$$

l'équation (55) est donc une identité, c.q.f.d.

La démonstration est maintenant achevée, et nous pouvons en conclure la proposition finale :

Les surfaces réglées R_1, *déduites de la surface initiale* R *par la transformation* B_k, *sont toutes applicables, comme* R, *sur le paraboloïde fondamental* P_0; *et la loi d'applicabilité entre* R *et* R_1 *est donnée par l'affinité d'Ivory entre les paraboloïdes homofocaux* P_0 *et* P_k.

Nous devons encore ajouter un complément simple, mais nécessaire à cette proposition. Je dis que : *l'applicabilité des deux surfaces* R, R_1 *a lieu toujours par* **déformation continue.** Pour le démontrer on devra faire voir que les deux systèmes de droites de R

et de R_1 ont toujours même sens, c'est-à-dire que les plans tangents de R et R_1 tournent dans le même sens lorsque leurs points de contact se déplacent le long des génératrices correspondantes. Employons les considérations suivantes, qui s'appliquent en général à toute congruence W dont les deux nappes focales sont des surfaces réglées R, R_1. Soient F, F_1 deux points correspondants de R, R_1 qui se déplacent le long de deux génératrices correspondantes r, r_1. Les droites FF_1 engendrent une quadrique qui se raccorde à R, R_1 le long de r, r_1. Or les deux plans (F, r_1), (F_1, r), tangents à cette quadrique (et aux surfaces R, R_1) en F, F_1, tournent dans le même sens lorsque F, F_1 se déplacent, ce qui démontre notre assertion. On peut aussi énoncer ce résultat sous la forme équivalente : *Les asymptotiques curvilignes des deux nappes focales réglées* R, R_1 *ont des torsions de même signe.*

§ 10.

RELATION RÉCIPROQUE ENTRE R ET R_1.

Soit R une déformée gauche quelconque du paraboloïde P_0; soit R_1 une de ses transformées par la transformation B_k. Il nous reste encore à démontrer la propriété énoncée sous (β) au paragraphe 5 : *la surface* R *dérive à son tour de* R_1 *par une transformation* B_k. D'après la méthode même qui nous a servi à établir les transformations, nous aurons pour cela à prouver que si l'on fait rouler le paraboloïde P_0, entraînant le paraboloïde homofocal P_k, sur la deuxième surface R_1, la congruence Γ engendrée par les génératrices de P_k contiendra la surface R. Cela revient à démontrer que : *si l'on applique la surface* R_1 *sur le paraboloïde* P_0, *chaque génératrice de* R, *entraînée par la correspondante de* R_1, *se disposera sur le paraboloïde homofocal* P_k.

On pourrait démontrer notre proposition analytiquement, à l'aide des formules établies pour nos transformations. Nous préfé-

rons ici une voie géométrique qui, utilisant la loi d'applicabilité entre R et R_1, permet de réduire la démonstration à des propriétés élémentaires de l'affinité d'Ivory.

Soient $M_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$, $M_2 \equiv (x_2, y_2, z_2)$ deux points quelconques du paraboloïde P_0 et $\overline{M}_1 \equiv (\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$, $\overline{M}_2 \equiv (\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2)$ leurs points correspondants, dans l'affinité d'Ivory, sur le paraboloïde homofocal P_k; on aura :

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \sqrt{\dfrac{p-k}{p}} \cdot x_1, & \bar{y}_1 = \sqrt{\dfrac{q+k}{q}} \cdot y_1, & \bar{z}_1 = z_1 + \dfrac{k}{2}; \\ \bar{x}_2 = \sqrt{\dfrac{p-k}{p}} \cdot x_2, & \bar{y}_2 = \sqrt{\dfrac{q+k}{q}} \cdot y_2, & \bar{z}_2 = z_2 + \dfrac{k}{2}. \end{cases}$$

Le théorème d'Ivory nous dit que : *les segments rectilignes* $M_1\overline{M}_2$ *et* $M_2\overline{M}_1$ *ont toujours égale longueur*[1].

Nous remarquons de plus que : *si le plan tangent en* M_1 *au paraboloïde* P_0 *passe par* $\overline{M}_2$, *le plan tangent en* M_2 *passera par* $\overline{M}_1$[2].

[1] La vérification est immédiate. Comme

$$\frac{x_1^2}{p} - \frac{y_1^2}{q} = 2z_1, \qquad \frac{x_2^2}{p} - \frac{y_2^2}{q} = 2z_2,$$

l'expression

$$S(x_1 - \bar{x}_2)^2 - S(x_2 - \bar{x}_1)^2 = k\left[\left(\frac{x_1^2}{p} - \frac{y_1^2}{q}\right) - \left(\frac{x_2^2}{p} - \frac{y_2^2}{q}\right) + 2(z_2 - z_1)\right]$$

est identiquement nulle.

[2] En effet les deux expressions

$$\frac{x_1\bar{x}_2}{p} - \frac{y_2\bar{y}_2}{q} - (z_1 + \bar{z}_2), \qquad \frac{x_2\bar{x}_1}{p} - \frac{y_2\bar{y}_1}{q} - (z_2 + \bar{z}_1)$$

sont égales entre elles et à

$$\sqrt{\frac{p-k}{p^3}}\, x_1 x_2 - \sqrt{\frac{q+k}{q}}\, y_1 y_2 - (z_1 + z_2) - \frac{k}{2};$$

or, lorsque la première s'annule, le plan tangent en M_1 passe par $\overline{M}_2$. Mais alors la seconde s'annule aussi et le plan tangent en M_2 passe par $\overline{M}_1$.

Cela posé, prenons deux génératrices quelconques g_1, g_2 du paraboloïde P_0, qui pourront appartenir au même système ou à des systèmes opposés; soient $\bar{g}_1$, $\bar{g}_2$ leurs génératrices correspondantes, par l'affinité d'Ivory, sur le paraboloïde homofocal P_k. Établissons maintenant une correspondance (projective) entre les points de ces quatre droites en faisant correspondre à chaque point M_1 de g_1 le point $\overline{M}_2$ sur g_2, où cette droite perce le plan tangent en M_1 à P_0. Alors les points $\overline{M}_1$, M_2 qui correspondent à M_1, $\overline{M}_2$ dans l'affinité d'Ivory décriront respectivement les droites $\bar{g}_1$, g_2 d'une manière déterminée. D'après ce que nous avons dit plus haut, la correspondance ainsi établie entre les points des quatre droites g_1, g_2, $\bar{g}_1$, $\bar{g}_2$ jouira des propriétés suivantes :

1° Tout segment $M_1\overline{M}_2$ sera égal en longueur à son correspondant $\overline{M}_1 M_2$;

2° Les mêmes segments toucheront respectivement le paraboloïde P_0 en M_2 et M_1;

3° M_1 et $\overline{M}_1$ décriront des segments d'égale longueur sur g_1, $\bar{g}_1$; et de même M_2 et $\overline{M}_2$ sur g_2, $\bar{g}_2$.

Ajoutons à tout cela que l'angle et le moment de la couple de droites $(g_1, \bar{g}_2)$ sont respectivement égaux à l'angle et au moment de l'autre couple $(\bar{g}_1, g_2)$, ainsi qu'on le reconnaît par un calcul élémentaire, D'après toutes ces propriétés il est évident : *qu'il existe un mouvement invariable, ou bien une symétrie, qui superpose la couple de droites* $(g_1, \bar{g}_2)$, *chargée des points* M_1 *et* $\overline{M}_2$, *sur l'autre couple* $(\bar{g}_1, g_2)$, *chargée des points correspondants* $\overline{M}_1$ *et* M_2.

Nous allons confirmer ces résultats par le calcul effectif, et nous les préciserons en même temps, en montrant qu'il s'agira d'un mouvement invariable lorsque les deux génératrices g_1, g_2 appartiennent au même système, d'une symétrie dans le cas contraire.

IMPRIMERIE NATIONALE.

§ 11.

EXPRESSION EFFECTIVE DU MOUVEMENT INVARIABLE ET CONCLUSION.

Supposons d'abord que g_1 et g_2 appartiennent au même système par exemple au premier, et soient

$$g_1 \begin{cases} x_1 = \lambda_1 \sqrt{p}\, z_1 + \frac{\sqrt{p}}{2\lambda_1}, \\ y_1 = \lambda_1 \sqrt{q}\, z_1 - \frac{\sqrt{q}}{2\lambda_1}, \end{cases} \qquad g_2 \begin{cases} x_2 = \lambda_2 \sqrt{p}\, z_2 + \frac{\sqrt{p}}{2\lambda_2}, \\ y_2 = \lambda_2 \sqrt{q}\, z_2 - \frac{\sqrt{q}}{2\lambda_2}, \end{cases}$$

leurs équations respectives. Les génératrices $\bar{g}_1$, $\bar{g}_2$ qui leur correspondent sur le paraboloïde homofocal P_k auront les équations

$$g_1 \begin{cases} \bar{x}_1 = \lambda_1 \sqrt{p'}\, z_1 + \frac{\sqrt{p'}}{2\lambda_1}, \\ \bar{y}_1 = \lambda_1 \sqrt{q'}\, z_1 - \frac{\sqrt{q'}}{2\lambda_1}, \\ \bar{z}_1 = z_1 + \frac{k}{2}, \end{cases} \qquad g_2 \begin{cases} \bar{x}_2 = \lambda_2 \sqrt{p'}\, z_2 + \frac{\sqrt{p'}}{2\lambda_2}, \\ \bar{y}_2 = \lambda_2 \sqrt{q'}\, z_2 - \frac{\sqrt{q'}}{2\lambda_2}, \\ \bar{z}_2 = z_2 + \frac{k}{2}. \end{cases}$$

Soient maintenant

$$\begin{cases} \xi = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \alpha, \\ \eta = \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z + \beta, \\ \zeta = \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z + \gamma, \end{cases}$$

les formules qui définissent un mouvement invariable, où x, y, z et ξ, η, ζ indiquent les coordonnées d'un point quelconque de l'espace

avant et après le mouvement. Pour que ce mouvement superpose la couple (g_1, g_2) et les points M_1, $\overline{M}_2$ à la couple $(\bar{g}_1, g_2)$ et aux points $\overline{M}_1$, M_2, il faut et il suffit que les équations supérieures soient satisfaites en y posant

$$x = x_1, \qquad y = y_1, \qquad z = z_1,$$

$$\xi = \bar{x}_1, \qquad \eta = y_1, \qquad \zeta = \bar{z}_1,$$

pour toute valeur de z_1, et encore par l'autre substitution

$$x = \bar{x}_2, \qquad y = \bar{y}_2, \qquad z = \bar{z}_2,$$

$$\xi = x_2, \qquad \eta = y_2, \qquad \zeta = z_2,$$

pour toute valeur de z_2. Ces conditions donnent autant d'équations linéaires qu'il en faut pour déterminer les douze coefficients inconnus α, β, γ, et un calcul très simple donne le résultat suivant. Posons :

$$\Delta = \left(\sqrt{qp'} + \sqrt{pq'}\right)(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + k\left(\sqrt{pq'} - \sqrt{qp'}\right)\lambda_1^2\lambda_2^2 - 2\left(\sqrt{pq} + \sqrt{p'q'}\right)\lambda_1\lambda_2;$$

on aura :

$$\left\{\begin{aligned} \Delta\alpha_1 &= \left(\sqrt{pq} + \sqrt{p'q'}\right)(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + k\left(\sqrt{p'q'} - \sqrt{pq}\right)\lambda_1^2\lambda_2^2 \\ &\quad - 2\left(\sqrt{qp'} + \sqrt{pq'}\right)\lambda_1\lambda_2, \\ \Delta\alpha_2 &= k(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) + k^2\lambda_1^2\lambda_2^2, \\ \Delta\alpha_3 &= 2k\lambda_1\lambda_2\left(\sqrt{q'}\lambda_1 - \sqrt{q}\lambda_2\right), \end{aligned}\right.$$

$$\begin{cases} \Delta\beta_1 = k(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) + k^2\lambda_1^2\lambda_2^2, \\ \Delta\beta_2 = (\sqrt{pq} + \sqrt{p'q'})(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + k(\sqrt{pq} - \sqrt{p'q'})\lambda_1^2\lambda_2^2 \\ \qquad\qquad - 2(\sqrt{qp'} + \sqrt{pq'})\lambda_1\lambda_2, \\ \Delta\beta_3 = 2k\lambda_1\lambda_2(\sqrt{p}\,\lambda_2 - \sqrt{p'}\,\lambda_1). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta\gamma_1 = 2k\lambda_1\lambda_2(\sqrt{q'}\,\lambda_2 - \sqrt{q}\,\lambda_1), \\ \Delta\gamma_2 = 2k\lambda_1\lambda_2(\sqrt{p}\,\lambda_1 - \sqrt{p'}\,\lambda_2), \\ \Delta\gamma_3 = (\sqrt{pq'} + \sqrt{qp'})(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + k(\sqrt{qp'} - \sqrt{pq'})\lambda_1^2\lambda_2^2 \\ \qquad\qquad - 2(\sqrt{pq} + \sqrt{p'q'})\lambda_1\lambda_2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta\alpha = k(\sqrt{q'}\,\lambda_2 - \sqrt{q}\,\lambda_1) + k^2\sqrt{q}\,\lambda_1\lambda_2^2, \\ \Delta\beta = k(\sqrt{p'}\,\lambda_2 - \sqrt{p}\,\lambda_1) - k^2\sqrt{p}\,\lambda_1\lambda_2^2, \\ \Delta\gamma = \frac{k}{2}\left\{ \begin{array}{c} (\sqrt{pq'} + \sqrt{qp'})(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) + k(\sqrt{pq'} - \sqrt{qp'})\lambda_1^2\lambda_2^2 \\ + 2(\sqrt{pq} - \sqrt{p'q'})\lambda_1\lambda_2 \end{array} \right\}. \end{cases}$$

On vérifie sans peine que les valeurs ainsi déterminées pour les coefficients α_i, β_i, γ_i $(i = 1, 2, 3)$ rendent la substitution

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

orthogonale droite. Il s'agit donc en effet d'un mouvement *invariable*.

Ces formules sont relatives au cas où g_1, g_2 appartiennent au

même système. Un calcul analogue dans l'autre cas montre que la substitution correspondante est alors orthogonale *gauche*. Dans ce deuxième cas le mouvement invariable est donc remplacé par une symétrie.

Cela posé, nous démontrons comme il suit la propriété énoncée au commencement du paragraphe précédent.

Supposons d'abord que la surface transformée R_1 prenne ses génératrices du premier système (u). Soient g et γ deux génératrices quelconques correspondantes de R et R_1, et soient F, F_1 deux points correspondants de g, γ. Si l'on applique R sur le paraboloïde P_0, la génératrice g de R se disposera sur une génératrice g_1 du premier système de P_0, et la droite γ, entraînée par g, se placera sur une génératrice (du premier système) du paraboloïde homofocal P_k; nous appelons $\bar{g}_2$ cette génératrice de P_k. En même temps les points F, F_1 se superposeront aux points M_1, $\overline{M}_2$. Soient maintenant $\bar{g}_1$, g_2 les droites qui correspondent à g_1, $\bar{g}_2$ dans l'affinité d'Ivory. Rappelons-nous qu'un mouvement invariable superpose la couple $(g_1, \bar{g}_2)$ et les segments $M_1\overline{M}_2$ à la couple $(\bar{g}_1, g_2)$ et aux segments $\overline{M}_1 M_2$. Or nous avons à démontrer inversement que lorsqu'on applique R_1 sur P_0, la droite g, entraînée par γ, se placera sur P_k. Remarquons pour cela que, à cause de la loi d'applicabilité, la droite γ se disposera précisément sur g_2 et chaque plan (F, γ), tangent en F_1 à R_1, se superposera au plan $(\overline{M}_1, g_2)$ tangent en M_2 à P_0; par conséquent tous les segments F_1F se placeront sur les segments $M_2\overline{M}_1$ et la droite g ira occuper la position $\bar{g}_1$ sur le paraboloïde P_k, q.e.d.

Considérons maintenant le deuxième cas, où R_1 prend ses génératrices de l'autre système (u); la conclusion restera encore la même. En effet le mouvement invariable qui superposait la couple $(g_1, \bar{g}_2)$ à la couple $(\bar{g}, g_2)$ est remplacé ici par une symétrie. Mais d'autre part nous avons vu (§ 9) que les droites de R_1 s'appliquent toujours par déformation continue aux droites (v) de P_0 du premier système, et dans les formules d'applicabilité on n'a qu'à échanger u et v, ce qui remplace, d'après les formules (12), § 2, chaque

génératrice de P_0 par sa symétrique par rapport au plan principal xz. Donc dans l'application de R_1 sur P_0 la droite γ ira occuper sur P_0 non la position g_2 mais bien sa symétrique g_2'. Ce sera donc toujours un mouvement invariable qui superposera la couple (γ, g) à la couple $(g_2', \bar{g}_1')$ symétrique de $(g_2, \bar{g}_1)$. Notre conclusion reste donc la même et nous pouvons énoncer le résultat final : *Si la déformée réglée* R_1 *du paraboloïde provient de la déformée* R *par une transformation* B_k, *inversement* R *dérive de* R_1 *par une transformation* B_k *du même paramètre k.*

§ 12.

FORMULES RELATIVES À L'HYPERBOLOÏDE À UNE NAPPE.

Toutes les propositions fondamentales relatives aux transformations B_k des déformées gauches du paraboloïde sont maintenant établies et nous avons à procéder aux recherches analogues pour l'autre quadrique réglée : *l'hyperboloïde à une nappe*. Ici la parfaite analogie avec le cas précédent nous permettra d'abréger l'exposition.

La quadrique fondamentale, que nous appelons Q_0, est donc actuellement l'hyperboloïde à une nappe, dont nous écrirons l'équation

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}=1.$$

Rapportons l'hyperboloïde à ses génératrices rectilignes u, v, à l'aide des formules

$$(57) \qquad x_0 = a\frac{1+uv}{u+v}, \qquad y_0 = b\frac{u-v}{u+v}, \qquad z_0 = c\frac{1-uv}{u+v}.$$

Pour les éléments fondamentaux de la surface nous trouvons :

$$ds^2 = \mathcal{E}\,du^2 + 2\mathcal{F}\,du\,dv + \mathcal{G}\,dv^2,$$

$$(58)\qquad \begin{cases} \mathcal{E} = \dfrac{(a^2+c^2)v^4 + 2(c^2-a^2+2b^2)v^2 + a^2 + c^2}{(u+v)^4}, \\ \mathcal{F} = \dfrac{(a^2+c^2)u^2v^2 + (c^2-a^2)(u^2+v^2) - 4b^2uv + a^2 + c^2}{(u+v)^4}, \\ \mathcal{G} = \dfrac{(a^2+c^2)u^4 + 2(c^2-a^2+2b^2)u^2 + a^2 + c^2}{(u+v)^4}; \end{cases}$$

$$(58^*)\qquad \mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2 = 4\,\frac{b^2c^2(1+uv)^2 + a^2c^2(u-v)^2 + a^2b^2(1-uv)^2}{(u+v)^6}.$$

Les coefficients $\mathfrak{D}_0$, $\mathfrak{D}_0'$, $\mathfrak{D}_0''$ de la deuxième forme fondamentale sont donnés par les formules

$$(59)\qquad \mathfrak{D}_0 = \mathfrak{D}_0'' = 0, \qquad \mathfrak{D}_0' = -4\,\frac{abc}{(u+v)^4\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}},$$

et la courbure $K = -\frac{1}{\rho^2}$ par la valeur suivante de ρ :

$$(60)\qquad \rho = \frac{(u+v)^4}{4abc}(\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2) = \frac{b^2c^2(1+uv)^2 + a^2c^2(u-v)^2 + a^2b^2(1-uv)^2}{abc\,(u+v)^2}.$$

Enfin nous trouvons pour les valeurs des symboles de Christoffel :

$$(61)\qquad \begin{cases} \left\{\begin{matrix}1\,1\\1\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}2\,2\\2\end{matrix}\right\} = -\dfrac{2}{u+v}, & \left\{\begin{matrix}1\,1\\2\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}2\,2\\1\end{matrix}\right\} = 0; \\ \left\{\begin{matrix}1\,2\\1\end{matrix}\right\} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \log\rho}{\partial v}, & \left\{\begin{matrix}1\,2\\2\end{matrix}\right\} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \log\rho}{\partial u}. \end{cases}$$

Prenons maintenant un deuxième hyperboloïde *réglé* Q_k homofocal à Q_0, et soit

$$\frac{x^2}{a^2+k} + \frac{y^2}{b^2+k} - \frac{z^2}{c^2-k} = 1$$

son équation. Si nous supposons, pour fixer les idées,

$$a^2 \geqslant b^2,$$

le paramètre k devra être situé dans l'intervalle $(-b^2 \ldots c^2)$,

$$-b^2 \leqslant k \leqslant c^2.$$

Ici, comme dans le cas du paraboloïde, nous excluons la valeur $k = 0$, mais non les valeurs extrêmes $k = -b^2$, $k = c^2$, qui correspondent aux coniques focales.

Introduisons les quantités positives

$$(62) \qquad a' = \sqrt{a^2 + k}, \qquad b' = \sqrt{b^2 + k}, \qquad c' = \sqrt{c^2 - k},$$

et écrivons les équations des deux systèmes de génératrices de l'hyperboloïde Q_k sous la forme

$$(63) \qquad \begin{cases} x_1 = \pm \dfrac{a'}{c'} \sin\theta \,.\, z_1 + a' \cos\theta, \\ y_1 = \mp \dfrac{b'}{c'} \cos\theta \,.\, z_1 + b' \sin\theta. \end{cases}$$

Les signes supérieurs se rapportent au premier, les inférieurs au deuxième système, et θ désigne le paramètre qui fixe la génératrice dans son système. Ainsi qu'au paragraphe 2, considérons la conique C section du plan tangent à Q_0 dans le point (x_0, y_0, z_0) avec l'hyperboloïde Q_k. Un point quelconque $(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$ de cette conique aura des coordonnées de la forme

$$\bar{x}_0 = x_0 + l \frac{\partial x_0}{\partial u} + m \frac{\partial x_0}{\partial v} \text{ etc.};$$

en les calculant d'après les formules (57), on trouve

$$(64)\qquad \begin{cases} \bar{x}_0 = a\dfrac{(u+v)(1+uv)+l(v^2-1)+m(u^2-1)}{(u+v)^2}, \\ \bar{y}_0 = b\dfrac{(u+v)(u-v)+2lv-2mu}{(u+v)^2}, \\ \bar{z}_0 = c\dfrac{(u+v)(1-uv)-l(v^2+1)-m(u^2+1)}{(u+v)^2}. \end{cases}$$

Si l'on substitue dans les équations (63) pour x_1, y_1, z_1 ces valeurs de $\bar{x}_0$, $\bar{y}_0$, z_0, on en tire pour les fonctions inconnues l, m :

$$(65)\qquad l=(u+v)\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{W}},\qquad m=(u+v)\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{W}},$$

les fonctions U, V, W, de u, v et θ, ayant les significations suivantes :

$$(66)\qquad \begin{cases} \mathrm{U}=\left(\pm\dfrac{ac}{a'c'}-\dfrac{b}{b'}\right)2u\cos\theta+\left(\pm\dfrac{bc}{b'c'}-\dfrac{a}{a'}\right)(u^2-1)\sin\theta \\ \qquad +\left(\dfrac{ab}{a'b'}\mp\dfrac{c}{c'}\right)(u^2+1), \\ \mathrm{V}=\left(\mp\dfrac{ac}{a'c'}-\dfrac{b}{b'}\right)2v\cos\theta+\left(\pm\dfrac{bc}{b'c'}+\dfrac{a}{a'}\right)(v^2-1)\sin\theta \\ \qquad +\left(\dfrac{ab}{a'b'}\pm\dfrac{c}{c'}\right)(v^2+1), \\ \mathrm{W}=2\left[\pm\dfrac{ac}{a'c'}(u-v)\cos\theta\mp\dfrac{bc}{b'c'}(1+uv)\sin\theta\right. \\ \qquad \left.+\dfrac{ab}{a'b'}(1-uv)\right]. \end{cases}$$

On remarquera que le passage des signes supérieurs aux inférieurs équivaut à permuter u et v, et à changer en même temps θ en $-\theta$.

IMPRIMERIE NATIONALE.

§ 13.

SURFACES GAUCHES APPLICABLES SUR L'HYPERBOLOÏDE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE EN $\theta(v)$.

Soit R une déformée gauche quelconque de l'hyperboloïde Q_0, et supposons par exemple que les génératrices de R correspondent, *par déformation continue*, aux droites (v) de Q_0. La première forme quadratique ds^2 de R est identique à celle de Q_0; pour la deuxième nous aurons (C. § 3) :

$$\mathfrak{D} = 0, \qquad \mathfrak{D}' = \mathfrak{D}'_0 = -\frac{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}}{\rho}.$$

À cause de l'équation (4_2), § 1, de Codazzi, on a :

$$\frac{\partial \log \mathfrak{D}''}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \log \left[(u+v)^2 \sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2} \right],$$

et par suite :

$$\mathfrak{D}'' = (u+v)^2 \sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2} \cdot \varphi(v),$$

où la forme de la fonction arbitraire $\varphi(v)$ fixe la déformée R. Écrivons les formules

$$(67) \qquad \begin{cases} \mathfrak{D} = 0, \qquad \mathfrak{D}' = \mathfrak{D}'_0 = -\dfrac{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}}{\rho}, \\ \mathfrak{D}'' = (u+v)^2 \varphi(v) \sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}, \end{cases}$$

d'où il suit encore

$$(67^*) \qquad \frac{\mathfrak{D}''}{\mathfrak{D}'} = -(u+v)^2 \rho \cdot \varphi(v).$$

Soit (x, y, z) un point mobile sur R; en substituant pour θ, dans les formules

$$x_1 = x + l\frac{\partial x}{\partial u} + m\frac{\partial x}{\partial v} \text{ etc.},$$

une fonction arbitraire $\theta(v)$ de v, nous aurons défini une surface réglée de la congruence Γ engendrée par les génératrices (du premier ou du second système) de l'hyperboloïde Q_k, entraîné par Q_0 dans son roulement sur la surface applicable R (C. § 3). Il s'agit de choisir la fonction $\theta(v)$ de telle manière que la surface réglée R_1 ainsi obtenue forme, avec R, les deux nappes d'une congruence rectiligne dont $F \equiv (x, y, z)$ et $F_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$ soient les foyers. Nous aurons pour cela à satisfaire à l'équation (10), § 1 :

$$(68) \qquad \begin{vmatrix} l & m & 0 \\ \mathfrak{L} & \mathfrak{M} & m \\ P & Q & l - \rho(u+v)^2 \varphi(v) \cdot m \end{vmatrix} = 0.$$

Ici, en posant (C. § 3) :

$$(69) \qquad \begin{cases} \mathfrak{L}_0 = \dfrac{\partial l}{\partial u} - \dfrac{2}{u+v} l + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \log \rho}{\partial v} m + 1, \\ \mathfrak{M}_0 = \dfrac{\partial m}{\partial u} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \log \rho}{\partial u} m, \\ P_0 = \dfrac{\partial l}{\partial v} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \log \rho}{\partial v} l, \\ Q_0 = \dfrac{\partial m}{\partial v} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \log \rho}{\partial u} l - \dfrac{2}{u+v} m + 1, \end{cases}$$

on a :

$$(69^*) \qquad \begin{cases} \mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0, & \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0, \\ P = P_0 + \dfrac{\partial l}{\partial \theta}\dfrac{d\theta}{dv}, & Q = Q_0 + \dfrac{\partial m}{\partial \theta}\dfrac{d\theta}{dv}, \end{cases}$$

et l'équation (68) devient :

$$(70)\quad \begin{vmatrix} l & m & o \\ \mathcal{L}_0 & \mathfrak{M}_0 & m \\ P_0 & Q_0 & l \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} l & m & o \\ \mathcal{L}_0 & \mathfrak{M}_0 & m \\ \frac{\partial l}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dv} & \frac{\partial m}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dv} & -\rho(u+v)^2\varphi(v)m \end{vmatrix} = o.$$

Nous constatons en premier lieu que le déterminant

$$\Theta = \begin{vmatrix} l & m & o \\ \mathcal{L}_0 & \mathfrak{M}_0 & m \\ P_0 & Q_0 & l \end{vmatrix}$$

s'annule (C. § 4), ou bien que l'on a :

$$(71)\qquad l(l\mathfrak{M}_0 - m\mathcal{L}_0) = m(lQ_0 - mP_0).$$

En effet, à cause des équations (69), on peut écrire :

$$\frac{\Theta}{l^2} = l\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{m}{l}\right) + \frac{2}{u+v}\frac{m}{l}\right] - m\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{m}{l}\right) - \frac{2}{u+v}\frac{m}{l}\right] - 2\frac{m}{l},$$

ou bien encore, d'après les formules (65) :

$$\frac{\Theta}{l^2} = \frac{V}{UW}\left[2U + 2V - 2W - (u+v)(U'+V')\right],$$

U', V' désignant les dérivées explicites de U, V par rapport à u, v respectivement. Mais, en opérant sur les valeurs effectives (66) de U, V, W, on vérifie de suite que l'on a :

$$(72)\qquad (u+v)(U'+V') = 2U + 2V - 2W;$$

donc en effet $\Theta = o$.

Après cela l'équation (70) reste :

$$(73)\qquad \frac{d\theta}{dv}\left(m\frac{\partial l}{\partial\theta}-l\frac{\partial m}{\partial\theta}\right)=(u+v)^2\rho\varphi(v)\,(l\,\mathfrak{M}_0-m\mathfrak{L}_0),$$

ou encore :

$$\frac{d\theta}{dv}=(u+v)^2\rho\varphi(v)\frac{l\frac{\partial m}{\partial u}-m\frac{\partial l}{\partial u}+\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\log\rho}{\partial u}+\frac{2}{u+v}\right)lm-\frac{1}{2}\frac{\partial\log\rho}{\partial v}m^2-m}{m\frac{\partial l}{\partial\theta}-l\frac{\partial m}{\partial\theta}}.$$

Écrivons-la sous la forme

$$\frac{d\theta}{dv}=\varphi(v)\frac{\left[\frac{(u+v)^2}{2}\frac{\partial\rho}{\partial u}+2(u+v)\rho\right]\frac{l}{m}-\frac{(u+v)^2}{2}\frac{\partial\rho}{\partial v}-(u+v)^2\rho\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{l}{m}\right)-\frac{(u+v)^2}{m}\rho}{\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{l}{m}\right)};$$

comme

$$\frac{l}{m}=\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{V}},\qquad \frac{u+v}{m}=\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{V}},$$

il vient :

$$\frac{d\theta}{dv}=\mathrm{V}\varphi(v)\frac{\left[\frac{(u+v)^2}{2}\frac{\partial\rho}{\partial u}+2(u+v)\rho\right]\mathrm{U}-(u+v)^2\rho\mathrm{U}'-\frac{(u+v)^2}{2}\frac{\partial\rho}{\partial v}\mathrm{V}-(u+v)\rho\mathrm{W}}{\mathrm{V}\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial\theta}-\mathrm{U}\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial\theta}}.$$

Or, à cause de la valeur (60) de ρ, on a :

$$abc\cdot\rho=\frac{b^2c^2(1+uv)^2+a^2c^2(u-v)^2+a^2b^2(1-uv)^2}{(u+v)^2},$$

$$\frac{abc}{2}\frac{\partial\rho}{\partial u}=\frac{b^2c^2v(1+uv)+a^2c^2(u-v)-a^2b^2v(1-uv)}{(u+v)^2}-\frac{abc}{u+v}\rho,$$

$$\frac{abc}{2}\frac{\partial\rho}{\partial v}=\frac{b^2c^2u(1+uv)-a^2c^2(u-v)-a^2b^2u(1-uv)}{(u+v)^2}-\frac{abc}{u+v}\rho,$$

et la valeur précédente de $\frac{d\theta}{dv}$, utilisant l'identité (72), se transforme dans la suivante :

$$\frac{d\theta}{dv} = \frac{V\varphi(v)}{abc} \frac{\mathfrak{T}}{V\frac{\partial U}{\partial\theta} - U\frac{\partial V}{\partial\theta}},$$

où l'on a posé :

$$\begin{aligned}\mathfrak{T} = &\left[b^2c^2(1+uv)^2 + a^2c^2(u-v)^2 + a^2b^2(1-uv)^2\right]\cdot\frac{V'-U'}{2}\\ &+\left[b^2c^2v(1-uv) + a^2c^2(u-v) - a^2b^2v(1-uv)\right].U\\ &-\left[b^2c^2u(1+uv) - a^2c^2(u-v) - a^2b^2u(1-uv)\right].V.\end{aligned}$$

Si l'on calcule cette expression de $\mathfrak{T}$ à l'aide des équations (66), on trouve facilement l'identité

$$\mathfrak{T} = \pm\frac{abc\cdot a'b'c'}{k}\left(V\frac{\partial U}{\partial\theta} - U\frac{\partial V}{\partial\theta}\right);$$

nous avons donc enfin la simple équation

$$\frac{d\theta}{dv} = \pm\frac{a'b'c'}{k}V\varphi(v). \tag{74}$$

Nous remarquons, car cela nous sera utile plus tard, qu'en la comparant à l'équation (73), il en résulte l'identité

$$\frac{1}{V}\left(l\mathfrak{M}_0 - m\mathfrak{L}_0\right) = \pm\frac{a'b'c'}{k(u+v)^2\rho}\left(m\frac{\partial l}{\partial\theta} - l\frac{\partial m}{\partial\theta}\right). \tag{75}$$

Revenons à l'équation (74), dans laquelle nous substituons pour V sa valeur (66_2); nous avons alors, pour la fonction inconnue $\theta(v)$, l'équation différentielle définitive :

$$\text{(II)}\quad \frac{d\theta}{dv} = \frac{\varphi(v)}{k}\left\{\begin{aligned}&(-acb' \mp a'c'b)\,2v\cos\theta + (bca' \pm b'c'a)(v^2-1)\sin\theta\\ &+(a'b'c \pm abc')(v^2+1)\end{aligned}\right\}.$$

§ 14.

LES TRANSFORMATIONS DES DÉFORMÉES GAUCHES DE L'HYPERBOLOÏDE.

Dans les calculs qu'on vient d'effectuer on a vu, comme au paragraphe 4 pour le paraboloïde, disparaître la variable u et en résulter l'équation différentielle pure en $\theta(v)$, qui régit ici la décomposition de la congruence Γ dans les ∞^1 réglées R_1 que nous cherchions. Cette équation fondamentale (II) a encore la forme de Riccati dans le paramètre

$$\lambda = \operatorname{tang} \frac{\theta}{2},$$

d'où dépendent rationnellement les coordonnées d'un point mobile sur la conique C. A ce point on peut répéter mot pour mot toutes les déductions que nous avons développées dans les paragraphes 5 et 6 pour les déformées gauches du paraboloïde. Nous nous dispenserons de cette répétition inutile. Mentionnons seulement ici les deux transformations singulières B_{-b^2}, B_{c^2}, qui correspondent aux valeurs extrêmes $k = -b^2$, $k = c^2$. Dans ces cas la congruence Γ devient celle engendrée par les tangentes de l'hyperbole focale

$$\frac{x^2}{a^2+b^2} - \frac{z^2}{b^2+c^2} = 1, \quad y = 0 \quad (k = -b^2),$$

ou bien de l'ellipse focale

$$\frac{x^2}{a^2+c^2} + \frac{y^2}{b^2+c^2} = 1, \quad z = 0 \quad (k = c^2),$$

lorsque ces coniques sont entraînées par l'hyperboloïde Q_0 dans son roulement sur la surface gauche applicable R.

Prenons encore le cas exclus $k = 0$, qui donne lieu aux mêmes considérations que pour le paraboloïde (§ 6). En effet si, adoptant les signes inférieurs, on fait $k = 0$ dans l'équation fondamentale (II), celle-ci, en calculant les vraies valeurs de ses coefficients, devient :

$$\frac{d\theta}{dv} = \frac{\varphi(v)}{2abc}\left\{\begin{array}{l}(b^2c^2 - a^2b^2 - a^2c^2)\,2v\cos\theta \\ \quad + (b^2c^2 + a^2b^2 - a^2c^2)\,(v^2 - 1)\sin\theta \\ \quad + (b^2c^2 + a^2b^2 + a^2c^2)\,(v^2 + 1)\end{array}\right\}.$$

D'ailleurs les équations (63), avec les signes inférieurs et pour $k = 0$, comparées aux formules (57), donnent

$$u = \frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta}.$$

Substituant dans l'équation précédente, on trouve facilement :

$$\frac{du}{dv} = \frac{\varphi(v)}{2abc}\left[b^2c^2(1 + uv)^2 + a^2c^2(u - v)^2 + a^2b^2(1 - uv^2)\right],$$

ce qui s'écrit encore

$$\frac{du}{dv} = -\frac{\Phi''}{2\Phi'};$$

c'est l'équation différentielle des asymptotiques curvilignes de R. Il faut donc encore ici (C. § 6) assembler les rayons de la congruence Γ le long des asymptotiques curvilignes de R : cela donne la décomposition de la congruence Γ dans les ∞^1 surfaces réglées R_1 applicables sur l'hyperboloïde. On peut considérer ces surfaces R_1 comme les transformées de R par la transformation B_0.

§ 15.

CALCUL DE L'ÉLÉMENT LINÉAIRE DES SURFACES TRANSFORMÉES R_1.

Nous avons maintenant à démontrer que chaque surface R_1, dérivée de la primitive R par une transformation B_k, est applicable sur le même hyperboloïde Q_0. Commençons donc par calculer l'élément linéaire ds_1^2 de R_1 :

$$ds_1^2 = \mathcal{E}_1\,du^2 + 2\,\mathcal{F}_1\,du\,dv + \mathcal{G}_1\,dv^2.$$

Bornons-nous à effectuer les calculs dans le cas des signes supérieurs, car l'hypothèse contraire reviendrait seulement à un changement de notation (C. § 8). En imitant l'analyse du paragraphe 7, nous avons d'abord :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial u} = \mathcal{L}_0 \dfrac{\partial x}{\partial u} + \mathcal{M}_0 \dfrac{\partial x}{\partial v} + \mathfrak{D}' m\,\mathrm{X}, \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v} = \mathrm{P}_0 \dfrac{\partial x}{\partial u} + \mathrm{Q}_0 \dfrac{\partial x}{\partial u} + \mathfrak{D}' l\,\mathrm{X} + \left(\dfrac{\partial l}{\partial \theta}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial m}{\partial \theta}\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)\dfrac{d\theta}{dv} + \mathfrak{D}'' m\,\mathrm{X}. \end{cases}$$

Dérivons les formules

$$\bar{x}_0 = x_0 + l\,\frac{\partial x_0}{\partial u} + m\,\frac{\partial x_0}{\partial v} \text{ etc.},$$

explicitement par rapport à u et v, ce qui donne :

$$(76) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial u} = \mathcal{L}_0 \dfrac{\partial x_0}{\partial u} + \mathcal{M}_0 \dfrac{\partial x_0}{\partial v} + \mathfrak{D}'_0 m\,\mathrm{X}_0, \\ \dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial v} = \mathrm{P}_0 \dfrac{\partial x_0}{\partial u} + \mathrm{Q}_0 \dfrac{\partial x_0}{\partial v} + \mathfrak{D}'_0 l\,\mathrm{X}_0. \end{cases}$$

IMPRIMERIE NATIONALE.

Posons encore :

$$\mathcal{E}_0 = S\left(\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial u}\right)^2, \qquad \mathcal{F}_0 = S\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial u}\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial v}, \qquad \mathcal{G}_0 = S\left(\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial v}\right)^2,$$

et nous aurons :

$$(77)\quad \begin{cases} \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_0, \\ \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_0 + \left[(\mathcal{E}\mathcal{L}_0 + \mathcal{F}\mathcal{M}_0)\frac{\partial l}{\partial \theta} + (\mathcal{F}\mathcal{L}_0 + \mathcal{G}\mathcal{M}_0)\frac{\partial m}{\partial \theta}\right]\frac{d\theta}{dv} + \mathfrak{D}'\mathfrak{D}'' m^2, \\ \mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_0 + 2\left[(\mathcal{E}\mathrm{P}_0 + \mathcal{F}\mathrm{Q}_0)\frac{\partial l}{\partial \theta} + (\mathcal{F}\mathrm{P}_0 + \mathcal{G}\mathrm{Q}_0)\frac{\partial m}{\partial \theta}\right]\frac{d\theta}{dv} + 2\mathfrak{D}'\mathfrak{D}'' lm \\ \qquad + \left[\mathcal{E}\left(\frac{\partial l}{\partial \theta}\right)^2 + 2\mathcal{F}\frac{\partial l}{\partial \theta}\frac{\partial m}{\partial \theta} + \mathcal{G}\left(\frac{\partial m}{\partial \theta}\right)^2\right]\left(\frac{d\theta}{dv}\right)^2 + \mathfrak{D}''^2 m^2. \end{cases}$$

Il résulte des équations (63) :

$$(78)\quad \begin{cases} \bar{x}_0 = \frac{a'}{c'}\sin\theta \bar{z}_0 + a'\cos\theta, \\ \bar{y}_0 = -\frac{b'}{c'}\cos\theta \bar{z}_0 + b'\sin\theta, \end{cases}$$

d'où l'on tire :

$$(79)\quad \begin{cases} \frac{\partial \bar{x}_0}{\partial u} = \frac{a'}{c'}\sin\theta\frac{\partial \bar{z}_0}{\partial u}, \qquad \frac{\partial \bar{x}_0}{\partial v} = \frac{a'}{c'}\sin\theta\frac{\partial \bar{z}_0}{\partial v}, \\ \frac{\partial \bar{y}_0}{\partial u} = -\frac{b'}{c'}\cos\theta\frac{\partial \bar{z}_0}{\partial u}, \qquad \frac{\partial \bar{y}_0}{\partial v} = -\frac{b'}{c'}\cos\theta\frac{\partial \bar{z}_0}{\partial v}. \end{cases}$$

En calculant $\bar{x}_0$, $\bar{y}_0$, $\bar{z}_0$ à l'aide des formules

$$(80)\qquad \bar{x}_0 = x_0 + l\frac{\partial x_0}{\partial u} + m\frac{\partial x_0}{\partial v}, \text{ etc.},$$

on a :

$$(81)\quad \begin{cases} \bar{x}_0 = \frac{2a}{W}\left[\frac{b}{b'}(1-uv)\cos\theta - \frac{bc}{b'c'}(u+v)\sin\theta + \frac{c}{c'}(u-v)\right], \\ \bar{y}_0 = \frac{2b}{W}\left[\frac{ac}{a'c'}(u+v)\cos\theta + \frac{a}{a'}(1-uv)\sin\theta - \frac{c}{c'}(1+uv)\right], \\ z_0 = \frac{2c}{W}\left[\frac{b}{b'}(1+uv)\cos\theta + \frac{a}{a'}(u-v)\sin\theta - \frac{ab}{a'b'}(u+v)\right]. \end{cases}$$

La dérivation de cette valeur de $\bar{z}_0$ donne facilement :

$$(82)\quad \frac{\partial \bar{z}_0}{\partial u} = -\frac{4abc}{a'b'}\frac{V}{W^2}, \qquad \frac{\partial \bar{z}_0}{\partial v} = -\frac{4abc}{a'b'}\frac{U}{W^2},$$

après quoi nous trouvons :

$$(83)\quad \begin{cases} \mathcal{E}_0 = \frac{16\,a^2b^2c^2}{a'^2b'^2c'^2}\left[a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta + c^2\right]\frac{V^2}{W^4}, \\ \mathcal{F}_0 = \frac{16\,a^2b^2c^2}{a'^2b'^2c'^2}\left[a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta + c^2\right]\frac{UV}{W^4}, \\ \mathcal{G}_0 = \frac{16\,a^2b^2c^2}{a'^2b'^2c'^2}\left[a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta + c^2\right]\frac{U^2}{W^4}. \end{cases}$$

Voilà calculés les premiers termes des expressions (77) de $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{G}_1$. Pour calculer les termes qui suivent, formons des équations (76) et (79) les sommes

$$S\frac{\partial x_0}{\partial u}\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial u}, \qquad S\frac{\partial x_0}{\partial v}\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial u}, \qquad S\frac{\partial x_0}{\partial u}\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial v}, \qquad S\frac{\partial x_0}{\partial v}\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial v};$$

on en déduit :

$$(84)\qquad \begin{cases} \mathcal{E}\mathcal{L}_0 + \mathcal{F}\mathcal{M}_0 = \dfrac{\partial \bar{z}_0}{\partial u}\left[\dfrac{a'}{c'}\sin\theta\dfrac{\partial x_0}{\partial u} - \dfrac{b'}{c'}\cos\theta\dfrac{\partial y_0}{\partial u} + \dfrac{\partial z_0}{\partial u}\right], \\ \mathcal{F}\mathcal{L}_0 + \mathcal{G}\mathcal{M}_0 = \dfrac{\partial \bar{z}_0}{\partial u}\left[\dfrac{a'}{c'}\sin\theta\dfrac{\partial x_0}{\partial v} - \dfrac{b'}{c'}\cos\theta\dfrac{\partial y_0}{\partial v} + \dfrac{\partial z_0}{\partial v}\right], \end{cases}$$

$$(84^*)\qquad \begin{cases} \mathcal{E}\mathrm{P}_0 + \mathcal{F}\mathrm{Q}_0 = \dfrac{\partial \bar{z}_0}{\partial v}\left[\dfrac{a'}{c'}\sin\theta\dfrac{\partial x_0}{\partial u} - \dfrac{b'}{c'}\cos\theta\dfrac{\partial y_0}{\partial u} + \dfrac{\partial z_0}{\partial u}\right], \\ \mathcal{F}\mathrm{P}_0 + \mathcal{G}\mathrm{Q}_0 = \dfrac{\partial \bar{z}_0}{\partial v}\left[\dfrac{a'}{c'}\sin\theta\dfrac{\partial x_0}{\partial v} - \dfrac{b'}{c'}\cos\theta\dfrac{\partial y_0}{\partial v} + \dfrac{\partial z_0}{\partial v}\right]. \end{cases}$$

Dérivons maintenant les équations (80) par rapport à θ, ce qui donne :

$$\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta} = \frac{\partial l}{\partial \theta}\frac{\partial x_0}{\partial u} + \frac{\partial m}{\partial \theta}\frac{\partial x}{\partial v}, \quad \text{etc.}$$

Multiplions les deux équations de chaque couple (84), (84*) par $\frac{\partial l}{\partial \theta}, \frac{\partial m}{\partial \theta}$; en sommant on a :

$$(85)\qquad \begin{cases} (\mathcal{E}\mathcal{L}_0 + \mathcal{F}\mathcal{M}_0)\dfrac{\partial l}{\partial \theta} + (\mathcal{F}\mathcal{L}_0 + \mathcal{G}\mathcal{M}_0)\dfrac{\partial m}{\partial \theta} = \dfrac{\partial z_0}{\partial u}\left[\dfrac{a'}{c'}\sin\theta\dfrac{\partial x_0}{\partial \theta} - \dfrac{b'}{c'}\cos\theta\dfrac{\partial y_0}{\partial \theta} + \dfrac{\partial z_0}{\partial \theta}\right], \\ (\mathcal{E}\mathrm{P}_0 + \mathcal{F}\mathrm{Q}_0)\dfrac{\partial l}{\partial \theta} + (\mathcal{F}\mathrm{P}_0 + \mathcal{G}\mathrm{Q}_0)\dfrac{\partial m}{\partial \theta} = \dfrac{\partial z_0}{\partial v}\left[\dfrac{a'}{c'}\sin\theta\dfrac{\partial x_0}{\partial \theta} - \dfrac{b'}{c'}\cos\theta\dfrac{\partial y_0}{\partial \theta} + \dfrac{\partial z_0}{\partial \theta}\right]. \end{cases}$$

Enfin, si l'on forme $\mathrm{S}\left(\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta}\right)^2$, il vient :

$$(86)\qquad \mathrm{S}\left(\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta}\right)^2 = \mathcal{E}\left(\frac{\partial l}{\partial \theta}\right)^2 + 2\mathcal{F}\frac{\partial l}{\partial \theta}\frac{\partial m}{\partial \theta} + \mathcal{G}\left(\frac{\partial m}{\partial \theta}\right)^2.$$

Les formules (83), (85) et (86) donnent les éléments nécessaires pour le calcul des expressions (77) de $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{G}_1$.

§ 16.

FORMULES D'APPLICABILITÉ DES SURFACES R_1 SUR L'HYPERBOLOÏDE.

Après ces préparatifs, nous allons constater que les surfaces R_1 sont applicables sur l'hyperboloïde Q_0; et nous vérifierons en même temps que la loi d'applicabilité entre R et R_1 se traduit encore par l'affinité d'Ivory entre les deux hyperboloïdes homofocaux Q_0, Q_k (C. § 8).

Au point $(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$ de Q_k correspond, dans l'affinité d'Ivory, le point (ξ, η, ζ) de Q_0 des coordonnées

$$\xi = \frac{a}{a'}\bar{x}_0, \qquad \eta = \frac{b}{b'}\bar{y}_0, \qquad \zeta = \frac{c}{c'}\bar{z}_0.$$

Soient u_1, v_1, les valeurs des coordonnées curvilignes u, v au point (ξ, η, ζ); à cause des équations (57) § 12, nous avons :

$$\frac{\bar{x}_0}{a'} = \frac{\xi}{a} = \frac{1 + u_1 v_1}{u_1 + v_1}, \qquad \frac{\bar{y}_0}{b'} = \frac{\eta}{b} = \frac{u_1 - v_1}{u_1 + v_1}, \qquad \frac{z_0}{c'} = \frac{\zeta}{c} = \frac{1 - u_1 v_1}{u_1 + v_1},$$

et par suite :

$$u_1 = \frac{1 + \frac{\bar{y}_0}{b'}}{\frac{\bar{x}_0}{a'} + \frac{\bar{z}_0}{c'}}, \qquad v_1 = \frac{1 - \frac{\bar{y}_0}{b'}}{\frac{\bar{x}_0}{a'} + \frac{\bar{z}_0}{c'}},$$

ou, en ayant recours aux équations (78) :

$$(86^*) \qquad u_1 = \frac{1 + \sin\theta - \cos\theta \frac{\bar{z}_0}{c'}}{\cos\theta + (1 + \sin\theta)\frac{\bar{z}_0}{c'}}, \qquad v_1 = \frac{1 - \sin\theta + \cos\theta \frac{\bar{z}_0}{c'}}{\cos\theta + (1 + \sin\theta)\frac{\bar{z}_0}{c'}},$$

La substitution dans ces formules de la valeur (81) de $\bar{z}_0$ donne, après des réductions évidentes :

$$(87)\quad \begin{cases} u_1 = \dfrac{\dfrac{b}{b'}\left[\dfrac{a}{a'}(1-uv)-\dfrac{c}{c'}(1+uv)\right]\cdot(1+\sin\theta)+\dfrac{ac}{a'c'}\left[u-v+\dfrac{b}{b'}(u+v)\right]\cos\theta}{\dfrac{b}{b'}\left[\dfrac{a}{a'}(1-uv)+\dfrac{c}{c'}(1+uv)\right]\cos\theta+\dfrac{ac}{a'c'}\left[u-v-\dfrac{b}{b'}(u+v)\right]\cdot(1+\sin\theta)}, \\ v_1 = \dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta}. \end{cases}$$

Ce sont là, nous allons le vérifier, les formules d'applicabilité de R_1 sur Q_0. On voit que v_1 dépend de v seule (ainsi qu'il devait être) et il convient d'écrire aussi les formules

$$(88)\qquad v_1^2 = \frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta},\qquad \cos\theta = \frac{2v_1}{1+v_1^2},\qquad \sin\theta = \frac{1-v_1^2}{1+v_1^2}.$$

Nous devons donc vérifier que le ds_1^2 de R_1

$$ds_1^2 = \mathcal{E}_1\,du^2 + 2\mathcal{F}_1\,du\,dv + \mathcal{G}_1\,dv^2,$$

où $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{G}_1$ ont les valeurs (77), se transforme en coordonnées u_1, v_1 dans

$$\overline{ds}_1^2 = \overline{\mathcal{E}}_1\,du_1^2 + 2\overline{\mathcal{F}}_1\,du_1\,dv_1 + \overline{\mathcal{G}}_1\,dv_1^2,$$

où, d'après les formules (58) § 12, $\overline{\mathcal{E}}_1$, $\overline{\mathcal{F}}_1$, $\overline{\mathcal{G}}_1$ auront les valeurs suivantes :

$$(89)\quad \begin{cases} \overline{\mathcal{E}}_1 = \dfrac{(a^2+c^2)\,v_1^4 + 2\,(c^2-a^2+2b^2)\,v_1^2 + a^2+c^2}{(u_1+v_1)^4}, \\ \overline{\mathcal{F}}_1 = \dfrac{(a^2+c^2)\,u_1^2v_1^2 + (c^2-a^2)\,(u_1^2+v_1^2) - 4b^2u_1v_1 + a^2+c^2}{(u_1+v_1)^4}, \\ \overline{\mathcal{G}}_1 = \dfrac{(a^2+c^2)\,u_1^4 + 2\,(c^2-a^2+2b^2)\,u_1^2 + a^2+c^2}{(u_1+v_1)^4}. \end{cases}$$

L'identité à démontrer $ds_1^2 = \overline{ds}_1^2$ se résout dans les trois équations suivantes :

$$(90)\quad \begin{cases} \mathcal{E}_1 = \overline{\mathcal{E}}_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2, \quad \mathcal{F}_1 = \overline{\mathcal{E}}_1 \frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial u_1}{\partial v} + \left(\overline{\mathcal{E}}_1 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \overline{\mathcal{F}}_1 \frac{\partial v_1}{\partial \theta}\right)\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{d\theta}{dv}, \\ \mathcal{G}_1 = \overline{\mathcal{E}}_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)^2 + 2\left(\overline{\mathcal{E}}_1 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \overline{\mathcal{F}}_1 \frac{\partial v_1}{\partial \theta}\right)\frac{\partial u_1}{\partial v}\frac{d\theta}{dv} \\ \qquad + \left[\overline{\mathcal{E}}_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial \theta}\right)^2 + 2\overline{\mathcal{F}}_1 \frac{\partial u_1}{\partial \theta}\frac{\partial v_1}{\partial \theta} + \overline{\mathcal{G}}_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial \theta}\right)^2\right]\left(\frac{d\theta}{dv}\right)^2. \end{cases}$$

Pour calculer $\frac{\partial u_1}{\partial u}$, $\frac{\partial u_1}{\partial v}$, écrivons les formules (87) sous la forme

$$(91)\qquad u_1 = \frac{\Phi}{\Psi}, \qquad u_1 + v_1 = \frac{W}{\Psi}, \qquad v_1 = \frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta},$$

en introduisant les deux nouvelles quantités Φ, Ψ par les équations

$$(92)\quad \begin{cases} \Phi = \frac{b}{b'}\left[\frac{a}{a'}(1 - uv) - \frac{c}{c'}(1 + uv)\right](1 + \sin\theta) + \frac{ac}{a'c'}\left[u - v + \frac{b}{b'}(u + v)\right]\cos\theta, \\ \Psi = \frac{b}{b'}\left[\frac{a}{a'}(1 - uv) + \frac{c}{c'}(1 + uv)\right]\cos\theta + \frac{ac}{a'c'}\left[u - v - \frac{b}{b'}(u + v)\right](1 + \sin\theta). \end{cases}$$

En calculant d'ici $\frac{\partial u_1}{\partial u}$, $\frac{\partial u_1}{\partial v}$, ou bien ayant recours à la formule (86*) qui donne u_1 en fonction linéaire de $\bar{z}_0$ et aux équations (82), on trouve:

$$(93)\qquad \frac{\partial u_1}{\partial u} = \frac{2abc}{a'b'c'}\frac{1 + \sin\theta}{\Psi^2}\cdot V, \qquad \frac{\partial u_1}{\partial v} = \frac{2abc}{a'b'c'}\frac{1 + \sin\theta}{\Psi^2}\cdot U.$$

Écrivons maintenant le numérateur de l'expression (89_1) de $\overline{\mathcal{E}}_1$ sous la forme

$$(a^2 + c^2)(v_1^2 + 1)^2 + 4b^2 v_1^2 - 4a^2 v_1^2;$$

en y substituant la valeur (88) de v_1^2, nous trouvons :

$$(93^*) \qquad \bar{\mathcal{E}}_1 = \frac{4}{(1+\sin\theta)^2}(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta + c^2)\frac{\Psi^4}{W^4},$$

et par suite, à cause des équations (93) :

$$\bar{\mathcal{E}}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2 = \frac{16\,a^2b^2c^2}{a'^2b'^2c'^2}\left(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta + c^2\right)\frac{V^2}{W^4} = \mathcal{E}_0,$$

et de même :

$$\bar{\mathcal{E}}_1\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial u_1}{\partial v} = \mathcal{F}_0, \qquad \bar{\mathcal{E}}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)^2 = \mathcal{G}_0.$$

Aussi donc les deux valeurs (77) et (90) pour $\mathcal{E}_1$ coïncident en effet, et les équations qui nous restent à démontrer se réduisent aux deux suivantes :

$$(94) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left(\bar{\mathcal{E}}_1\frac{\partial u_1}{\partial\theta} + \bar{\mathcal{F}}_1\frac{\partial v_1}{\partial\theta}\right)\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{d\theta}{dv} \\ &= \left[(\mathcal{E}\mathfrak{L}_0 + \mathcal{F}\mathfrak{M}_0)\frac{\partial l}{\partial\theta} + (\mathcal{F}\mathfrak{L}_0 + \mathcal{G}\mathfrak{M}_0)\frac{\partial m}{\partial\theta}\right]\frac{d\theta}{dv} + \mathfrak{D}'\mathfrak{D}''m^2, \end{aligned} \right.$$

$$(95) \quad \left\{ \begin{aligned} &2\left(\bar{\mathcal{E}}_1\frac{\partial u_1}{\partial\theta} + \bar{\mathcal{F}}_1\frac{\partial v_1}{\partial\theta}\right)\frac{\partial v_1}{\partial v}\frac{d\theta}{dv} + \left[\bar{\mathcal{E}}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial\theta}\right)^2 + 2\bar{\mathcal{F}}_1\frac{\partial u_1}{\partial\theta}\frac{\partial v_1}{\partial\theta} + \mathcal{G}_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial\theta}\right)^2\right]\left(\frac{d\theta}{dv}\right)^2 \\ &\qquad = 2\left[(\mathcal{E}\mathrm{P}_0 + \mathcal{F}\mathrm{Q}_0)\frac{\partial l}{\partial\theta} + (\mathcal{F}\mathrm{P}_0 + \mathcal{G}\mathrm{Q}_0)\frac{\partial m}{\partial\theta}\right]\frac{d\theta}{dv} + 2\mathfrak{D}'\mathfrak{D}''lm \\ &\qquad + \left[\mathcal{E}\left(\frac{\partial l}{\partial\theta}\right)^2 + 2\mathcal{F}\frac{\partial l}{\partial\theta}\frac{\partial m}{\partial\theta} + \mathcal{G}\left(\frac{\partial m}{\partial\theta}\right)^2\right]\left(\frac{d\theta}{dv}\right)^2 + \mathfrak{D}''^2m^2. \end{aligned} \right.$$

§ 17.

DÉMONSTRATION DE L'IDENTITÉ (94).

Si l'on substitue dans l'équation (94) les valeurs (67) de $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$ et la valeur (85_1) de la quantité

$$(\mathcal{E}\mathfrak{L}_0+\mathcal{F}\mathfrak{M}_0)\frac{\partial l}{\partial\theta}+(\mathcal{F}\mathfrak{L}_0+\mathcal{G}\mathfrak{M}_0)\frac{\partial m}{\partial\theta},$$

puis qu'on la divise par

$$\frac{d\theta}{dv}=\frac{a'b'c'}{k}\,\mathrm{V}\varphi(v),$$

elle devient :

$$\left(\overline{\mathcal{E}}_1\frac{\partial u_1}{\partial\theta}+\overline{\mathcal{F}}_1\frac{\partial v_1}{\partial\theta}\right)\frac{\partial u_1}{\partial u}=\left(\frac{a'}{c'}\sin\theta\frac{\partial\overline{x}_0}{\partial\theta}-\frac{b'}{c'}\cos\theta\frac{\partial\overline{y}_0}{\partial\theta}+\frac{\partial\overline{z}_0}{\partial\theta}\right)\frac{\partial\overline{z}_0}{\partial u}-4k\frac{abc}{a'b'c'}\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{W}^2}.$$

D'après les valeurs (82) et (93) de $\frac{\partial\overline{z}_0}{\partial u}$, $\frac{\partial u_1}{\partial u}$, divisant encore par

$$\frac{2abc}{a'b'c'}\frac{\mathrm{V}}{\Psi^2},$$

on la transforme dans l'autre :

$$(96)\quad\left(1+\sin\theta\right)\left(\overline{\mathcal{E}}_1\frac{\partial u_1}{\partial\theta}+\overline{\mathcal{F}}_1\frac{\partial v_1}{\partial\theta}\right)+\frac{2\Psi^2}{\mathrm{W}^2}\left(a'\sin\theta\frac{\partial\overline{x}_0}{\partial\theta}-b'\cos\theta\frac{\partial\overline{y}_0}{\partial\theta}+c'\frac{\partial\overline{z}_0}{\partial\theta}+k\right)=0.$$

Or on a (93*) :

$$\overline{\mathcal{E}}_1=\frac{4}{(1+\sin\theta)^2}\left(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta+c^2\right)\frac{\Psi^4}{\mathrm{W}^4},$$

IMPRIMERIE NATIONALE.

et l'équation (91) donne d'ailleurs :

$$\frac{\partial u_1}{\partial \theta} = \frac{\Psi \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}}{\Psi^2}.$$

Par le calcul effectif, d'après les équations (92), on trouve :

$$\Psi \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}$$

$$= (1+\sin\theta)\left[\frac{a^2b^2}{a'^2b'^2}(1-uv)^2 - \frac{b^2c^2}{b'^2c'^2}(1+uv)^2 - \frac{a^2c^2}{a'^2c'^2}(u-v)^2 + \frac{a^2b^2c^2}{a'^2b'^2c'^2}(u+v)^2\right],$$

et, comme

$$a'^2 = a^2 + k, \qquad b'^2 = b^2 + k, \qquad c'^2 = c^2 - k,$$

on a identiquement :

$$(96^*) \quad \left\{ \begin{aligned} & a^2b^2c'^2(1-uv)^2 - b^2c^2a'^2(1+uv)^2 - a^2c^2b'^2(u-v)^2 \\ & \qquad + a^2b^2c^2(u+v)^2 = -k\left[b^2c^2(1+uv)^2\right. \\ & \qquad \left. + a^2c^2(u-v)^2 + a^2b^2(1-uv)^2\right]; \end{aligned} \right.$$

il reste donc :

$$\frac{\partial u_1}{\partial \theta} = -\frac{k(1+\sin\theta)}{a'^2b'^2c'^2\Psi^2}\left[b^2c^2(1+uv)^2 + a^2c^2(u-v)^2 + a^2b^2(1-uv)^2\right].$$

Prenons maintenant la valeur (89_2) de $\overline{\mathcal{F}}_1$:

$$\overline{\mathcal{F}}_1 = \frac{(a^2+c^2)\Phi^2v_1^2 + (c^2-a^2)(\Phi^2+v_1^2\Psi^2) + (a^2+c^2)\Psi^2 - 4b^2v_1\Phi\Psi}{W^4} \cdot \Psi^2,$$

dans laquelle nous substituons :

$$v_1 = \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}, \qquad v_1^2 - 1 = -\frac{2\sin\theta}{1+\sin\theta}, \qquad v_1^2 + 1 = \frac{2}{1+\sin\theta},$$

ce qui donne :

$$\overline{\mathcal{F}}_1 = 2\left[\frac{c^2 - a^2\sin^2\theta}{1+\sin\theta}\Phi^2 + \frac{c^2 + a^2\sin^2\theta}{1+\sin\theta}\Psi^2 - 2b^2\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}\Phi\Psi\right]\cdot\frac{\Psi^2}{W^4},$$

et remarquons enfin que l'on a :

$$\frac{dv_1}{d\theta} = -\frac{1}{1+\sin\theta}.$$

D'après toutes ces formules, l'équation (96) que nous avons à vérifier, divisée encore par $\frac{2\Psi^2}{W^2}$, devient :

$$(97)\left\{\begin{array}{l} \frac{2k}{a'^2b'^2c'^2}(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta + c^2)\left[b^2c^2(1+uv)^2 + a^2c^2(u-v)^2 + a^2b^2(1-uv)^2\right] \\ + \frac{c^2 - a^2\sin^2\theta}{1+\sin\theta}\Phi^2 + \frac{c^2 + a^2\sin^2\theta}{1+\sin\theta}\Psi^2 - 2b^2\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}\Phi\Psi - kW^2 \\ - W^2\left[a'\sin\theta\frac{\partial\overline{x}_0}{\partial\theta} - b'\cos\theta\frac{\partial\overline{y}_0}{\partial\theta} + c'\frac{\partial\overline{z}_0}{\partial\theta}\right] = 0. \end{array}\right.$$

Formons maintenant des équations (92) les trois suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\Phi^2}{1+\sin\theta} &= \frac{b^2}{b'^2}\left[\frac{a}{a'}(1-uv) - \frac{c}{c'}(1+uv)\right]^2\cdot(1+\sin\theta) \\ &+ \frac{a^2c^2}{a'^2c'^2}\left[u - v + \frac{b}{b'}(u+v)\right]^2\cdot(1-\sin\theta) \\ &+ 2\frac{abc}{a'b'c'}\left[\frac{a}{a'}(1-uv) - \frac{c}{c'}(1+uv)\right]\cdot\left[u - v + \frac{b}{b'}(u+v)\right]\cdot\cos\theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\Psi^2}{1+\sin\theta} &= \frac{b^2}{b'^2}\left[\frac{a}{a'}(1-uv) + \frac{c}{c'}(1+uv)\right]^2\cdot(1-\sin\theta) \\ &+ \frac{a^2c^2}{a'^2c'^2}\left[u - v - \frac{b}{b'}(u+v)\right]^2\cdot(1+\sin\theta) \\ &+ 2\frac{abc}{a'b'c'}\left[\frac{a}{a'}(1-uv) + \frac{c}{c'}(1+uv)\right]\cdot\left[u - v - \frac{b}{b'}(u+v)\right]\cdot\cos\theta, \end{aligned}$$

$$\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}\Psi\Phi=\left[\frac{a^2b^2}{a'^2b'^2}(1-uv)^2+\frac{a^2c^2}{a'^2c'^2}(u-v)^2\right.$$

$$\left.-\frac{b^2c^2}{b'^2c'^2}(1+uv)^2-\frac{a^2b^2c^2}{a'^2b'^2c'^2}(u+v)^2\right]\cos^2\theta$$

$$-2\frac{abc}{a'b'c'}\left[\frac{ab}{a'b'}(1-uv)(u+v)+\frac{c}{c'}(u-v)(1+uv)\right]\cdot\sin\theta\cos\theta$$

$$+2\frac{abc}{a'b'c'}\left[\frac{a}{a'}(u-v)(1-uv)+\frac{bc}{b'c'}(u+v)(1+uv)\right]\cdot\cos\theta.$$

Il nous faut calculer encore les valeurs des trois dérivées

$$\frac{\partial\bar{x}_0}{\partial\theta},\qquad\frac{\partial\bar{y}_0}{\partial\theta},\qquad\frac{\partial\bar{z}_0}{\partial\theta};$$

les formules (81) donnent :

$$(98)\quad\left\{\begin{aligned}
W^2\frac{\partial\bar{x}_0}{\partial\theta}&=4a\left\{\left[\frac{bc^2}{b'c'^2}(u-v)(1+uv)-\frac{ab^2c}{a'b'^2c'}(u+v)(1-uv)\right]\cos\theta\right.\\
&\qquad+\left[\frac{ac^2}{a'c'^2}(u-v)^2-\frac{ab^2}{a'b'^2}(1-uv)^2\right]\sin\theta\\
&\qquad\left.+\frac{b^2c}{b'^2c'}(1-u^2v^2)-\frac{abc^2}{a'b'c'^2}(u^2-v^2)\right\},\\
W^2\frac{\partial\bar{y}_0}{\partial\theta}&=4b\left\{\left[\frac{a^2b}{a'^2b'}(1-uv)^2-\frac{bc^2}{b'c'^2}(1+uv)^2\right]\cos\theta\right.\\
&\qquad-\left[\frac{a^2bc}{a'^2b'c'}(u+v)(1-uv)+\frac{ac^2}{a'c'^2}(u-v)(1+uv)\right]\sin\theta\\
&\qquad\left.+\frac{abc^2}{a'b'c'^2}(u+v)(1+uv)+\frac{a^2c}{a'^2c'}(u-v)(1-uv)\right\},\\
W^2\frac{\partial\bar{z}_0}{\partial\theta}&=4c\left\{\left[\frac{a^2b}{a'^2b'}(u-v)(1-uv)-\frac{ab^2c}{a'b'^2c'}(u+v)(1+uv)\right]\cos\theta\right.\\
&\qquad-\left[\frac{a^2bc}{a'^2b'c'}(u^2-v^2)+\frac{ab^2}{a'b'^2}(1-u^2v^2)\right]\sin\theta\\
&\qquad\left.+\frac{b^2c}{b'^2c'}(1+uv)^2+\frac{a^2c}{a'^2c'}(u-v)^2\right\},
\end{aligned}\right.$$

et enfin nous avons :

$$(98^*)\quad \left\{\begin{aligned} W^2 = 4\Big\{ &\frac{a^2c^2}{a'^2c'^2}(u-v)^2\cos^2\theta + \frac{b^2c^2}{b'^2c'^2}(1+uv)^2\sin^2\theta \\ &+ \frac{a^2b^2}{a'^2b'^2}(1-uv)^2 - 2\frac{abc^2}{a'b'c'^2}(u-v)(1+uv)\sin\theta\cos\theta \\ &+ 2\frac{a^2bc}{a'^2b'c'}(u-v)(1-uv)\cos\theta - 2\frac{ab^2c}{a'b'^2c'}(1-u^2v^2)\sin\theta\Big\}. \end{aligned}\right.$$

Substituant toutes ces valeurs dans le premier membre de l'équation (97), que nous désignerons par Ω, en ordonnant cette expression Ω par rapport à $\sin\theta$, $\cos\theta$, on voit qu'elle a la forme

$$\Omega = A\sin^2\theta + B\cos^2\theta + C\sin\theta\cos\theta + D\sin\theta + E\cos\theta + F.$$

Le calcul effectif, dans lequel on utilisera l'identité (96*), donne sans peine les valeurs suivantes pour les coefficients :

$$C = D = E = 0,$$

$$A = B = -F = 4k\left[\frac{a^2b^2}{a'^2b'^2}(1-uv)^2 - \frac{a^2c^2}{a'^2c'^2}(u-v)^2 - \frac{b^2c^2}{b'^2c'^2}(1+uv)^2\right].$$

On a donc effectivement $\Omega = 0$ et l'équation (94) est bien une identité. C.q.f.d.

§ 18.

DÉMONSTRATION DE L'IDENTITÉ (95).

L'identité (94) étant démontrée, remarquons que, à cause des relations (§§ 15, 16)

$$\frac{l}{m} = \frac{U}{V} = \frac{\dfrac{\partial u_1}{\partial v}}{\dfrac{\partial u_1}{\partial u}} = \frac{(\mathcal{E}P_0 + \mathcal{F}Q_0)\dfrac{\partial l}{\partial\theta} + (\mathcal{F}P_0 + \mathcal{G}Q_0)\dfrac{\partial m}{\partial\theta}}{(\mathcal{E}\mathcal{L}_0 + \mathcal{F}\mathfrak{M}_0)\dfrac{\partial l}{\partial\theta} + (\mathcal{F}\mathcal{L}_0 + \mathcal{G}\mathfrak{M}_0)\dfrac{\partial m}{\partial\theta}},$$

il en résulte aussi :

$$\left(\overline{\mathcal{E}}_1\frac{\partial u_1}{\partial\theta}+\overline{\mathcal{F}}_1\frac{\partial v_1}{\partial\theta}\right)\frac{\partial u_1}{\partial v}\frac{d\theta}{dv}=\left[(\mathcal{E}P_0+\mathcal{F}Q_0)\frac{\partial l}{\partial\theta}+(\mathcal{F}Q_0+\mathcal{G}Q_0)\frac{\partial m}{\partial\theta}\right]\frac{d\theta}{dv}+\mathfrak{D}'\mathfrak{D}''lm.$$

L'équation (95) se réduit après cela à la suivante :

$$\left[\overline{\mathcal{E}}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial\theta}\right)^2+2\overline{\mathcal{F}}_1\frac{\partial u_1}{\partial\theta}\frac{\partial v_1}{\partial\theta}+\overline{\mathcal{G}}_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial\theta}\right)^2\right]\left(\frac{d\theta}{dv}\right)^2$$
$$=\mathcal{E}\left(\frac{\partial l}{\partial\theta}\right)^2+2\mathcal{F}\frac{\partial l}{\partial\theta}\frac{\partial m}{\partial\theta}+\mathcal{G}\left(\frac{\partial m}{\partial\theta}\right)^2\left]\left(\frac{d\theta}{dv}\right)^2+\mathfrak{D}''^2m^2.\right.$$

Si on la divise par

$$\left(\frac{d\theta}{dv}\right)^2=\frac{a'^2b'^2c'^2V^2\varphi^2(v)}{k^2},$$

en remarquant que l'on a :

$$\begin{cases}\mathfrak{D}''^2=(\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2)(u+v)^4\varphi^2(v)=4\dfrac{b^2c^2(1+uv)^2+a^2c^2(u-v)^2+a^2b^2(1-uv)^2}{(u+v)^2}\varphi^2(v)\\ m^2=(u+v)^2\dfrac{V^2}{W^2},\end{cases}$$

on obtient, d'après l'équation (86) :

$$\overline{\mathcal{E}}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial\theta}\right)^2+2\overline{\mathcal{F}}_1\frac{\partial u_1}{\partial\theta}\frac{\partial v_1}{\partial\theta}+\overline{\mathcal{G}}_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial\theta}\right)^2=S\left(\frac{\partial\overline{x}_0}{\partial\theta}\right)^2$$
$$+\frac{4k^2}{a'^2b'^2c'^2W^2}\left[b^2c^2(1+uv)^2+a^2c^2(u-v)^2+a^2b^2(1-uv)^2\right].$$

Mais il résulte de la manière même dont on a calculé au paragraphe 16 u_1 et v_1 que l'on a :

$$S\left(\frac{\partial\xi}{\partial\theta}\right)^2=\overline{\mathcal{E}}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial\theta}\right)^2+2\overline{\mathcal{F}}_1\frac{\partial u_1}{\partial\theta}\frac{\partial v_1}{\partial\theta}+\overline{\mathcal{G}}_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial\theta}\right)^2=\frac{a^2}{a'^2}\left(\frac{\partial\overline{x}_0}{\partial\theta}\right)^2+\frac{b^2}{b'^2}\left(\frac{\partial\overline{y}_0}{\partial\theta}\right)^2+\frac{c^2}{c'^2}\left(\frac{\partial\overline{z}_0}{\partial\theta}\right)^2;$$

l'équation à vérifier devient donc :

$$\left(1-\frac{a^2}{a'^2}\right)\left(\frac{\partial\bar{x}_0}{\partial\theta}\right)^2+\left(1-\frac{b^2}{b'^2}\right)\left(\frac{\partial\bar{y}_0}{\partial\theta}\right)^2+\left(1-\frac{c^2}{c'^2}\right)\left(\frac{\partial\bar{z}_0}{\partial\theta}\right)^2$$
$$+\frac{4k^2}{a'^2b'^2c'^2W^2}\left[b^2c^2(1+uv)^2+a^2c^2(u-v)^2+a^2b^2(1-uv)^2\right]=0,$$

ou encore, en réduisant et divisant par k :

$$(99)\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{a'^2}\left(\frac{\partial\bar{x}_0}{\partial\theta}\right)^2+\frac{1}{b'^2}\left(\frac{\partial\bar{y}_0}{\partial\theta}\right)^2-\frac{1}{c'^2}\left(\frac{\partial\bar{z}_0}{\partial\theta}\right)^2\\ \qquad+\frac{4k}{a'^2b'^2c'^2W^2}\left[b^2c^2(1+uv)^2+a^2c^2(u-v)^2+a^2b^2(1-uv)^2\right]=0.\end{array}\right.$$

Or, si l'on dérive par rapport à θ les équations (78) § 15, on trouve :

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{a'}\frac{\partial\bar{x}_0}{\partial\theta}=\frac{1}{c'}\sin\theta\frac{\partial\bar{z}_0}{\partial\theta}+\frac{1}{c'}\cos\theta\cdot\bar{z}_0-\sin\theta,\\ \frac{1}{b'}\frac{\partial\bar{y}_0}{\partial\theta}=-\frac{1}{c'}\cos\theta\frac{\partial\bar{z}_0}{\partial\theta}+\frac{1}{c'}\sin\theta\cdot\bar{z}_0+\cos\theta,\end{array}\right.$$

d'où :

$$\frac{1}{a'^2}\left(\frac{\partial\bar{x}_0}{\partial\theta}\right)^2+\frac{1}{b'^2}\left(\frac{\partial\bar{y}_0}{\partial\theta}\right)^2-\frac{1}{c'^2}\left(\frac{\partial\bar{z}_0}{\partial\theta}\right)^2=\frac{\bar{z}_0^2}{c'^2}-\frac{2}{c'}\frac{\partial\bar{z}_0}{\partial\theta}+1.$$

L'équation (99) devient donc :

$$\frac{4k}{a'^2b'^2c'^2}\left[b^2c^2(1+uv)^2+a^2c^2(u-v)^2+a^2b^2(1-uv)^2\right]$$
$$-\frac{2W^2}{c'}\frac{\partial\bar{z}_0}{\partial\theta}+\frac{W^2}{c'^2}\bar{z}_0^2+W^2=0.$$

En substituant ici pour $\bar{z}_0$, $\frac{\partial\bar{z}_0}{\partial\theta}$, W^2 leurs valeurs (81), (98) et (98*), le premier membre de cette équation devient une expres-

sion comme la Ω du paragraphe précédent. On vérifie de suite qu'elle est identiquement nulle.

Toutes les vérifications sont maintenant accomplies et nous en concluons :

Les surfaces réglées R_1 *que les transformations* B_k *font dériver d'une déformée réglée de l'hyperboloïde sont toutes applicables sur cet hyperboloïde.*

La même démonstration que nous avons donnée à la fin du paragraphe 9 prouve en outre encore que les deux surfaces réglées R et R_1 sont applicables l'une sur l'autre *par déformation continue.*

§ 19.

RELATION RÉCIPROQUE ENTRE R ET R_1.

Il nous reste encore à démontrer, pour le cas actuel de l'hyperboloïde, les propositions analogues à celles établies aux paragraphes 10 et 11 pour les déformées gauches du paraboloïde.

Procédons de la même manière, utilisant le théorème d'Ivory et l'autre proposition élémentaire du paragraphe 10, qui subsistent encore ici. En adoptant les mêmes notations, soient g_1, g_2, deux génératrices quelconques de l'hyperboloïde Q_0, et soient $\bar{g}_1$, $\bar{g}_2$, leurs correspondantes, dans l'affinité d'Ivory, sur l'hyperboloïde homofocal Q_k. Établissons une correspondance entre leurs points M_1 et M_2 et $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$, comme au paragraphe 10.

Supposons, d'abord, que les deux droites g_1, g_2 appartiennent à un même système, par exemple au premier, et soient leurs équations :

$$g_1 \begin{cases} x_1 = \frac{a}{c}\sin\theta_1 \cdot z_1 + a\cos\theta_1, \\ y_1 = -\frac{b}{c}\cos\theta_1 \cdot z_1 + b\sin\theta_1, \end{cases} \qquad g_2 \begin{cases} x_2 = \frac{a}{c}\sin\theta_2 \cdot z_2 + a\cos\theta_2, \\ y_2 = -\frac{b}{c}\cos\theta_2 \cdot z_2 + b\sin\theta_2. \end{cases}$$

Les équations de leurs correspondantes $\bar{g}_1$, $\bar{g}_2$ dans l'affinité d'Ivory s'écriront :

$$\bar{g}_1\begin{cases}\bar{x}_1 = a'\sin\theta_1\cdot\frac{z_1}{c}+a'\cos\theta_1,\\ \bar{y}_1 = -b'\cos\theta_1\cdot\frac{z_1}{c}+b'\sin\theta_1,\\ \bar{z}_1 = c'\cdot\frac{z_1}{c},\end{cases}\qquad \bar{g}_2\begin{cases}\bar{x}_2 = a'\sin\theta_2\cdot\frac{z_2}{c}+a'\cos\theta_2,\\ \bar{y}_2 = -b'\cos\theta_2\cdot\frac{z_2}{c}+b'\sin\theta_2,\\ \bar{z}_2 = c'\cdot\frac{z_2}{c}.\end{cases}$$

Cherchons maintenant, comme au paragraphe 11, les coefficients α, β, γ d'un mouvement invariable qui superpose la couple $(g_1, \bar{g}_2)$ et leurs points M_1, $\overline{M}_2$ sur la couple $(\bar{g}_1, g_2)$ et leurs points $\overline{M}_1$, M_2. Posons :

$$\begin{aligned}\Delta = {} & (acb'+a'c'b)\cos\theta_1\cos\theta_2\\ & +(ab'c'+a'bc)\sin\theta_1\sin\theta_2-(abc'+a'b'c);\end{aligned}$$

on trouve alors pour les valeurs des coefficients α, β, γ (C. § 11), les formules suivantes :

$$\begin{cases}\Delta\alpha_1 = (abc'+a'b'c)\cos\theta_1\cos\theta_2+(abc+a'b'c')\sin\theta_1\sin\theta_2\\ \qquad\qquad -(acb'+a'c'b),\\ \Delta\alpha_2 = k(c\cos\theta_1\sin\theta_2-c'\cos\theta_2\sin\theta_1),\\ \Delta\alpha_3 = k(b\sin\theta_2-b'\sin\theta_1),\end{cases}$$

$$\begin{cases}\Delta\beta_1 = k(c\cos\theta_2\sin\theta_1-c'\cos\theta_1\sin\theta_2),\\ \Delta\beta_2 = (abc+a'b'c')\cos\theta_1\cos\theta_2+(abc'+a'b'c)\sin\theta_1\sin\theta_2\\ \qquad\qquad -(ab'c'+a'bc),\\ \Delta\beta_3 = k(a'\cos\theta_1-a\cos\theta_2),\end{cases}$$

IMPRIMERIE NATIONALE.

$$\begin{cases} \Delta\gamma_1 = k\,(b\sin\theta_1 - b'\sin\theta_2), \\ \Delta\gamma_2 = k\,(a'\cos\theta_2 - a\cos\theta_1), \\ \Delta\gamma_3 = (ab'c' + a'bc)\cos\theta_1\cos\theta_2 + (acb' + a'c'b)\sin\theta_1\sin\theta_2 \\ \qquad\qquad - (abc + a'b'c'), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta\alpha = k\,(bc'\cos\theta_2 - b'c\cos\theta_1), \\ \Delta\beta = k\,(ac'\sin\theta_2 - a'c\sin\theta_1), \\ \Delta\gamma = k\,(ab'\cos\theta_1\sin\theta_2 - a'b\cos\theta_2\sin\theta_1). \end{cases}$$

On vérifie que la substitution

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix}$$

est orthogonale droite, ce qui établit l'existence du mouvement invariable. Si les deux génératrices g_1, g_2 appartenaient à des systèmes contraires, on trouverait encore des formules comme les précédentes; mais elles définissent alors une symétrie au lieu d'un mouvement invariable.

Après ces résultats, nous pouvons répéter toutes les considérations du paragraphe 11, et en tirer la même conclusion : *Les deux déformées* R, R_1 *de l'hyperboloïde se trouvent dans une relation invertible.*

§ 20.

CAS PARTICULIER DE L'HYPERBOLOÏDE DE RÉVOLUTION.

Arrêtons-nous à examiner un cas bien particulier, mais qui confirmera dans un exemple très simple la théorie générale.

Supposons que l'hyperboloïde gauche fondamental Q_0 soit de révolution et que l'on ait donc $a = b$. Considérons la première transformation singulière B_{-a^2}, qui correspond à la valeur $k = -a^2 = -b^2$ de k. Ici, l'hyperboloïde homofocal Q_k se rétrécit indéfiniment et se réduit à l'axe de l'hyperboloïde, dans lequel toutes les génératrices de Q_k viennent coïncider. Les surfaces R_1 transformées du cas général se réduisent donc à une seule surface engendrée par l'axe de l'hyperboloïde Q_0 roulant sur la surface R. Lorsque la surface R devient l'hyperboloïde même Q_0, les segments FF_1 tangents en F à l'hyperboloïde, ont leurs extrêmes F_1 sur l'axe; ils sont donc les tangentes des hyperboles méridiennes, et la surface R_1 est, par conséquent, la surface *complémentaire* de R.

Mais ici, sans rien emprunter à la théorie générale établie des transformations B_k, nous voulons, au contraire, déduire de nouveau ces résultats des propriétés générales de la transformation complémentaire des surfaces applicables sur les surfaces de révolution. En même temps, nous établirons par de simples considérations géométriques les élégantes propositions de Laguerre et M. Bioche sur les déformées réglées de l'hyperboloïde gauche de révolution.

Prenons une surface *réglée* R applicable sur l'hyperboloïde, et soit g une quelconque des génératrices de R; considérons les segments focaux FF_1 qui touchent dans les points F de g la surface R et dans l'autre extrême F_1 la surface complémentaire. Si l'on applique la surface R sur l'hyperboloïde, les segments FF_1, *sans changer leur position relative*, se disposent avec leurs extrêmes F_1

sur l'axe de l'hyperboloïde. Donc, lorsque le premier foyer F décrit la droite g sur R, le second foyer F_1 décrit une autre droite g_1 sur la surface complémentaire, qui est, par conséquent, une autre surface réglée R_1. On voit que si l'on fait rouler l'hyperboloïde sur la surface réglée R, son axe décrit la surface complémentaire R_1. Or, on sait que toutes les surfaces complémentaires des déformées d'une surface de révolution sont applicables sur une même surface de révolution (Weingarten). Je dis que, dans notre cas, celle-ci est le même hyperboloïde[1]. En effet, en déformant l'hyperboloïde on peut le réduire, à la limite, à son axe r qui représente une forme de R infiniment rétrécie dans laquelle le cercle de gorge se réduit au centre même de l'hyperboloïde. Dans ce cas, faire rouler l'hyperboloïde sur R signifie le transporter dans l'espace de telle manière qu'une de ses génératrices g se dispose sur r et le point de rencontre de la génératrice avec le cercle de gorge (point central) sur le centre O. Mais alors l'axe de la nouvelle position de l'hyperboloïde se dispose évidemment sur l'hyperboloïde primitif, d'où l'on voit que R_1 coïncide alors avec l'hyperboloïde primitif.

Nous pouvons résumer les résultats obtenus dans le théorème :

Si l'on fait rouler l'hyperboloïde gauche de révolution sur une quelconque de ses déformées réglées R, *l'axe de l'hyperboloïde décrit une deuxième déformée gauche de l'hyperboloïde, qui est la surface complémentaire de la primitive* R. C'est, comme l'on voit, le même résultat que nous avons déduit plus haut de la théorie générale des transformations B_k.

Mais poursuivons encore nos déductions géométriques et considérons la ligne γ de striction sur R, c'est-à-dire la transformée du cercle c de gorge de l'hyperboloïde. Comme γ est une ligne géodésique, son rayon de courbure géodésique est infini et la ligne correspondante sur la surface complémentaire R_1 est la ligne à l'infini.

[1] C'est une proposition bien connue [voir, par exemple, Mém. A, § 1] que nous déduisons ici par uniformité à l'aide des considérations géométriques.

Inversement (puisque la relation entre R et R_1 est invertible), à la ligne à l'infini de R correspond la ligne γ_1 de striction sur R_1. Lorsque R devient l'hyperboloïde et R_1 se réduit à l'axe, la ligne γ_1 se réduit au centre O de l'hyperboloïde, et nous en concluons que : le lieu décrit par le centre de l'hyperboloïde roulant sur R est la ligne de striction γ_1 de la surface complémentaire R_1. Sous une autre forme, nous pouvons dire : *La ligne de striction* γ_1 *de* R_1 *est le lieu décrit par le centre du cercle de gorge roulant sur la ligne de striction* γ *de* R. Soit maintenant M un point quelconque de γ et M_1 la position du centre O du cercle de gorge c lorsqu'il touche γ en M. Comme le plan de c est, dans cette position, le plan osculateur de la ligne γ en M, nous voyons que la droite MM_1 est la normale principale de γ. Pour la même raison, elle est aussi la normale principale de γ_1 en M_1; donc : *les deux courbes* γ *et* γ_1 *ont les normales principales en commun et elles sont, par suite, deux courbes (conjuguées) de Bertrand.* Voilà démontrée la proposition de Laguerre : sur toute déformée réglée de l'hyperboloïde gauche de révolution, le cercle de gorge se transforme dans une courbe de Bertrand.

Maintenant, l'axe de l'hyperboloïde est la perpendiculaire au plan du cercle de gorge dans son centre M_1, c'est-à-dire la parallèle tirée par M_1 à la binormale de γ en M; donc : *Si par chaque point* M_1 *de la courbe* γ_1 *de Bertrand on tire la parallèle à la binormale dans le point* M *correspondant de la courbe* γ *conjuguée, la surface* R_1, *lieu de ces parallèles, est applicable sur l'hyperboloïde.* C'est la proposition de M. Bioche; mais nous avons, de plus, démontré que l'autre surface R que l'on obtient par la même construction, en échangeant γ et γ_1, est la complémentaire de R_1.

Disons encore quelques mots sur les autres transformations B_k pour les déformées gauches de notre hyperboloïde. On peut les considérer aussi comme des transformations des courbes de Bertrand, qui correspondent au cercle de gorge. Comme transformations de ces courbes, elles coïncident avec celles que M. Demartres a étudiées dans un cas particulier et que M. Razzaboni a considérées en-

suite en général. La transformation de Demartres correspond à l'autre transformation singulière B_{e^2} où l'hyperboloïde homofocal se réduit au cercle focal et ses génératrices deviennent les tangentes de ce cercle. Celles de Razzaboni correspondent à nos transformations générales B_k.

Il ne serait pas difficile, en développant ultérieurement nos considérations géométriques, de déduire de notre théorie générale les propriétés de ces transformations des courbes de Bertrand. Mais nous nous bornerons aux indications précédentes, d'autant plus que nous avons développé ailleurs ces cas particuliers. [Voir Mém. A, § 23, 24.]

§ 21.

PROPRIÉTÉS NOUVELLES DE L'AFFINITÉ D'IVORY.

Les dernières recherches que nous allons exposer dans cette première partie auront pour but de démontrer le théorème de permutabilité [aperçu, n° V] pour les déformées gauches des quadriques. Nous développerons, toutefois, seulement les formules relatives au cas du paraboloïde : l'autre cas de l'hyperboloïde gauche donne lieu à des développements tout à fait analogues et conduit aux mêmes résultats.

La démonstration que nous donnerons ici du théorème de permutabilité s'appuie sur des propriétés élémentaires de l'affinité d'Ivory, qu'il convient avant tout d'établir :

Soit g une génératrice du paraboloïde fondamental P_0, et soient g_1, g_2 deux génératrices quelconques prises respectivement sur les paraboloïdes P_{k_1}, P_{k_2}, homofocaux à P_0, correspondant aux valeurs k_1, k_2 du paramètre k. Bornons-nous au cas où g, g_1, g_2 appartiennent toutes les trois au premier système de génératrices. En posant :

$$p_1 = p - k_1, \qquad p_2 = p - k_2, \qquad q_1 = q + k_1, \qquad q_2 = q + k_2,$$

nous écrirons les équations des droites g, g_1, g_2 sous la forme :

$$g\begin{cases} x=\lambda\sqrt{p}\,.\,z+\dfrac{\sqrt{p}}{2\lambda}, \\ y=\lambda\sqrt{q}\,.\,z-\dfrac{\sqrt{q}}{2\lambda}, \end{cases}$$

$$g_1\begin{cases} x_1=\lambda_1\sqrt{p_1}\,.\,\zeta_1+\dfrac{\sqrt{p_1}}{2\lambda_1}, \\ y_1=\lambda_1\sqrt{q_1}\,.\,\zeta_1-\dfrac{\sqrt{q_1}}{2\lambda_1}, \\ z_1=\zeta_1+\dfrac{k_1}{2}, \end{cases} \qquad g_2\begin{cases} x_2=\lambda_2\sqrt{p_2}\,.\,\zeta_2+\dfrac{\sqrt{p_2}}{2\lambda_2}, \\ y_2=\lambda_2\sqrt{q_2}\,.\,\zeta_2-\dfrac{\sqrt{q_2}}{2\lambda_2}, \\ z_2=\zeta_2+\dfrac{k_2}{2}. \end{cases}$$

Dans l'affinité d'Ivory entre P_{k_1} et P_{k_2}, aux points

$$M_1\equiv(x_1, y_1, z_1), \qquad M_2\equiv(x_2, y_2, z_2)$$

correspondent les deux points

$$\overline{M}_1\equiv(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1), \qquad \overline{M}_2\equiv(\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2).$$

Lorsque M_1 décrit la droite g_1 sur P_{k_1}, et M_2 la droite g_2 sur P_{k_2}, les points $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$ décrivent respectivement sur P_{k_2} et P_{k_1} les deux droites $\bar{g}_1$, $\bar{g}_2$, avec les équations suivantes :

$$\bar{g}_1\begin{cases} \bar{x}_1=\lambda_1\sqrt{p_2}\,.\,\zeta_1+\dfrac{\sqrt{p_2}}{2\lambda_1}, \\ \bar{y}_1=\lambda_1\sqrt{q_2}\,.\,\zeta_1-\dfrac{\sqrt{q_2}}{2\lambda_1}, \\ \bar{z}_1=\zeta_1+\dfrac{k_2}{2}, \end{cases} \qquad \bar{g}_2\begin{cases} \bar{x}_2=\lambda_2\sqrt{p_1}\,.\,\zeta_2+\dfrac{\sqrt{p_1}}{2\lambda_2}, \\ \bar{y}_2=\lambda_2\sqrt{q_1}\,.\,\zeta_2-\dfrac{\sqrt{q_1}}{2\lambda_2}, \\ \bar{z}_2=\zeta_2+\dfrac{k_1}{2}. \end{cases}$$

D'après le paragraphe 11, il existe un mouvement invariable $\mathfrak{M}$ qui superpose les deux droites g_1, g_2, chargées des points M_1, M_2 aux droites $\bar{g}_1$, $\bar{g}_2$, chargées des points correspondants $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$. Les trois droites g, g_1, g_2 individuent une surface du second degré que nous appelons la quadrique (g, g_1, g_2). Cette quadrique a, en commun avec le paraboloïde P_0, la génératrice g et celle-ci seulement, on le voit facilement, *a priori*, et cela sera aussi confirmé par les calculs suivants. Or la première proposition que nous allons démontrer sera la suivante : *Si l'on assujettit la quadrique* $Q \equiv (g, g_1, g_2)$ *au mouvement invariable* $\mathfrak{M}$ *qui superpose* (g_1, g_2) *à* $(\bar{g}_1, \bar{g}_2)$, *elle coupera encore, après le mouvement, le paraboloïde* P_0 *dans une seule génératrice* g'.

Établissons entre les points M, M_1, M_2 de g, g_1, g_2 une correspondance, en faisant correspondre à tout point M de g les points M_1, M_2 de g_1, g_2, où ces droites percent le plan tangent en M au paraboloïde P_0. Les droites M_1M_2 qui joignent deux points correspondants de g_1, g_2 seront évidemment les génératrices du second système de la quadrique $Q \equiv (g, g_1, g_2)$. En écrivant que le plan tangent en M à P_0 passe par M_1, on a l'équation (bilinéaire) entre z et ζ_1 :

$$\left[\lambda\lambda_1\left(\sqrt{qp_1}-\sqrt{pq_1}\right)\zeta_1+\frac{\lambda}{2\lambda_1}\left(\sqrt{pq_1}+\sqrt{qp_1}\right)-\sqrt{pq}\right]\cdot z$$

$$+\left[\frac{\lambda_1}{2\lambda}\left(\sqrt{pq_1}+\sqrt{qp_1}\right)-\sqrt{pq}\right]\zeta_1+\frac{\sqrt{qp_1}-\sqrt{pq_1}}{4\lambda\lambda_1}-\frac{k_1}{2}\sqrt{pq}=0.$$

On aura, de même, entre z et ζ_2 l'équation :

$$\left[\lambda\lambda_2\left(\sqrt{qp_2}-\sqrt{pq_2}\right)\zeta_2+\frac{\lambda}{2\lambda_2}\left(\sqrt{pq_2}+\sqrt{qp_2}\right)-\sqrt{pq}\right]\cdot z$$

$$+\left[\frac{\lambda_2}{2\lambda}\left(\sqrt{pq_2}+\sqrt{qp_2}\right)-\sqrt{pq}\right]\zeta_2+\frac{\sqrt{qp_2}-\sqrt{pq_2}}{4\lambda\lambda_2}-\frac{k_2}{2}\sqrt{pq}=0.$$

Eliminant z entre ces deux équations, il en résulte l'équation bilinéaire entre ζ_1 et ζ_2 :

$$A\zeta_1\zeta_2 + B\zeta_1 + C\zeta_2 + D = 0, \tag{100}$$

qui traduit la relation homographique établie entre g_1, g_2 par les points M_1, M_2 de leur rencontre avec les génératrices de l'autre système de Q. Ecrivons les valeurs explicites des coefficients A, B, C, D :

$$\left\{\begin{aligned}
A &= \left(\sqrt{p_1q_2} - \sqrt{q_1p_2}\right)\lambda_1\lambda_2 + \left(\sqrt{qp_2} - \sqrt{pq_2}\right)\lambda_2\lambda \\
&\quad + \left(\sqrt{pq_1} - \sqrt{qp_1}\right)\lambda_1\lambda, \\
B &= \left(\sqrt{qp_2} + \sqrt{pq_2}\right)\frac{\lambda}{2\lambda_2} + \left(\sqrt{qp_1} + \sqrt{pq_1}\right)\frac{\lambda_1}{2\lambda} - \left(\sqrt{p_1q_2} + \sqrt{q_1p_2}\right)\frac{\lambda_1}{2\lambda_2} \\
&\quad + \frac{k_2}{2}\left(\sqrt{pq_1} - \sqrt{qp_1}\right)\lambda_1\lambda - \sqrt{pq}, \\
C &= -\left(\sqrt{qp_1} + \sqrt{pq_1}\right)\frac{\lambda}{2\lambda_1} - \left(\sqrt{qp_2} + \sqrt{pq_2}\right)\frac{\lambda_2}{2\lambda} \\
&\quad + \left(\sqrt{p_1q_2} + \sqrt{q_1p_2}\right)\frac{\lambda_2}{2\lambda_1} - \frac{k_1}{2}\left(\sqrt{pq_2} - \sqrt{qp_2}\right)\lambda_2\lambda + \sqrt{pq}, \\
D &= \frac{\sqrt{q_1p_2} - \sqrt{p_1q_2}}{4\lambda_1\lambda_2} + \frac{\sqrt{pq_2} - \sqrt{qp_2}}{4\lambda_2\lambda} + \frac{\sqrt{qp_1} - \sqrt{pq_1}}{4\lambda_1\lambda} + k_1\left(\sqrt{qp_2} + \sqrt{pq_2}\right)\frac{\lambda}{4\lambda_2} \\
&\quad - k_2\left(\sqrt{qp_1} + \sqrt{pq_1}\right)\frac{\lambda}{4\lambda_1} + \frac{k_2 - k_1}{2}\sqrt{pq}.
\end{aligned}\right. \tag{101}$$

Remarquons, enfin, que l'équation (100) s'obtient aussi en exprimant que la droite g s'appuie à toutes les droites M_1M_2. Cela est évident par la géométrie et peut se confirmer par le calcul algébrique.

§ 22.

SUITE. — ÉQUATIONS POUR DÉTERMINER λ'.

La proposition énoncée au paragraphe précédent affirme l'existence d'une et d'une seule génératrice g' de P_0 appuyée à toutes

IMPRIMERIE NATIONALE.

les droites $\overline{M}_1\overline{M}_2$. Appelons λ' le paramètre inconnu de cette génératrice et tâchons de le déterminer. Les équations de $\bar{g}_1$, g_2 s'obtiennent de celles de g_1, g_2 en échangeant (k_1, k_2), (p_1, p_2) et (q_1, q_2). Si nous appelons A', B', C', D' ce que deviennent A, B, C, D par ces échanges, et par le changement de λ en λ', la condition que la génératrice (λ') s'appuie à toutes les droites $\overline{M}_1\overline{M}_2$ se traduira, comme nous l'avons dit plus haut, par l'autre équation bilinéaire entre ζ_1, ζ_2 :

$$A'\zeta_1\zeta_2 + B'\zeta_1 + C'\zeta_2 + D' = 0,$$

qui devra coïncider avec la primitive (100). Notre proposition sera donc démontrée si nous prouvons qu'il existe une et une seule valeur de λ', telle que l'on ait les proportions :

$$\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C} = \frac{D'}{D}.$$

En appelant $\frac{\lambda}{2\lambda'}\zeta$ la valeur commune de ces quatre rapports, où ζ désigne une nouvelle inconnue, et posant encore :

$$\xi = 2\lambda'^2, \qquad \eta = 2\lambda', \tag{102}$$

nous trouvons que les conditions demandées se traduisent par les *quatre* équations linéaires suivantes dans les *trois* inconnues ξ, η, ζ :

$$\left[\left(\sqrt{qp_2} - \sqrt{pq_2}\right)\lambda_1 + \left(\sqrt{pq_1} - \sqrt{qp_1}\right)\lambda_2\right]\cdot\xi + \left(\sqrt{p_1q_2} - \sqrt{q_1p_2}\right)\lambda_1\lambda_2\cdot\eta$$
$$+ \left\{\left[\left(\sqrt{qp_2} - \sqrt{pq_2}\right)\lambda_2 + \left(\sqrt{pq_1} - \sqrt{qp_1}\right)\lambda_1\right]\cdot\lambda^2\right.$$
$$\left. + \left(\sqrt{p_1q_2} - \sqrt{q_1p_2}\right)\lambda_1\lambda_2\cdot\lambda\right\}\cdot\zeta = 0.$$

$$\begin{aligned}
&\left[k_1\left(\sqrt{qp_2}-\sqrt{pq_2}\right)\lambda_1\lambda_2-\left(\sqrt{qp_1}+\sqrt{pq_1}\right)\right]\cdot\xi\\
&\quad+\left[2\sqrt{pq}\,\lambda_2+\left(\sqrt{p_1q_2}+\sqrt{q_1p_2}\right)\lambda_1\right]\eta\\
&\quad+\Big\{\left[\left(\sqrt{qp_2}+\sqrt{pq_2}\right)+k_2\left(\sqrt{pq_1}-\sqrt{qp_1}\right)\lambda_1\lambda_2\right]\cdot\lambda^2\\
&\quad-\left[2\sqrt{pq}\,\lambda_2+\left(\sqrt{p_1q_2}+\sqrt{q_1p_2}\right)\lambda_1\right]\cdot\lambda+\left(\sqrt{qp_1}+\sqrt{pq_1}\right)\lambda_1\lambda_2\Big\}\cdot\zeta\\
&=2\left(\sqrt{qp_2}+\sqrt{pq_2}\right)\lambda_1\lambda_2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left[k_2\left(\sqrt{pq_1}-\sqrt{qp_1}\right)\lambda_1\lambda_2+\left(\sqrt{qp_2}+\sqrt{pq_2}\right)\right]\cdot\xi\\
&\quad-\left[2\sqrt{pq}\,\lambda_1+\left(\sqrt{q_1p_2}+\sqrt{p_1q_2}\right)\lambda_2\right]\cdot\eta\\
&\quad+\Big\{\left[k_1\left(\sqrt{qp_2}-\sqrt{pq_2}\right)\lambda_1\lambda_2-\left(\sqrt{qp_1}+\sqrt{pq_1}\right)\right]\lambda^2\\
&\quad+\left[2\sqrt{pq}\,\lambda_1+\left(\sqrt{p_1q_2}+\sqrt{q_1p_2}\right)\lambda_2\right]\lambda-\left(\sqrt{qp_2}+\sqrt{pq_2}\right)\lambda_1\lambda_2\Big\}\cdot\zeta\\
&=-2\left(\sqrt{qp_1}+\sqrt{pq_1}\right)\lambda_1\lambda_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left[k_1\left(\sqrt{qp_2}+\sqrt{pq_2}\right)\lambda_2-k_2\left(\sqrt{qp_1}+\sqrt{pq_1}\right)\lambda_1\right]\cdot\xi\\
&\quad+\left[2\left(k_2-k_1\right)\sqrt{pq}\,\lambda_1\lambda_2+\left(\sqrt{q_1p_2}-\sqrt{p_1q_2}\right)\right]\cdot\eta\\
&\quad+\Big\{\left[k_1\left(\sqrt{qp_2}+\sqrt{pq_2}\right)\lambda_1-k_2\left(\sqrt{qp_1}+\sqrt{pq_1}\right)\lambda_2\right]\lambda^2\\
&\quad+\left[2\left(k_2-k_1\right)\sqrt{pq}\,\lambda_1\lambda_2+\left(\sqrt{q_1p_2}-\sqrt{p_1q_2}\right)\right]\lambda\\
&\quad+\left(\sqrt{pq_2}-\sqrt{qp_2}\right)\lambda_1+\left(\sqrt{qp_1}-\sqrt{pq_1}\right)\lambda_2\Big\}\cdot\zeta\\
&=2\left(\sqrt{pq_1}-\sqrt{qp_1}\right)\lambda_1+2\left(\sqrt{qp_2}-\sqrt{pq_2}\right)\lambda_2.
\end{aligned}$$

187609

Nous avons à démontrer que ces quatre équations linéaires possèdent une et une seule solution en ξ, η, ζ et que l'on a, en outre, $\eta^2 = 2\xi$.

§ 23.

DÉTERMINATION DE λ' ET VÉRIFICATIONS.

Prenons les trois premières équations du système linéaire écrit et appelons Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3, les déterminants dénominateur et numérateurs des formules de résolution, d'après la règle de Cramer :

$$\xi = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad \eta = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \qquad \zeta = \frac{\Delta_3}{\Delta}. \tag{103}$$

Posons :

$$\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{L} &= \left(\sqrt{pq_1} - \sqrt{qp_1}\right)\lambda_1 + \left(\sqrt{qp_2} - \sqrt{pq_2}\right)\lambda_2, \\
\mathrm{P} &= \left(\sqrt{qp_2} - \sqrt{pq_2}\right)\lambda_1 + \left(\sqrt{pq_1} - \sqrt{qp_1}\right)\lambda_2, \\
\mathfrak{N} &= \left(\sqrt{qp_1} + \sqrt{pq_1}\right)^2 - \left(\sqrt{qp_2} + \sqrt{pq_2}\right)^2 \\
&\quad + \left[k_2\left(\sqrt{qp_1} - \sqrt{pq_1}\right)\left(\sqrt{qp_2} + \sqrt{pq_2}\right)\right. \\
&\quad \left. - k_1\left(\sqrt{qp_2} - \sqrt{pq_2}\right)\left(\sqrt{qp_1} + \sqrt{pq_1}\right)\right]\lambda_1\lambda_2.
\end{aligned}\right. \tag{104}$$

Posons, en outre :

$$h = \frac{\left(\sqrt{qp_1} + \sqrt{pq_1}\right)^2 - \left(\sqrt{qp_2} + \sqrt{pq_2}\right)^2}{\sqrt{q_1p_2} - \sqrt{p_1q_2}}, \tag{105}$$

et remarquons qu'on peut aussi donner à h les deux formes suivantes :

$$(105') \quad \begin{cases} h = \dfrac{(\sqrt{q_1p_2}+\sqrt{p_1q_2})(\sqrt{qp_1}+\sqrt{pq_1}) - 2\sqrt{pq}\,(\sqrt{qp_2}+\sqrt{pq_2})}{\sqrt{pq_1}-\sqrt{qp_1}}, \\ h = \dfrac{(\sqrt{q_1p_2}+\sqrt{p_1q_2})(\sqrt{qp_2}+\sqrt{pq_2}) - 2\sqrt{pq}\,(\sqrt{qp_1}+\sqrt{pq_1})}{\sqrt{pq_2}-\sqrt{qp_2}}; \end{cases}$$

ce sont des identités faciles à vérifier et dont il faut tenir compte dans les calculs qui suivent. On en déduit que la quantité $\mathfrak{H}$, définie par la formule (104_3), peut s'exprimer aussi sous l'autre forme :

$$(106) \quad \mathfrak{H} = h\left(\sqrt{q_1p_2}-\sqrt{p_1q_2}\right)\left[1+\frac{(\sqrt{qp_1}-\sqrt{pq_1})(\sqrt{qp_2}-\sqrt{pq_2})}{p+q}\lambda_1\lambda_2\right].$$

Cela posé, on trouvera les valeurs suivantes des déterminants Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3 :

$$(107) \quad \begin{cases} \Delta = \dfrac{\lambda_1\lambda_2}{h}\left(\mathfrak{H}\lambda - h\mathrm{P}\right)^2, \\ \Delta_1 = 2h\lambda_1\lambda_2\left[\mathfrak{L}\lambda + \left(\sqrt{p_1q_2}-\sqrt{q_1p_2}\right)\lambda_1\lambda_2\right]^2, \\ \Delta_2 = 2\lambda_1\lambda_2\left[\mathfrak{L}\lambda + \left(\sqrt{p_1q_2}-\sqrt{q_1p_2}\right)\lambda_1\lambda_2\right]\cdot\left[\mathfrak{H}\lambda - h\mathrm{P}\right], \\ \Delta_3 = -2\lambda_1\lambda_2\left[h\mathfrak{L}\mathrm{P} + \left(\sqrt{p_1q_2}-\sqrt{q_1p_2}\right)\lambda_1\lambda_2\mathfrak{H}\right]. \end{cases}$$

Ces valeurs satisfont bien à la condition :

$$\Delta_2^2 = 2\Delta_1\Delta,$$

qui équivaut à l'autre $\eta^2 = 2\xi$. Il reste seulement à prouver que la

quatrième équation linéaire du système, écrit à la fin du paragraphe précédent, est satisfaite aussi. Or elle peut s'écrire :

$$\frac{(\sqrt{qp_1}+\sqrt{pq_1})(\sqrt{qp_2}+\sqrt{pq_2})}{p+q}\,\mathrm{P}\Delta_1+\Big[2\big(k_2-k_1\big)\sqrt{pq}\,\lambda_1\lambda_2+\big(\sqrt{q_1p_2}-\sqrt{p_1q_2}\big)\Big]\Delta_2$$

$$+\left\{\frac{(\sqrt{qp_1}+\sqrt{pq_1})(\sqrt{qp_2}+\sqrt{pq_2})}{p+q}\,\underset{\sim}{\mathcal{P}}\lambda^2\right.$$

$$\left.+\Big[2\big(k_2-k_1\big)\sqrt{pq}\,\lambda_1\lambda_2+\big(\sqrt{q_1p_2}-\sqrt{p_1q_2}\big)\Big]\lambda\right.$$

$$\left.-\mathrm{P}\right\}\Delta_3-2\underset{\sim}{\mathcal{P}}\Delta=0.$$

Substituant dans celle-ci les valeurs (107) de Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3, son premier membre devient un polynôme du second degré en λ, et on vérifie aisément que ses trois coefficients sont identiquement nuls.

La proposition énoncée au paragraphe 21 se trouve donc démontrée, et nous avons, de plus, la formule effective qui donne l'inconnue λ', d'abord sous la forme :

$$(107^*)\qquad \lambda'=\frac{\xi}{\eta}=\frac{\Delta_1}{\Delta_2}=h\,\frac{\underset{\sim}{\mathcal{P}}\lambda+(\sqrt{p_1q_2}-\sqrt{q_1p_2})\,\lambda_1\lambda_2}{\underset{\sim}{\mathcal{T}}\lambda-h\mathrm{P}}.$$

En y substituant pour $\underset{\sim}{\mathcal{P}}$, $\underset{\sim}{\mathcal{T}}$, P leurs valeurs (104), nous lui donnons la forme définitive :

$$(\mathrm{III})\qquad \lambda'=\frac{[(\sqrt{pq_1}-\sqrt{qp_1})\,\lambda_1+(\sqrt{qp_2}-\sqrt{pq_2})\,\lambda_2]\cdot\lambda}{(\sqrt{q_1p_2}-\sqrt{p_1q_1})\left[1+\dfrac{(\sqrt{qp_1}-\sqrt{pq_1})(\sqrt{qp_2}-\sqrt{pq_2})}{p+q}\,\lambda_1\lambda_2\right]\cdot\lambda}$$

$$\frac{+(\sqrt{p_1q_2}-\sqrt{q_1p_2})\,\lambda_1\lambda_2}{+(\sqrt{pq_2}-\sqrt{qp_2})\,\lambda_1+(\sqrt{qp_1}-\sqrt{pq_1})\,\lambda_2}.$$

C'est, comme l'on voit, une relation *quadrilinéaire* entre λ, λ', λ_1, λ_2 : elle ne change pas si l'on échange (k_1, k_2) et (λ, λ'); de même échangeant λ, λ_1 avec λ', λ_2. Si l'on pose $k_1 = k_2$, et par suite $p_1 = p_2$, $q_1 = q_2$, elle donne $\lambda' = \lambda$ et la génératrice g' coïncide avec g. Il en résulte, bien confirmé, ce que nous avons dit au paragraphe 21, que la quadrique (g, g_1, g_2) a la seule génératrice g en commun avec le paraboloïde P_0.

Ajoutons une remarque qui nous sera bientôt utile. Nous avons dit qu'il existe un mouvement invariable $\mathfrak{M}$ qui transporte la couple de droites (g_1, g_2) chargées de leurs points M_1, M_2 dans l'autre couple $(\bar{g}_1, \bar{g}_2)$ et dans les points correspondants $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$. Or à la couple de points M_1, M_2 correspond un point M de la génératrice g, et à la couple $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$ un point M′ de g' (§ 21); la propriété que nous voulons observer consiste en ce que : *le mouvement invariable* $\mathfrak{M}$ *superpose aussi le plan* (M, g_1) *au plan* $(M', \bar{g}_1)$ *et de même le plan* (M, g_2) *au plan* $(M', \bar{g}_2)$. On le démontre aisément si l'on forme l'expression effective du mouvement $\mathfrak{M}$ (C. § 11); alors il suffit de vérifier que le point où M se transporte après le mouvement se trouve dans un plan avec la droite $\bar{g}_1$ et le point M′.

§ 24.

PRÉPARATIFS POUR LE THÉORÈME DE PERMUTABILITÉ.

En nous appuyant sur les résultats élémentaires établis dans les trois paragraphes précédents, nous allons démontrer le théorème de permutabilité à l'aide des considérations suivantes.

Soit R une déformée gauche quelconque du paraboloïde, et soient R_1, R_2 deux nouvelles déformées qui dérivent de R par deux transformations B_{k_1}, B_{k_2}; soient enfin r, r_1, r_2 trois génératrices correspondantes de R, R_1, R_2. Lorsque R s'applique sur P_0, la droite r se

superposera à une certaine génératrice g de P_0, dont nous appelons $\lambda = \frac{1}{2v}$ le paramètre. Les droites r_1, r_2, entraînées par r, se superposent à deux génératrices g_1, g_2 des respectifs paraboloïdes homofocaux P_{k_1}, P_{k_2}; soient λ_1, λ_2 les paramètres de g_1, g_2.

À cause de l'équation (I), § 4, la fonction λ_1 de $v = \frac{1}{2\lambda}$ satisfera à l'équation différentielle :

$$\frac{d\lambda_1}{dv} = \frac{\varphi(v)}{k_1}\left\{\left[2\left(\sqrt{qp_1}+\sqrt{pq_1}\right)v^2+\frac{k_1}{2}\left(\sqrt{pq_1}-\sqrt{qp_1}\right)\right]\cdot\lambda_1^2 - 2\left(\sqrt{pq}+\sqrt{p_1q_1}\right)v\lambda_1+\frac{1}{2}\left(\sqrt{qp_1}+\sqrt{pq_1}\right)\right\};$$

on aura de même :

$$\frac{d\lambda_2}{dv} = \frac{\varphi(v)}{k_2}\left\{\left[2\left(\sqrt{pq_2}+\sqrt{pq_2}\right)v^2+\frac{k_2}{2}\left(\sqrt{pq_2}-\sqrt{qp_2}\right)\right]\cdot\lambda_2^2 - 2\left(\sqrt{pq}+\sqrt{p_2q_2}\right)v\lambda_2+\frac{1}{2}\left(\sqrt{qp_2}+\sqrt{pq_2}\right)\right\},$$

d'où, en divisant et substituant à v sa valeur $\frac{1}{2\lambda}$:

$$\frac{d\lambda_1}{d\lambda_2} = \frac{k_2}{k_1}\frac{\left[\left(\sqrt{qp_1}+\sqrt{pq_1}\right)+k_1\left(\sqrt{pq_1}-\sqrt{qp_1}\right)\lambda^2\right]}{\left[\left(\sqrt{qp_2}+\sqrt{pq_2}\right)+k_2\left(\sqrt{pq_2}-\sqrt{qp_2}\right)\lambda^2\right]}\cdot\frac{\lambda_1^2-2\left(\sqrt{pq}+\sqrt{p_1q_1}\right)\lambda_1\lambda+\left(\sqrt{qp_1}+\sqrt{pq_1}\right)\lambda^2}{\lambda_2^2-2\left(\sqrt{pq}+\sqrt{p_2q_2}\right)\lambda_2\lambda+\left(\sqrt{qp_2}+\sqrt{pq_2}\right)\lambda^2}. \tag{108}$$

Donc, dans nos hypothèses, λ_1, λ_2 seront deux telles fonctions de λ que l'équation différentielle précédente soit satisfaite. Supposons inversement que λ_1, λ_2 soient deux fonctions de λ, satisfaisant à l'équation supérieure. Déformons le paraboloïde P_0, chaque génératrice (λ) de P_0 entraînant les deux génératrices (λ_1), (λ_2) de P_{k_1}, P_{k_2}; je dis *qu'il existe une et une seule déformation de* P_0 *dans une surface réglée* R, *telle que les génératrices* (λ_1), (λ_2) *auront pour lieux, après la déformation, deux surfaces* R_1, R_2 *liées à* R *respectivement par deux transformations* B_{k_1}, B_{k_2}.

En effet, la proposition finale du paragraphe 5 nous assure l'existence d'une déformation de P_0 telle que la génératrice (λ_1), entraînée par (λ), ait pour lieu une surface R_1 transformée de R [lieu de la droite (λ)] par B_{k_1}. De même nous aurons une deuxième déformation relative aux génératrices (λ_2) et à la tranformation B_{k_2}. Mais *ces deux déformations coïncident*, car la fonction $\varphi(v)$ qui fixe les deux déformations est la même, à cause de l'équation (108).

Cela posé, prenons la fonction λ' de λ donnée par la formule (III) du paragraphe précédent. Je dis que les deux fonctions λ_1, λ_2 de λ' satisfont à l'équation que l'on obtient de (108) en échangeant (k_1, k_2) [par conséquent (p_1, p_2), (q_1, q_2)] et substituant λ' à λ, c'est-à-dire que l'on a aussi :

$$\frac{d\lambda_1}{d\lambda_2} = \frac{k_1}{k_2}\frac{\left[\left(\sqrt{qp_2}+\sqrt{pq_2}\right)+k_2\left(\sqrt{pq_2}-\sqrt{qp_2}\right)\lambda'^2\right]\lambda_1^2}{\left[\left(\sqrt{qp_1}+\sqrt{pq_1}\right)+k_1\left(\sqrt{pq_1}-\sqrt{qp_1}\right)\lambda'^2\right]\lambda_2^2}$$
$$\frac{-2\left(\sqrt{pq}+\sqrt{p_2q_2}\right)\lambda_1\lambda'+\left(\sqrt{qp_2}+\sqrt{pq_2}\right)\lambda'^2}{-2\left(\sqrt{pq}+\sqrt{p_1q_1}\right)\lambda_2\lambda'+\left(\sqrt{qp_1}+\sqrt{pq_1}\right)\lambda'^2}.$$

Comme, d'après les formules (102) et (103), on a :

$$2\lambda'^2 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad 2\lambda' = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

notre assertion équivaut à l'identité suivante :

$$(109)\qquad \frac{k_1}{k_2}\frac{\left[2\left(\sqrt{qp_2}+\sqrt{pq_2}\right)\Delta+k_2\left(\sqrt{pq_2}-\sqrt{qp_2}\right)\Delta_1\right]\lambda_1^2}{\left[2\left(\sqrt{qp_1}+\sqrt{pq_1}\right)\Delta+k_1\left(\sqrt{pq_1}-\sqrt{qp_1}\right)\Delta_1\right]\lambda_2^2}$$
$$\frac{-2\left(\sqrt{pq}+\sqrt{p_2q_2}\right)\lambda_1\Delta_2+\left(\sqrt{qp_2}+\sqrt{pq_2}\right)\Delta_1}{-2\left(\sqrt{pq}+\sqrt{p_1q_1}\right)\lambda_2\Delta_2+\left(\sqrt{qp_1}+\sqrt{pq_1}\right)\Delta_1}$$
$$= \frac{k_2}{k_1}\frac{\left[\left(\sqrt{qp_1}+\sqrt{pq_1}\right)+k_1\left(\sqrt{pq_1}-\sqrt{qp_1}\right)\lambda^2\right]\lambda_1^2}{\left[\left(\sqrt{qp_2}+\sqrt{pq_2}\right)+k_2\left(\sqrt{pq_2}-\sqrt{qp_2}\right)\lambda^2\right]\lambda_2^2}$$
$$\frac{-2\left(\sqrt{pq}+\sqrt{p_1q_1}\right)\lambda_1\lambda+\left(\sqrt{qp_1}+\sqrt{pq_1}\right)\lambda^2}{-2\left(\sqrt{pq}+\sqrt{p_2q_2}\right)\lambda_2\lambda+\left(\sqrt{qp_2}+\sqrt{pq_2}\right)\lambda^2}.$$

IMPRIMERIE NATIONALE.

Substituons ici pour Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3 les valeurs (107); nous avons alors dans le premier, comme dans le second membre, le quotient de deux polynômes du deuxième degré en λ. Si l'on compare les deux numérateurs et les deux dénominateurs, on trouve que l'équation (109) est identiquement satisfaite. En se rappelant la proposition démontrée plus haut, on en conclut :

Il existe une (et une seule) déformation du paraboloïde P_0 *dans une surface réglée* R′ *telle que, chaque génératrice* (λ') *de* P_0 *entraînant les deux* (λ_1), (λ_2) *des respectifs paraboloïdes homofocaux* P_{k_2} *et* P_{k_1}, *ces dernières génératrices* (λ_1), (λ_2) *se disposent sur deux nouvelles déformées* R_1', R_2' *du paraboloïde, qui se trouvent liées à* R′ *par des transformations* B_{k_2}, B_{k_1}.

§ 25.

PREMIÈRE FORME DU THÉORÈME DE PERMUTABILITÉ.

Le théorème de permutabilité sera établi si nous prouvons que la surface R_1' est identique à R_1, et de même R_2' à R_2.

À cet effet commençons par remarquer que la génération même des six surfaces R, R_1, R_2; R′, R_1', R_2' établit entre leurs points une correspondance parfaitement déterminée, telle qu'aux génératrices de l'une des surfaces correspondent les génératrices des autres. Soient r, r_1, r_2; r', r_1', r_2' leurs six génératrices correspondantes et F, F_1, F_2; F′, F_1', F_2' six points correspondants sur ces génératrices. Lorsqu'on applique R sur P_0, la génératrice r prend sur P_0 la position g qui correspond à λ, et les génératrices r_1, r_2 (entraînées par r) prennent sur P_{k_1}, P_{k_2} les positions g_1, g_2 qui répondent aux paramètres λ_1, λ_2. Appliquons maintenant R′ sur P_0; alors r' prend sur P_0 la position g' ou (λ') et r_1', r_2' se superposent, sur P_{k_2} et P_{k_1}, aux deux génératrices $\bar{g}_1 \equiv (\lambda_1)$, $\bar{g}_2 \equiv (\lambda_2)$, qui correspondent à g_1, g_2 dans l'affinité d'Ivory. Après cela il est facile de voir que *la correspondance établie entre les points de* R_1, R_1' *est celle d'applicabilité; de*

même celle entre R_2, R'_2. En effet, lorsqu'on applique R ou R′ sur P_0, deux points correspondants F_1, F'_1 de R_1, R'_1 s'appliquent sur les deux points M_1, $\overline{M}_1$, de P_{k_2}, P_{k_1}, auxquels correspond dans l'affinité d'Ivory un même point de P_0; donc F_1, F'_1 correspondent dans l'applicabilité de R_1, R'_1 sur P_0 à un même point.

Maintenant un mouvement invariable superpose les trois droites r, r_1, r_2 et leurs points F, F_1, F_2 sur les droites g, g_1, g_2 et les points M, M_1, M_2; de même un autre mouvement invariable transporte les trois droites r', r'_1, r'_2 sur $g', \bar{g}_1, \bar{g}_2$. D'ailleurs il existe un troisième mouvement invariable $\mathfrak{M}$ qui superpose la couple (g_1, g_2), chargée des points M_1, M_2, à la couple $(\bar{g}_1, \bar{g}_2)$ chargée des points $\overline{M}_1, \overline{M}_2$; en même temps (§ 23) ce mouvement superpose aussi les plans (M, g_1), (M, g_2) respectivement aux plans $(M', \bar{g}_1)$, $(M', \bar{g}_2)$.

Nous concluons de là qu'il existe aussi un mouvement invariable qui superpose la couple (r_1, r_2) et ses points F_1, F_2 à la couple (r'_1, r'_2) et à ses points F'_1, F'_2; en même temps les plans (F, r_1) (F, r_2) se superposeront aux plans (F', r'_1), (F', r'_2). Or les deux premiers sont les plans tangents à R_1, R_2 en F_1, F_2 et les deux autres les plans tangents en F'_1, F'_2 à R'_1, R'_2. Il suit de là que lorsqu'on applique R_1 sur R'_1, les segments F_1F_2, *restant invariablement liés à la surface* R_1 *et aussi à* R_2, se transportent dans les autres $F'_1F'_2$, et d'autre part la surface R_2, lieu des extrêmes F_2, se déforme à son tour en R'_2. Mais toutes ces conditions, on le voit de suite, ne peuvent être remplies que si la déformation se réduit à un mouvement invariable, qui superpose R_1 à R'_1 et R_2 à R'_2. Supposons effectué ce mouvement qui porte à coïncider R_1 avec R'_1 et R_2 avec R'_2; nous n'aurons plus que les quatre surfaces

$$R, \quad R_1, \quad R_2, \quad R'$$

qui se trouveront précisément dans les conditions énoncées pour le théorème de permutabilité (aperçu, n° IV).

Comment pouvons-nous maintenant formuler la construction en termes finis pour déduire la quatrième surface R′ des trois pre-

mières connues R, R_1, R_2? Imaginons le paraboloïde fondamental P_0, entraînant les homofocaux P_{k_1}, P_{k_2}, qui roule d'abord sur R_1 puis sur R_2, et appelons $P_{k_1}^{(1)}$, $P_{k_2}^{(1)}$ les positions occupées par P_{k_1}, P_{k_2} lorsque P_0 touche R_1 le long de r_1, et de même $P_{k_1}^{(2)}$, $P_{k_2}^{(2)}$ les positions analogues lorsque P_0 touche R_2 le long de r_2. Alors nous avons :

Les deux surfaces $P_{k_1}^{(1)}$, $P_{k_2}^{(2)}$ *se coupent le long de la seule génératrice r qui décrit la première surface* R; *de même* $P_{k_1}^{(2)}$, $P_{k_2}^{(1)}$ *se coupent le long d'une seule génératrice r' qui décrit la quatrième surface* R' *du théorème de permutabilité.*

Nous allons maintenant transformer ce résultat dans un autre plus simple et géométriquement plus expressif.

§ 26.

RAPPORT ANHARMONIQUE CONSTANT DES QUATRE DROITES (r_1, r_2, r, r').

Considérons quatre génératrices correspondantes r, r_1, r_2, r' des quatre surfaces R, R_1, R_2, R', et soient F, F_1, F_2, F' quatre de leurs points correspondants. Les droites F_1F_2 qui joignent deux points correspondants de r_1, r_2 engendrent une quadrique; elles s'appuient toutes non seulement à r_1, r_2 mais aussi à r, r', car la droite F_1F_2 est l'intersection des deux plans tangents en F, F' à R, R', qui contiennent respectivement r et r'. Donc les quatre droites r, r_1, r_2, r' appartiennent, comme génératrices de l'autre système, à la quadrique engendrée par les droites F_1 F_2. Cela étant, il y a lieu de considérer le rapport anharmonique de ces quatre droites. Nous allons établir la simple proposition suivante : *Le rapport anharmonique* $\mathfrak{M}$ *des quatre droites* r_1, r_2, r, r' *est constant; précisément, si on les considère dans l'ordre écrit, on a :*

$$\mathfrak{M} = (r_1\, r_2\, r\, r') = \frac{k_1}{k_2}.$$

Pour calculer $\mathfrak{M}$ prenons une quelconque des droites F_1F_2 et indiquons par N, N′ les deux points où cette droite coupe respectivement r, r'; nous aurons :

$$\mathfrak{M} = (F_1F_2NN').$$

Appelons m, m' les rapports simples des segments :

$$m = \frac{F_1N}{NF_2}, \qquad m' = \frac{F_1N'}{N'F_2};$$

d'où $\mathfrak{M} = \frac{m}{m'}$; il faut calculer m et m'. Commençons par m, et un simple changement dans les notations nous donnera m'. Le mouvement qui transporte les trois génératrices r, r_1, r_2 sur les trois génératrices (λ), (λ_1), (λ_2) de P_0, P_{k_1}, P_{k_2} transportera N, F_1, F_2 en trois points, que nous appelons :

$$L \equiv (X, Y, Z), \qquad M_1 \equiv (x_1, y_1, z_1), \qquad M_2 \equiv (x_2, y_2, z_2),$$

de ces trois droites; on aura donc :

$$X = \frac{mx_2 + x_1}{m+1}, \qquad Y = \frac{my_2 + y_1}{m+1}, \qquad Z = \frac{mz_2 + z_1}{m+1}.$$

Comme L, M_1, M_2 sont situés sur les trois droites g, g_1, g_2 de P_0, P_{k_1}, P_{k_2}, dont nous avons écrit les équations au commencement du paragraphe 21, nous aurons de suite :

$$\frac{m\left(\lambda_2\sqrt{p_2}\,\zeta_2 + \frac{\sqrt{p_2}}{2\lambda_2}\right) + \lambda_1\sqrt{p_1}\,\zeta_1 + \frac{\sqrt{p_1}}{2\lambda_1}}{m+1} = \lambda\sqrt{p}\,\frac{m\left(\zeta_2 + \frac{k_2}{2}\right) + \zeta_1 + \frac{k_1}{2}}{m+1} + \frac{\sqrt{p}}{2\lambda},$$

$$\frac{m\left(\lambda_2\sqrt{q_2}\,\zeta_2 - \frac{\sqrt{q_2}}{2\lambda_2}\right) + \lambda_1\sqrt{q_1}\,\zeta_1 - \frac{\sqrt{q_1}}{2\lambda_1}}{m+1} = \lambda\sqrt{q}\,\frac{m\left(\zeta_2 + \frac{k_2}{2}\right) + \zeta_1 + \frac{k_1}{2}}{m+1} - \frac{\sqrt{q}}{2\lambda},$$

d'où l'on tire :

$$m = \frac{(\lambda\sqrt{p} - \lambda_1\sqrt{p_1})\,\zeta_1 + \dfrac{\sqrt{p}}{2\lambda} - \dfrac{\sqrt{p_1}}{2\lambda_1} + \dfrac{k_1}{2}\lambda\sqrt{p}}{(\lambda_2\sqrt{p_2} - \lambda\sqrt{p})\,\zeta_2 + \dfrac{\sqrt{p_2}}{2\lambda_2} - \dfrac{\sqrt{p}}{2\lambda} - \dfrac{k_2}{2}\lambda\sqrt{q}}$$

$$= \frac{(\lambda\sqrt{q} - \lambda_1\sqrt{q_1})\,\zeta_1 + \dfrac{\sqrt{q_1}}{2\lambda_1} - \dfrac{\sqrt{q}}{2\lambda} + \dfrac{k_1}{2}\lambda\sqrt{q}}{(\lambda_2\sqrt{q_2} - \lambda\sqrt{q})\,\zeta_2 + \dfrac{\sqrt{q}}{2\lambda} - \dfrac{\sqrt{q_2}}{2\lambda_2} - \dfrac{k_2}{2}\lambda\sqrt{q}}.$$

Les deux valeurs écrites pour m doivent être identiques; et en effet, en les égalant, on obtient l'équation bilinéaire (100), § 21, entre ζ_1 et ζ_2. On peut utiliser cette double forme de la valeur de m pour en simplifier l'expression. Multiplions les deux termes du premier quotient par $\sqrt{q}$, ceux du deuxième par $\sqrt{p}$ et soustrayons; cela donne :

$$m = \frac{(\sqrt{pq_1} - \sqrt{qp_1})\,\lambda_1\zeta_1 - \dfrac{\sqrt{qp_1} + \sqrt{pq_1}}{2\lambda_1} + \dfrac{\sqrt{pq}}{\lambda}}{(\sqrt{qp_2} - \sqrt{pq_2})\,\lambda_2\zeta_2 + \dfrac{\sqrt{qp_2} + \sqrt{pq_2}}{2\lambda_2} - \dfrac{\sqrt{pq}}{\lambda}}.$$

Or comme un autre mouvement invariable superpose les trois droites r', r_1, r_2 aux génératrices (λ'), (λ_1), (λ_2) de P_0, P_{k_2}, P_{k_1}, nous aurons la valeur de m' de la précédente pour m en y échangeant (k_1, k_2) [et (p_1, p_2), (q_1, q_2)] et substituant λ' à λ; donc :

$$m' = \frac{(\sqrt{pq_2} - \sqrt{qp_2})\,\lambda_1\zeta_1 - \dfrac{\sqrt{qp_2} + \sqrt{pq_2}}{2\lambda_1} + \dfrac{\sqrt{pq}}{\lambda'}}{(\sqrt{qp_1} - \sqrt{pq_1})\,\lambda_2\zeta_2 + \dfrac{\sqrt{qp_1} + \sqrt{pq_1}}{2\lambda_2} - \dfrac{\sqrt{pq}}{\lambda'}}.$$

Divisant il vient :

$$\mathfrak{M}=\frac{m}{m'}=\frac{(\sqrt{qp_1}-\sqrt{pq_1})\lambda_1\zeta_1+\frac{\sqrt{qp_1}+\sqrt{pq_1}}{2\lambda_1}-\frac{\sqrt{pq}}{\lambda}}{(\sqrt{qp_2}-\sqrt{pq_2})\lambda_1\zeta_1+\frac{\sqrt{qp_2}+\sqrt{pq_2}}{2\lambda_1}-\frac{\sqrt{pq}}{\lambda'}}\cdot$$

$$\frac{(\sqrt{qp_1}-\sqrt{pq_1})\lambda_2\zeta_2+\frac{\sqrt{qp_1}+\sqrt{pq_1}}{2\lambda_2}-\frac{\sqrt{pq}}{\lambda'}}{(\sqrt{qp_2}-\sqrt{pq_2})\lambda_2\zeta_2+\frac{\sqrt{qp_2}+\sqrt{pq_2}}{2\lambda_2}-\frac{\sqrt{pq}}{\lambda}}.$$

À cause de l'équation bilinéaire (100), § 21, on a :

$$\zeta_2=-\frac{B\zeta_1+D}{A\zeta_1+C},$$

et comme $\mathfrak{M}$ est certainement indépendant de ζ_1, on peut calculer $\mathfrak{M}$ en y faisant p. e.

$$\zeta_1=\infty, \qquad \zeta_2=-\frac{B}{A},$$

ce qui donne :

$$\mathfrak{M}=\frac{\sqrt{qp_1}-\sqrt{pq_1}}{\sqrt{qp_2}-\sqrt{pq_2}}\cdot\frac{\left(\frac{\sqrt{qp_1}+\sqrt{pq_1}}{\lambda_2}-2\frac{\sqrt{pq}}{\lambda_1}\right)A-(\sqrt{qp_1}-\sqrt{pq_1})\lambda_2\cdot 2B}{\left(\frac{\sqrt{qp_2}+\sqrt{pq_2}}{\lambda_2}-2\frac{\sqrt{pq}}{\lambda}\right)A-(\sqrt{qp_2}-\sqrt{pq_2})\lambda_2\cdot 2B}.$$

Maintenant la valeur (101), § 21, de A peut s'écrire :

$$A=\mathfrak{P}\lambda+(\sqrt{p_1q_2}-\sqrt{q_1p_2})\lambda_1\lambda_2,$$

et par suite la formule (107*), § 23, pour λ' :

$$\lambda'=\frac{hA}{\mathfrak{R}\lambda-hP}, \qquad \frac{A}{\lambda'}=\frac{\mathfrak{R}\lambda-hP}{h}.$$

L'expression précédente pour $\partial\mathfrak{T}$ devient donc :

$$\partial\mathfrak{T} = \frac{\sqrt{qp_1}-\sqrt{pq_1}}{\sqrt{qp_2}-\sqrt{pq_2}} \frac{\left(\sqrt{qp_1}+\sqrt{pq_1}\right)\mathrm{A}-\left(\sqrt{qp_1}-\sqrt{pq_1}\right)\lambda_2^2\cdot 2\mathrm{B}-2\sqrt{pq}\,\frac{\lambda_2}{h}\left(\partial\mathfrak{T}\lambda-h\mathrm{P}\right)}{\left(\sqrt{qp_2}+\sqrt{pq_2}-2\sqrt{pq}\,\frac{\lambda_2}{\lambda}\right)\mathrm{A}-\left(\sqrt{qp_2}-\sqrt{pq_2}\right)\lambda_2^2\cdot 2\mathrm{B}},$$

et la formule $\partial\mathfrak{T}=\frac{k_1}{k_2}$, que nous voulons démontrer, revient à la relation suivante :

$$\begin{aligned} k_2\left(\sqrt{qp_1}-\sqrt{pq_1}\right)\Big\{&\left(\sqrt{qp_1}+\sqrt{pq_1}\right)\mathrm{A}-\left(\sqrt{qp_1}-\sqrt{pq_1}\right)\lambda_2^2\cdot 2\mathrm{B}\\ &-2\sqrt{pq}\,\frac{\lambda_2}{h}\left(\partial\mathfrak{T}\lambda-h\mathrm{P}\right)\Big\}\\ -k_1\left(\sqrt{qp_2}-\sqrt{pq_2}\right)\Big\{&\left(\sqrt{qp_2}+\sqrt{pq_2}-2\sqrt{pq}\,\frac{\lambda_2}{\lambda}\right)\mathrm{A}\\ &-\left(\sqrt{qp_2}-\sqrt{pq_2}\right)\lambda_2^2\cdot 2\mathrm{B}\Big\}=0. \end{aligned}$$

Or, à cause de l'identité :

$$k_2\left(\sqrt{qp_1}-\sqrt{pq_1}\right)\left(\sqrt{qp_1}+\sqrt{pq_1}\right)=k_1\left(\sqrt{qp_2}-\sqrt{pq_2}\right)\left(\sqrt{qp_2}+\sqrt{pq_2}\right),$$

deux termes de la relation précédente se détruisent, et l'équation multipliée par $\frac{\lambda}{\lambda_2}$ reste :

$$\begin{aligned} &\left[k_1\left(\sqrt{qp_2}-\sqrt{pq_2}\right)^2-k_2\left(\sqrt{qp_1}-\sqrt{pq_1}\right)^2\right]\lambda_2\lambda\cdot 2\mathrm{B}\\ &\quad+2\sqrt{pq}\,k_1\left(\sqrt{qp_2}-\sqrt{pq_2}\right)\mathrm{A}\\ &\quad-2\sqrt{pq}\,k_2\left(\sqrt{qp_1}-\sqrt{pq_1}\right)\left(\frac{\partial\mathfrak{T}}{h}\lambda^2-\mathrm{P}\lambda\right)=0. \end{aligned}$$

Substituons ici les valeurs effectives de

$$\mathrm{A}=\mathcal{P}\lambda+\left(\sqrt{p_1q_2}-\sqrt{q_1p_2}\right)\lambda_1\lambda_2$$

et la valeur de B donnée par l'équation (101_2), d'où il résulte que le coefficient de λ^2 dans $\lambda_2\lambda . 2B$ est égal à

$$\frac{\sqrt{qp_2}+\sqrt{pq_2}}{\sqrt{q_1p_2}-\sqrt{p_1q_2}}\,\frac{\mathfrak{D}}{h},$$

et enfin substituons pour $\mathcal{L}$, P leurs valeurs données par les formules (104). Le premier membre de notre équation est un polynôme du deuxième degré en λ, qui est identiquement nul. Nous avons donc démontré la formule :

$$\mathfrak{M}=\frac{k_1}{k_2}.$$

§ 27.

FORME DÉFINITIVE DU THÉORÈME DE PERMUTABILITÉ.

Le résultat qu'on vient d'établir nous permet de donner au théorème de permutabilité la simple forme suivante (aperçu, n° VI, Théorème IV) :

Soient R, R_1, R_2 *trois déformées réglées du paraboloïde, dont les deux dernières* R_1, R_2 *dérivent de* R *par deux transformations* B_{k_1}, B_{k_2}. *Prenons trois génératrices correspondantes* r, r_1, r_2 *et sur la quadrique* (r_1, r_2, r), *déterminée par ces trois droites, prenons la quatrième droite* r' *(du même système) qui forme avec* r_1, r_2, r *le rapport anharmonique constant*

$$\mathfrak{M}=(r_1\,r_2\,r\,r')=\frac{k_1}{k_2}.$$

Alors la droite r' *décrit une quatrième déformée* R′ *du paraboloïde, qui se trouve liée respectivement à* R_1, R_2 *par deux transformations* B'_{k_2}, B'_{k_1}. Il importe encore, particulièrement pour l'extension future aux déformées *non réglées* des quadriques (§ 42), de formuler aussi la construction pour obtenir de chaque point F de R le point F′

IMPRIMERIE NATIONALE.

correspondant de la quatrième surface R′. Nous avons immédiatement la proposition suivante :

Soit F *un point quelconque de* R, *et soient* r_1, r_2 *les deux génératrices de* R_1, R_2 *qui passent par les points* F_1, F_2 *correspondant à* F. *Menons par* F *la droite s appuyée à* r_1, r_2 *en deux points que nous appelons* N_1, N_2, *et prenons sur cette droite s le quatrième point* F′ *tel que le rapport anharmonique* $(N_1 N_2 F F')$ *soit constant et égal à* $\frac{k_1}{k_2}$. *Le point* F′ *décrit la quatrième surface* R′ *du théorème de permutabilité, et il correspond à* F [1].

Comme nous l'avons déjà dit au paragraphe 21, toutes les propositions relatives au théorème de permutabilité pour les déformées gauches du paraboloïde subsistent aussi, sous la même forme, dans le cas de l'hyperboloïde à une nappe et se démontrent par des procédés analogues. En particulier les deux derniers théorèmes, que nous avons donnés comme résultat final de la recherche, restent vrais pour les déformées de l'hyperboloïde. Mais ici, pour ne pas donner une extension trop considérable à cette première partie, nous supprimons les développements dont il s'agit, en les réservant pour une autre occasion.

§ 28.

APPLICATIONS DU THÉORÈME DE PERMUTABILITÉ.

Le théorème de permutabilité apporte une simplification très remarquable dans l'application répétée de la méthode des transformations. Bien que nous ayons jusqu'ici établi le théorème seulement pour les déformées gauches des quadriques, nous allons exposer ces applications pour ne plus y revenir dans la suite.

[1] On remarquera que dans le cas particulier où $k_2 = -k_1$, le groupe des quatre droites $(r_1 r_2 r r')$ ou des quatre points $(F_1 F_2 F F')$ est harmonique. Cela arrive par exemple dans le cas du paraboloïde équilatère $p = q$ pour les deux transformations singulières correspondant aux paraboles focales.

Rappelons-nous que pour déterminer les ∞^1 transformées réglées R_1 d'une déformée réglée R d'une quadrique par une transformation B_k, nous avons à intégrer une équation de Riccati [(I), § 4, ou (II), § 13). Cette intégration effectuée, nous connaissons pour chaque nouvelle surface R_1 une de ses transformées par la même transformation B_k : c'est la surface primitive R. Donc si l'on cherche les ∞^1 transformées de R_1 par B_k, on connaît *une* solution de l'équation correspondante de Riccati, celle qui correspond à R, et l'intégration s'achève par quadratures. À ce point de la théorie l'application indéfiniment répétée de la transformation B_k aux nouvelles surfaces dérivées exige toujours de nouvelles quadratures. On peut aller bien plus loin, à l'aide du théorème de permutabilité, si l'on suppose que la *première* équation de Riccati de la méthode ait été intégrée pour *toute valeur de k*, c'est-à-dire que l'on connaisse toutes les ∞^2 transformées de R.

Je dis qu'alors : *l'application indéfiniment répétée des transformations* B_k *aux nouvelles surfaces dérivées s'effectuera par de simples calculs algébriques, sans aucune quadrature.*

La démonstration est la même que pour le cas des transformations de Bäcklund des surfaces pseudosphériques[1]; aussi suffira-t-il d'une simple indication.

Soit R_1 une surface dérivée de la primitive R par une transformation B_{k_1}. Je dis que, dans nos hypothèses, on peut trouver en *termes finis* toute surface R′ dérivée de R_1 par une transformation B_k quelconque. Supposons d'abord $k \neq k_1$; d'après le théorème de permutabilité, il existe une quatrième surface R_2, qui se trouve liée à R par une B_k et à R′ par une B_{k_1}. Comme R_2 est contiguë à R, nous la connaissons par hypothèse; et, en appliquant les constructions du paragraphe précédent aux trois surfaces connues R, R_1, R_2, nous trouvons, *en termes finis,* la quatrième R′.

Le cas $k = k_1$ s'achève, comme cas limite, de la manière sui-

[1] Voir mes *Lezioni di geometria differenziale* (2ᵉ édit., 1902-1903), vol. II, p. 417.

vante, que nous indiquons, pour fixer les idées, pour le cas du paraboloïde. Soit

$$\lambda = \lambda(v, k, c)$$

la solution générale *connue* de l'équation (I), § 4 de Riccati, c désignant la constante d'intégration, et soit

$$\lambda_1 = \lambda(v, k_1, c_1)$$

la solution particulière, pour $k = k_1$, qui répond à la surface R_1. Substituons dans la solution générale $\lambda(v, k, c)$ pour c une fonction arbitraire de k, assujettie à la seule condition de se réduire à c_1 pour $k = k_1$; alors nous avons

$$\lim_{k = k_1} \lambda(v, k, c) = \lambda_1,$$

et la surface R_2 qui correspond à la solution générale λ, en faisant tendre k vers k_1, tendra à se confondre, d'une manière déterminée, avec la surface R_1. Le point F′ de notre construction générale tendra vers un point limite déterminé, dont les coordonnées s'obtiendront par dérivation [1]. Ce point limite décrira la surface R′ cherchée, qui dérive de R_1 par une transformation B_{k_1}.

[1] Ce point demande peut-être quelque explication que nous donnons ici. Supposons que la droite $x = mz + a$, $y = nz + b$ décrive une surface réglée, les coefficients m, n, a, b étant fonctions d'une variable v. Prenons deux positions quelconques $(v), (v + \Delta v)$ de la droite mobile et par un point fixe O de l'espace, que nous prendrons pour origine, menons la droite ONN̄N̄ appuyée en N, N̄ aux deux droites $(v), (v + \Delta v)$ et prenons sur cette droite un quatrième point O′ tel que le rapport anharmonique (OO′ NN̄) soit égal à une fonction donnée $\mathfrak{M}$ de v et Δv. Enfin supposons que $\mathfrak{M} - 1$ tend à zéro lorsque Δv tend à zéro, et cela de l'ordre même de Δv; disposant du paramètre v, on pourra supposer que $\frac{\mathfrak{M} - 1}{\Delta v}$ tend vers 1 pour $\Delta v = 0$. Un calcul élémentaire démontre alors que les coordonnées x, y, z de O′ tendent vers les limites suivantes :

$$\lim_{\Delta v = 0} x = \frac{m(a'b - ab') + a(an' - bm')}{(a + a')n' - (b + b')m'},$$

$$\lim_{\Delta v = 0} y = \frac{n(a'b - ab') + b(an' - bm')}{(a + a')n' - (b + b')m'},$$

$$\lim_{\Delta v = 0} z = \frac{a'b - ab'}{(a + a')n' - (b + b')m'},$$

les accents indiquant dérivation par rapport à v.

DEUXIÈME PARTIE.

TRANSFORMATIONS DES DÉFORMÉES GÉNÉRALES DES QUADRIQUES.

§ 29.

LE THÉORÈME DE M. CHIEFFI.

Après avoir exposé, dans la première partie, la théorie des transformations des déformées réglées des quadriques, nous allons maintenant nous occuper des déformées générales. Les résultats obtenus dans la première partie, et les formules que nous y avons développées, nous seront très utiles dans les nouvelles recherches générales et permettront une exposition plus rapide, en simplifiant les démonstrations.

Pour effectuer le passage du cas des déformées réglées au cas général, nous nous aiderons, à plusieurs reprises, d'une proposition générale due à M. Chieffi[1] et relative à toute surface (S) applicable sur une surface réglée quelconque R. Appelons g les lignes géodésiques de (S) qui sont les transformées des droites de R. Par tous les points d'une ligne asymptotique quelconque a de (S) menons les droites r tangentes en ces points aux lignes géodésiques g. Les droites r auront pour lieu une surface réglée R_1 qui sera circonscrite à (S) le long de l'asymptotique commune a. Le théorème de M. Chieffi nous dit : *La surface réglée* R_1 *est applicable sur la surface* (S) *et, dans l'application de* R_1 *sur* (S), *la ligne asymptotique a demeure invariable*[2].

[1] Voir le premier paragraphe du mémoire de M. Chieffi : Sulle deformate dell' iperboloide rotondo ad una falda e su alcune superficie che se ne deducono [*Giornale di matematiche*, vol. XLIII, 12° della 3ª série (1905)].

[2] J'avais donné ce théorème dans le cas particulier des surfaces applicables sur le caténoïde. M. Chieffi a reconnu que le théorème est général.

En renvoyant pour une démonstration analytique au mémoire même de M. Chieffi, je vais en donner ici une simple démonstration géométrique, qui conduit en outre à distinguer le cas où l'applicabilité de R_1 sur R a lieu par *déformation continue* du cas contraire. [On remarquera, en outre, que cette démonstration est indépendante de la courbure de l'espace; aussi le théorème de M. Chieffi reste vrai dans tout espace à courbure constante.] La surface (S) étant par hypothèse applicable sur la réglée R, appelons α la ligne de R qui correspond à l'asymptotique a de (S). D'après un théorème bien connu de Beltrami, il y a une (et une seule) déformation *continue* de la surface réglée R dans une autre surface réglée R′, telle que la ligne α de R devienne une asymptotique a' sur R′. Les deux lignes a, a' se correspondent point par point [à cause de l'applicabilité de R′ sur (S)] à arcs égaux, et elles ont dans les points correspondants la même courbure (ou courbure géodésique) et des torsions égales ou opposées (car les carrés des torsions sont égaux d'après le théorème d'Enneper). On en conclut que les deux courbes a, a' sont superposables ou symétriques. Dans le premier cas, superposons effectivement a' à la ligne a. La surface R′ sera circonscrite à la surface (S) le long de a; et, comme les génératrices de R′ rencontrent la ligne a sous le même angle que les géodésiques g, elles seront leurs tangentes le long de a, c'est-à-dire que R′ coïncide avec R_1. Donc : *dans ce premier cas, la surface* R_1 *est applicable par déformation continue sur* R; *elle est applicable aussi sur* (S) *et la ligne asymptotique a demeure invariable.* Nous avons supposé les lignes a, a' superposables. Si elles sont au contraire symétriques, remplaçons a' par sa ligne symétrique, qui sera superposable à la ligne a, et opérons de la même manière. Nous en déduisons que R_1 est encore applicable sur R, mais une déformation continue la change seulement dans la symétrique de R.

Le théorème de M. Chieffi est démontré et nous pouvons de plus juger, *a priori,* si la surface R_1 est applicable par déformation continue sur la réglée primitive R ou bien sur sa symétrique. Nous

aurons le premier cas lorsque la torsion de la ligne a aura le même signe que celle des asymptotiques curvilignes de R, le deuxième dans le cas contraire.

Considérons maintenant sur (S) toutes les lignes asymptotiques a d'un même système et construisons pour chaque position de a la surface réglée correspondante R_1 du théorème de Chieffi. Ces ∞^1 surfaces R_1 seront toutes applicables sur (S) et, par déformation continue, l'une sur l'autre. La surface (S) sera l'enveloppe des ∞^1 surfaces R_1 et les lignes caractéristiques seront les asymptotiques a. Il est clair, d'après ce que nous avons dit, que si l'on fait la même construction pour les asymptotiques de l'autre système, les nouvelles surfaces réglées circonscrites R_1 seront bien applicables par déformation continue l'une sur l'autre, mais seulement (par déformation continue) sur les symétriques des réglées circonscrites le long des asymptotiques du premier système.

Supposons maintenant que la surface (S) soit applicable sur une quadrique Q. Comme celle-ci est doublement réglée, nous pouvons appliquer le théorème de Chieffi de quatre manières, deux desquelles correspondront au premier et deux au deuxième système de droites de Q. Enfin, remarquons que si la déformée (S) de la quadrique est elle-même une réglée R, comme nous avons ici un seul système d'asymptotiques curvilignes, nous pourrons appliquer la construction de deux seules manières. Mais l'une d'elles donne seulement la surface primitive R, l'autre donne ∞^1 surfaces réglées R_1 applicables par déformation continue sur la surface R. Nous avons déjà fait usage de ces derniers résultats dans la considération de la transformation singulière B_0 des déformées gauches des quadriques (§§ 6 et 14).

§ 30.

DESCRIPTION DE LA MÉTHODE POUR LA RECHERCHE DES TRANSFORMATIONS.

Soit (S) une surface quelconque, applicable sur la quadrique Q. Prenons les lignes asymptotiques a d'un système sur (S) et construisons, d'après le théorème de Chieffi, les ∞^1 surfaces réglées R, déformées de Q, circonscrites à (S) le long des asymptotiques a. D'après les résultats de la première partie, une transformation B_k change chaque surface R dans ∞^1 surfaces transformées R_1. Est-il possible de choisir pour chaque surface R *une seule* de ses transformées R_1 de telle manière que les ∞^1 surfaces R_1 forment un système de même nature que les surfaces R, c'est-à-dire que leur enveloppe soit une surface (S_1) applicable sur Q? C'est bien cette possibilité que nous allons établir dans les recherches qui suivent. Nous pouvons ainsi regarder les transformations B_k des déformées générales des quadriques comme composées de ∞^1 transformations B_k élémentaires de leurs réglées enveloppantes d'après le théorème de Chieffi.

Mais la méthode que nous allons appliquer pour la recherche effective des transformations générales B_k sera bien diverse, et nous allons avant tout la décrire, pour éclaircir les développements de calcul que nous aurons à effectuer. Nous supposerons d'abord, comme dans la première partie, que la quadrique fondamentale Q soit *réglée*, et nous choisirons arbitrairement, dans le système homofocal, une autre quadrique réglée Q_k. Considérons les ∞^2 coniques sections des plans tangents de Q avec la quadrique homofocale Q_k. Lorsque Q, en se déformant, s'applique sur la surface (S), ces coniques, entraînées dans les plans tangents, donneront un système de ∞^2 coniques, que nous appellerons C, situées individuelle-

ment dans les plans tangents de (S). Appelons F le point de contact du plan de la conique C avec (S) ; pour démontrer l'existence des transformations B_k, nous aurons à prouver qu'il est possible de choisir (et cela en ∞^1 manières) sur chaque conique C un point F_1 tel que la surface (S_1), lieu des ∞^2 points F_1, jouisse des propriétés suivantes :

a. *Les surfaces* (S) *et* (S_1) *sont les deux nappes focales d'une congruence* W, *engendrée par les droites* FF, *qui joignent leurs points correspondants* FF_1;

b. *La surface* (S_1) *est applicable sur* (S) [*par conséquent sur la quadrique* Q] *et la loi d'applicabilité entre* (S) *et* (S_1) *est donnée par l'affinité d'Ivory entre les quadriques homofocales* Q *et* Q_k.

Ces conditions contiennent bien plus qu'il n'en faut pour déterminer les transformations. Dans le cas des déformées réglées, c'est aux conditions *a* que nous nous sommes attaché; elles nous ont servi à déterminer complètement les transformations et les conditions *b* restaient satisfaites d'elles-mêmes.

Ici, dans le cas général, c'est précisément le chemin inverse qui est préférable.

Nous chercherons à satisfaire aux conditions *b* qui, en effet, sont à elles seules plus que suffisantes pour individuer les transformations. Nous aurons ensuite à vérifier que les conditions *a* sont aussi satisfaites.

Ce que nous venons de dire trace aussi la marche de l'analyse qu'on devra appliquer. Rapportons la surface (S) aux lignes (u, v) transformées des droites de la quadrique Q, et désignons par x, y, z les coordonnées d'un point quelconque F de (S). Les coordonnées x_1, y_1, z_1 d'un point F_1 de la conique C, située dans le plan tangent en F à (S), seront données par nos formules habituelles

$$x_1 = x + l\frac{\partial x}{\partial u} + m\frac{\partial x}{\partial v}, \text{ etc.}, \tag{1}$$

IMPRIMERIE NATIONALE.

où l, m auront les valeurs (21), (22), § 2, si la quadrique Q est un paraboloïde hyperbolique, ou bien les valeurs (65), (66), § 12, s'il s'agit d'un hyperboloïde gauche. Les fonctions l, m contiennent les variables u, v et, en outre, le paramètre λ dans le premier cas, le paramètre θ dans le second. Nous devrons considérer λ ou θ comme une fonction inconnue de u, v :

$$\lambda = \lambda(u, v), \qquad \theta = \theta(u, v),$$

qu'il s'agira de déterminer de manière à satisfaire aux conditions b.

Un dernier avertissement avant de commencer les calculs. C'est qu'ici il n'y a plus de raison pour conserver les doubles signes dans U, V, W; aussi choisirons-nous toujours les signes supérieurs.

§ 31.

CALCUL DE L'ÉLÉMENT LINÉAIRE DE LA SURFACE R_1 DANS LE CAS DU PARABOLOÏDE.

Commençons par le cas du paraboloïde hyperbolique P_0, en conservant les notations des paragraphes 2 et suivants. Soit (S) une surface quelconque applicable sur P_0; elle aura le même ds^2, et sera dès lors intrinsèquement déterminée en y adjoignant sa deuxième forme fondamentale

$$\mathfrak{D}du^2 + 2\mathfrak{D}'du\,dv + \mathfrak{D}''dv^2.$$

Les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$ devront satisfaire sont données par l'équation de Gauss :

$$(2) \qquad \mathfrak{D}\mathfrak{D}'' - \mathfrak{D}'^2 = -\mathfrak{D}_0'^2 = -\frac{4pq}{H},$$

et par les équations différentielles de Codazzi :

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathfrak{D}}{\partial v} - \dfrac{\partial \mathfrak{D}'}{\partial u} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \log \rho}{\partial v}\mathfrak{D} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \log \rho}{\partial u}\mathfrak{D}', \\ \dfrac{\partial \mathfrak{D}''}{\partial u} - \dfrac{\partial \mathfrak{D}'}{\partial v} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \log \rho}{\partial v}\mathfrak{D}' + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \log \rho}{\partial u}\mathfrak{D}''. \end{cases}$$

Imaginons de substituer pour λ, dans les seconds membres des formules (1), une fonction déterminée de u, v. En dérivant par rapport à u et v, nous aurons (C. §§ 1 et 3) :

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial u} = \mathfrak{L}_0 \dfrac{\partial x}{\partial u} + \mathfrak{M}_0 \dfrac{\partial x}{\partial v} + \mathfrak{D}'_0 m \mathrm{X} + \left(\dfrac{\partial l}{\partial \lambda}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial m}{\partial \lambda}\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)\dfrac{\partial \lambda}{\partial u} \\ \qquad\qquad + \left[\mathfrak{D} l + (\mathfrak{D}' - \mathfrak{D}'_0)\, m\right]\mathrm{X}, \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v} = \mathrm{P}_0 \dfrac{\partial x}{\partial u} + \mathrm{Q}_0 \dfrac{\partial x}{\partial v} + \mathfrak{D}'_0 l \mathrm{X} + \left(\dfrac{\partial l}{\partial \lambda}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial m}{\partial \lambda}\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)\dfrac{\partial \lambda}{\partial v} \\ \qquad\qquad + \left[(\mathfrak{D}' - \mathfrak{D}'_0)\, l + \mathfrak{D}'' m\right]\mathrm{X}, \end{cases}$$

où $\mathfrak{L}_0$, $\mathfrak{M}_0$, P_0, Q_0 ont les valeurs données par les formules (26°), § 3.

Maintenant supposons, comme au paragraphe 6, que la surface (S) soit réduite au paraboloïde P_0 et qu'on donne à λ une valeur constante quelconque. Désignons par x_0, y_0, z_0; $\mathrm{X}_0, \mathrm{Y}_0, \mathrm{Z}_0$ ce que deviennent dans ce cas x, y, z; X, Y, Z, et par $\overline{x}_0$, $\overline{y}_0$, $\overline{z}_0$ les valeurs particulières qui en résultent pour x_1, y_1, z_1. La surface (S_1) se réduit alors à la génératrice (λ) et nous avons [C. § 7, formules (34) et (42)] :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{x}_0}{\partial u} = \mathfrak{L}_0 \dfrac{\partial x_0}{\partial u} + \mathfrak{M}_0 \dfrac{\partial x_0}{\partial v} + \mathfrak{D}'_0 m \cdot \mathrm{X}_0, \\ \dfrac{\partial \overline{x}_0}{\partial v} = \mathrm{P}_0 \dfrac{\partial x_0}{\partial u} + \mathrm{Q}_0 \dfrac{\partial x_0}{\partial v} + \mathfrak{D}'_0 l \cdot \mathrm{X}_0, \\ \dfrac{\partial \overline{x}_0}{\partial \lambda} = \dfrac{\partial l}{\partial \lambda}\dfrac{\partial x_0}{\partial u} + \dfrac{\partial m}{\partial \lambda}\dfrac{\partial x_0}{\partial v}. \end{cases}$$

Si nous attribuons à $\mathcal{E}_0$, $\mathcal{F}_0$, $\mathcal{G}_0$ les mêmes significations qu'au paragraphe 7, les coefficients $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{G}_1$ dans le ds_1^2 de la surface (S_1),

$$ds_1^2 = \mathcal{E}_1 du^2 + 2\mathcal{F}_1 du\,dv + \mathcal{G}_1 dv^2,$$

se calculent par les formules suivantes :

$$(5)\quad \begin{cases} \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_0 + 2\left[(\mathcal{E}\mathcal{L}_0 + \mathcal{F}\mathcal{M}_0)\frac{\partial l}{\partial\lambda} + (\mathcal{F}\mathcal{L}_0 + \mathcal{G}\mathcal{M}_0)\frac{\partial m}{\partial\lambda}\right]\frac{\partial\lambda}{\partial u} \\ \qquad + S\left(\frac{\partial\bar{x}_0}{\partial\lambda}\right)^2\cdot\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)^2 + 2\mathfrak{D}_0' m\left[\mathfrak{D} l + (\mathfrak{D}' - \mathfrak{D}_0')\, m\right] \\ \qquad + \left[\mathfrak{D} l + (\mathfrak{D}' - \mathfrak{D}_0')\, m\right]^2, \\ \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_0 + \left[(\mathcal{E}P_0 + \mathcal{F}Q_0)\frac{\partial l}{\partial\lambda} + (\mathcal{F}P_0 + \mathcal{G}Q_0)\frac{\partial m}{\partial\lambda}\right]\frac{\partial\lambda}{\partial u} \\ \qquad + \left[(\mathcal{E}\mathcal{L}_0 + \mathcal{F}\mathcal{M}_0)\frac{\partial l}{\partial\lambda} + (\mathcal{F}\mathcal{L}_0 + \mathcal{G}\mathcal{M}_0)\frac{\partial m}{\partial\lambda}\right]\frac{\partial\lambda}{\partial v} \\ \qquad + S\left(\frac{\partial\bar{x}_0}{\partial\lambda}\right)^2\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial u}\frac{\partial\lambda}{\partial v} + \mathfrak{D}_0' m\left[(\mathfrak{D}' - \mathfrak{D}_0')\, l + \mathfrak{D}'' m\right] \\ \qquad + \mathfrak{D}_0' l\left[\mathfrak{D} l + (\mathfrak{D}' - \mathfrak{D}_0')\, m\right] \\ \qquad + \left[\mathfrak{D} l + (\mathfrak{D}' - \mathfrak{D}_0')\, m\right]\cdot\left[(\mathfrak{D}' - \mathfrak{D}_0')\, l + \mathfrak{D}'' m\right], \\ \mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_0 + 2\left[(\mathcal{E}P_0 + \mathcal{F}Q_0)\frac{\partial l}{\partial\lambda} + (\mathcal{F}P_0 + \mathcal{G}Q_0)\frac{\partial m}{\partial\lambda}\right]\frac{\partial\lambda}{\partial v} \\ \qquad + S\left(\frac{\partial\bar{x}_0}{\partial\lambda}\right)^2\cdot\left(\frac{\partial\lambda}{\partial v}\right)^2 + 2\mathfrak{D}_0' l\left[(\mathfrak{D}' - \mathfrak{D}_0')\, l + \mathfrak{D}'' m\right] \\ \qquad + \left[(\mathfrak{D}' - \mathfrak{D}_0')\, l + \mathfrak{D}'' m\right]^2. \end{cases}$$

D'après ce que nous avons dit au paragraphe précédent, nous avons à exprimer maintenant que cet élément linéaire

$$\mathcal{E}_1 du^2 + 2\mathcal{F}_1 du\,dv + \mathcal{G}_1 dv^2$$

est transformable dans l'autre,

$$\overline{\mathcal{E}}_1 du_1^2 + 2\overline{\mathcal{F}}_1 du_1 dv_1 + \overline{\mathcal{G}}_1 dv_1^2,$$

où $\overline{\mathcal{E}}_1$, $\overline{\mathcal{F}}_1$, $\overline{\mathcal{G}}_1$ ont les valeurs (48), § 8, tandis que u_1, v_1 sont données par les formules (49), *ibid.* Remarquons que la deuxième de celles-ci : $v_1 = \frac{1}{2\lambda}$ montre que les dérivées *explicites* de v_1 par rapport à u, v sont nulles. D'après cela, les valeurs (5) de $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{G}_1$ doivent être respectivement égales aux trois suivantes :

$$(5^*)\quad \begin{cases} \mathcal{E}_1 = \overline{\mathcal{E}}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2 + 2\left(\overline{\mathcal{E}}_1\frac{\partial u_1}{\partial \lambda} + \overline{\mathcal{F}}_1\frac{\partial v_1}{\partial \lambda}\right)\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial \lambda}{\partial u} \\ \qquad\qquad + \left[\overline{\mathcal{E}}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial \lambda}\right)^2 + 2\overline{\mathcal{F}}_1\frac{\partial u_1}{\partial \lambda}\frac{\partial v_1}{\partial \lambda} + \overline{\mathcal{G}}_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial \lambda}\right)^2\right]\cdot\left(\frac{\partial \lambda}{\partial u}\right)^2, \\ \mathcal{F}_1 = \overline{\mathcal{E}}_1\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial u_1}{\partial v} + \left(\overline{\mathcal{E}}_1\frac{\partial u_1}{\partial \lambda} + \overline{\mathcal{F}}_1\frac{\partial v_1}{\partial \lambda}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\frac{\partial \lambda}{\partial u} + \frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial \lambda}{\partial v}\right) \\ \qquad\qquad + \left[\overline{\mathcal{E}}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial \lambda}\right)^2 + 2\overline{\mathcal{F}}_1\frac{\partial u_1}{\partial \lambda}\frac{\partial v_1}{\partial \lambda} + \overline{\mathcal{G}}_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial \lambda}\right)^2\right]\cdot\frac{\partial \lambda}{\partial u}\frac{\partial \lambda}{\partial v}, \\ \mathcal{G}_1 = \overline{\mathcal{E}}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)^2 + 2\left(\overline{\mathcal{E}}_1\frac{\partial u_1}{\partial \lambda} + \overline{\mathcal{F}}_1\frac{\partial v_1}{\partial \lambda}\right)\frac{\partial u_1}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial v} \\ \qquad\qquad + \left[\overline{\mathcal{E}}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial \lambda}\right)^2 + 2\overline{\mathcal{F}}_1\frac{\partial u_1}{\partial \lambda}\frac{\partial v_1}{\partial \lambda} + \overline{\mathcal{G}}_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial \lambda}\right)^2\right]\cdot\left(\frac{\partial \lambda}{\partial v}\right)^2. \end{cases}$$

C'est donc de ces conditions que nous devons tâcher de déterminer la fonction inconnue $\lambda = \lambda(u, v)$.

§ 32.

FORMATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES FONDAMENTALES POUR LA FONCTION $\lambda(u, v)$.

La comparaison que nous avons à faire des valeurs (5) et (5*) de $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{G}_1$ et la formation des équations différentielles correspondantes pour λ deviennent aisées, si l'on reporte des para-

graphes 7, 8 et 9 les identités suivantes que nous y avons démontrées :

§ 9, (51) $$\frac{\partial u_1}{\partial u}=4\sqrt{pq}\,\frac{\lambda^2 V}{W^2},\qquad \frac{\partial u_1}{\partial v}=4\sqrt{pq}\,\frac{\lambda^2 U}{W^2}.$$

§ 9, (53) $$\overline{\mathcal{E}}_1\frac{\partial u_1}{\partial\lambda}+\overline{\mathcal{F}}_1\frac{\partial v_1}{\partial\lambda}=\sqrt{p'}\,\frac{\partial\bar{x}_0}{\partial\lambda}+\sqrt{q'}\,\frac{\partial\bar{y}_0}{\partial\lambda}+\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\bar{z}_0}{\partial\lambda}-\frac{k}{\lambda^2}.$$

§ 7, (39) et (43)
$$\begin{cases}(\mathcal{E}\mathcal{L}_0+\mathcal{F}\mathcal{M}_0)\dfrac{\partial l}{\partial\lambda}+(\mathcal{F}\mathcal{L}_0+\mathcal{G}\mathcal{M}_0)\dfrac{\partial m}{\partial\lambda}\\ \qquad\qquad=4\sqrt{pq}\,\dfrac{\lambda^2 V}{W^2}\left[\sqrt{p'}\,\dfrac{\partial\bar{x}_0}{\partial\lambda}+\sqrt{q'}\,\dfrac{\partial\bar{y}_0}{\partial\lambda}+\dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial\bar{z}_0}{\partial\lambda}\right]\\ (\mathcal{E}P_0+\mathcal{F}Q_0)\dfrac{\partial l}{\partial\lambda}+(\mathcal{F}P_0+\mathcal{G}Q_0)\dfrac{\partial m}{\partial\lambda}\\ \qquad\qquad=4\sqrt{pq}\,\dfrac{\lambda^2 U}{W^2}\left[\sqrt{p'}\,\dfrac{\partial\bar{x}_0}{\partial\lambda}+\sqrt{q'}\,\dfrac{\partial\bar{y}_0}{\partial\lambda}+\dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial\bar{z}_0}{\partial\lambda}\right].\end{cases}$$

Nous en déduisons les deux identités :

$$\begin{cases}\left(\overline{\mathcal{E}}_1\dfrac{\partial u_1}{\partial\lambda}+\overline{\mathcal{F}}_1\dfrac{\partial v_1}{\partial\lambda}\right)\dfrac{\partial u_1}{\partial u}-\left[(\mathcal{E}\mathcal{L}_0+\mathcal{F}\mathcal{M}_0)\dfrac{\partial l}{\partial\lambda}-(\mathcal{F}\mathcal{L}_0+\mathcal{G}\mathcal{M}_0)\dfrac{\partial m}{\partial\lambda}\right]=-\dfrac{4k\sqrt{pq}\,V}{W^2}\\ \left(\overline{\mathcal{E}}_1\dfrac{\partial u_1}{\partial\lambda}+\overline{\mathcal{F}}_1\dfrac{\partial v_1}{\partial\lambda}\right)\dfrac{\partial u_1}{\partial v}-\left[(\mathcal{E}P_0+\mathcal{F}Q_0)\dfrac{\partial l}{\partial\lambda}+(\mathcal{F}P_0+\mathcal{G}Q_0)\dfrac{\partial m}{\partial\lambda}\right]=-\dfrac{4k\sqrt{pq}\,U}{W^2}.\end{cases}$$

Enfin, rappelons encore les formules :

§ 9, (52*) $$\overline{\mathcal{E}}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2=\mathcal{E}_0,\qquad \overline{\mathcal{E}}_1\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial u_1}{\partial v}=\mathcal{F}_0,\qquad \overline{\mathcal{E}}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)^2=\mathcal{G}_0.$$

§ 9, (54) $$\overline{\mathcal{E}}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial\lambda}\right)^2+2\overline{\mathcal{F}}_1\frac{\partial u_1}{\partial\lambda}\frac{\partial v_1}{\partial\lambda}+\overline{\mathcal{G}}_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial\lambda}\right)^2=\frac{4k^2H}{W^2}+S\left(\frac{\partial x_0}{\partial\lambda}\right)^2.$$

§ 2, (23) $$\mathfrak{D}_0'^2=\frac{4pq}{H}.$$

D'après toutes ces formules, la comparaison des trois valeurs (5) et (5*) de $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{G}_1$ donne de suite les *trois* équations quadratiques pour les *deux* dérivées $\frac{\partial\lambda}{\partial u}, \frac{\partial\lambda}{\partial v}$ de la fonction inconnue λ :

$$(6)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)^2 - 2\frac{\sqrt{pq}\,V}{kH}\frac{\partial\lambda}{\partial u} + \frac{pq.V^2}{k^2H^2} - \frac{(\mathfrak{D}U+\mathfrak{D}'V)^2}{4k^2H} = 0, \\ \frac{\partial\lambda}{\partial u}\frac{\partial\lambda}{\partial v} - \frac{\sqrt{pq}\,U}{kH}\frac{\partial\lambda}{\partial u} - \frac{\sqrt{pq}\,V}{kH}\frac{\partial\lambda}{\partial v} - \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{D}'U^2+2\mathfrak{D}\mathfrak{D}''UV+\mathfrak{D}'\mathfrak{D}''V^2}{4k^2H} = 0, \\ \left(\frac{\partial\lambda}{\partial v}\right)^2 - 2\frac{\sqrt{pq}\,U}{kH}\frac{\partial\lambda}{\partial v} + \frac{pq.U^2}{k^2H^2} - \frac{(\mathfrak{D}'U+\mathfrak{D}''V)^2}{4k^2H} = 0. \end{cases}$$

Comme dans la première et dans la dernière de ces équations les trois premiers termes forment un carré parfait, on peut leur substituer les deux équations linéaires :

$$(7)\quad \begin{cases} \frac{\partial\lambda}{\partial u} = \frac{\sqrt{pq}}{kH}\cdot V + \frac{\varepsilon}{2k\sqrt{H}}(\mathfrak{D}U+\mathfrak{D}'V), \\ \frac{\partial\lambda}{\partial v} = \frac{\sqrt{pq}}{kH}\cdot U + \frac{\varepsilon'}{2k\sqrt{H}}(\mathfrak{D}'U+\mathfrak{D}''V), \end{cases}$$

où chacune des quantités ε, ε' est égale à l'unité, positive ou négative : $|\varepsilon| = |\varepsilon'| = 1$. Mais nous avons encore à satisfaire à la deuxième équation (6), qui par la substitution des valeurs (7) devient :

$$\varepsilon\varepsilon'(\mathfrak{D}U+\mathfrak{D}'V)(\mathfrak{D}'U+\mathfrak{D}''V) - (\mathfrak{D}\mathfrak{D}'U^2+2\mathfrak{D}\mathfrak{D}''UV+\mathfrak{D}'\mathfrak{D}''V^2) = 4\frac{pq}{H}UV.$$

L'équation (2) de Gauss nous montre qu'il faut et qu'il suffit de prendre ε, ε' concordantes, c'est-à-dire $\varepsilon = \varepsilon' = \pm 1$. Le double signe correspond à la séparation des transformations B_k en deux

classes que nous avons déjà distinguées [aperçu, n° 1]. Comme les propriétés sont les mêmes pour les deux classes, nous ferons les calculs pour une seule d'elles et nous remarquerons que le changement de signe en ε, ε' équivaut à changer $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$ dans leurs opposées $-\mathfrak{D}$, $-\mathfrak{D}'$, $-\mathfrak{D}''$, ce qui revient à remplacer la surface (S) par sa symétrique. Choisissons donc dans nos formules (7) : $\varepsilon = \varepsilon' = 1$, et écrivons les équations différentielles pour la fonction inconnue λ sous la forme définitive :

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\lambda}{\partial u} = \dfrac{\sqrt{pq}}{k\mathrm{H}} \cdot \mathrm{V} + \dfrac{1}{2k\sqrt{\mathrm{H}}} (\mathfrak{D}\mathrm{U} + \mathfrak{D}'\mathrm{V}) \\ \dfrac{\partial\lambda}{\partial v} = \dfrac{\sqrt{pq}}{k\mathrm{H}} \cdot \mathrm{U} + \dfrac{1}{2k\sqrt{\mathrm{H}}} (\mathfrak{D}'\mathrm{U} + \mathfrak{D}''\mathrm{V}). \end{cases}$$

On remarquera que les seconds membres de ces équations, linéaires homogènes en U, V, sont, par rapport à λ, des polynômes du deuxième degré.

Ils sont aussi linéaires en $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$; et comme, lorsque la surface (S) se déforme, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$ changent leurs valeurs, la fonction λ varie aussi, c'est-à-dire que les points de rencontre des surfaces transformées (S_1) avec les ∞^2 coniques C changent de position sur ces coniques à chaque déformation de (S). Remarquons encore qu'on peut écrire les équations (I) sous la forme équivalente

$$(\mathrm{I}^*) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\lambda}{\partial u} = \dfrac{1}{2k\sqrt{\mathrm{H}}} \left[\mathfrak{D}\mathrm{U} + (\mathfrak{D}' - \mathfrak{D}'_0)\,\mathrm{V} \right], \\ \dfrac{\partial\lambda}{\partial v} = \dfrac{1}{2k\sqrt{\mathrm{H}}} \left[(\mathfrak{D}' - \mathfrak{D}'_0)\,\mathrm{U} + \mathfrak{D}''\mathrm{V} \right]. \end{cases}$$

Si l'on suppose en particulier que la surface (S) se réduise à

une surface réglée R, dont les droites correspondent par déformation continue aux génératrices (v) du paraboloïde, on a :

$$\mathfrak{D}=0 \qquad \mathfrak{D}'=\mathfrak{D}'_0 \qquad \mathfrak{D}''=2\sqrt{H}\,\varphi(v),$$

et les formules actuelles (I*) se réduisent aux formules du paragraphe 4 :

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u}=0, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial v}=\frac{V\varphi(v)}{k}.$$

§ 33.

COMPLÈTE INTÉGRABILITÉ DU SYSTÈME (I).

La fonction inconnue λ des deux variables u, v doit satisfaire aux équations simultanées (I), ou, ce qui est la même chose, à l'équation aux différentielles totales (du type de Riccati):

$$2k\sqrt{H}\cdot d\lambda=\left[\frac{\sqrt{pq}}{kH}V+\frac{1}{2k\sqrt{H}}(\mathfrak{D}U+\mathfrak{D}'V)\right]du$$

$$+\left[\frac{\sqrt{pq}}{kH}U+\frac{1}{2k\sqrt{H}}(\mathfrak{D}'U+\mathfrak{D}''V)\right]dv.$$

Nous voulons démontrer que cette équation est complètement intégrable, c'est-à-dire qu'elle admet une solution λ, dépendant d'une constante arbitraire. Formons pour cela l'expression :

$$\Omega=\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\sqrt{pq}}{H}V+\frac{1}{2\sqrt{H}}(\mathfrak{D}U+\mathfrak{D}'V)\right]-\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\sqrt{pq}}{H}U+\frac{1}{2\sqrt{H}}(\mathfrak{D}'U+\mathfrak{D}''V)\right];$$

IMPRIMERIE NATIONALE.

nous aurons à prouver que Ω s'annule en vertu même des équations (I). Calculant effectivement Ω, on a d'abord :

$$\begin{aligned}
\Omega = {} & \frac{\sqrt{pq}}{H}(V'-U') + \sqrt{pq}\,V\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{H}\right) - \sqrt{pq}\,U\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{H}\right) \\
& + \frac{1}{2}(\mathfrak{D}U+\mathfrak{D}'V)\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{H}}\right) - \frac{1}{2}(\mathfrak{D}'U+\mathfrak{D}''V)\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{H}}\right) \\
& + \frac{\sqrt{pq}}{H}\frac{\partial V}{\partial\lambda}\left[\frac{\sqrt{pq}}{kH}U + \frac{1}{2k\sqrt{H}}(\mathfrak{D}U+\mathfrak{D}'V)\right] \\
& - \frac{\sqrt{pq}}{H}\frac{\partial U}{\partial\lambda}\left[\frac{\sqrt{pq}}{kH}V + \frac{1}{2k\sqrt{H}}(\mathfrak{D}'U+\mathfrak{D}''V)\right] \\
& + \frac{U}{2\sqrt{H}}\left(\frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial v}-\frac{\partial\mathfrak{D}'}{\partial u}\right) - \frac{V}{2\sqrt{H}}\left(\frac{\partial\mathfrak{D}''}{\partial u}-\frac{\partial\mathfrak{D}'}{\partial v}\right) + \frac{\mathfrak{D}'}{2\sqrt{H}}(V'-U') \\
& + \frac{1}{2\sqrt{H}}\left(\mathfrak{D}\frac{\partial U}{\partial\lambda}+\mathfrak{D}'\frac{\partial V}{\partial\lambda}\right)\cdot\left[\frac{\sqrt{pq}}{kH}U + \frac{1}{2k\sqrt{H}}(\mathfrak{D}'U+\mathfrak{D}''V)\right] \\
& - \frac{1}{2\sqrt{H}}\left(\mathfrak{D}'\frac{\partial U}{\partial\lambda}+\mathfrak{D}''\frac{\partial V}{\partial\lambda}\right)\left[\frac{\sqrt{pq}}{kH}V + \frac{1}{2k\sqrt{H}}(\mathfrak{D}U+\mathfrak{D}'V)\right].
\end{aligned}$$

Remarquons maintenant que, à cause des équations (3) de Codazzi, on a :

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial\mathfrak{D}}{\partial v}-\dfrac{\partial\mathfrak{D}'}{\partial u} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\log H}{\partial v}\mathfrak{D} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\log H}{\partial u}\mathfrak{D}', \\
\dfrac{\partial\mathfrak{D}''}{\partial u}-\dfrac{\partial\mathfrak{D}'}{\partial v} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\log H}{\partial v}\mathfrak{D}' + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\log H}{\partial u}\mathfrak{D}'',
\end{cases}$$

et d'autre part, le déterminant

$$\begin{vmatrix}
\mathfrak{D}\dfrac{\partial U}{\partial\lambda}+\mathfrak{D}'\dfrac{\partial V}{\partial\lambda} & \mathfrak{D}'\dfrac{\partial U}{\partial\lambda}+\mathfrak{D}''\dfrac{\partial V}{\partial\lambda} \\
\mathfrak{D}U+\mathfrak{D}'V & \mathfrak{D}'U+\mathfrak{D}''V
\end{vmatrix} = (\mathfrak{D}\mathfrak{D}''-\mathfrak{D}'^2)\left(V\frac{\partial U}{\partial\lambda}-U\frac{\partial V}{\partial\lambda}\right)$$

équivaut, d'après l'équation (2) de Gauss, à l'expression

$$\frac{4pq}{H}\left(U\frac{\partial V}{\partial\lambda}-V\frac{\partial U}{\partial\lambda}\right).$$

Substituant ces valeurs dans l'expression de Ω, on voit que Ω est une fonction linéaire entière de $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$; écrivons :

$$\Omega=\alpha\mathfrak{D}+\beta\mathfrak{D}'+\gamma\mathfrak{D}''+\delta.$$

Après des réductions évidentes, on trouve :

$$\alpha=\gamma=0,$$

et encore :

$$2\beta\sqrt{H}=\delta\frac{H}{\sqrt{pq}}=V'-U'+U\frac{\partial\log H}{\partial u}-V\frac{\partial\log H}{\partial v}+\frac{2\sqrt{pq}}{kH}\left(U\frac{\partial V}{\partial\lambda}-V\frac{\partial U}{\partial\lambda}\right).$$

Or nous avons démontré, au paragraphe 4, l'identité (30) :

$$U\frac{\partial V}{\partial\lambda}-V\frac{\partial U}{\partial\lambda}=k\left[\rho(U'+W)-\frac{1}{2}\frac{\partial\rho}{\partial u}U+\frac{1}{2}\frac{\partial\rho}{\partial v}V\right],$$

et, comme

$$\rho=\frac{H}{\sqrt{pq}},$$

nous avons :

$$V'-U'+U\frac{\partial\log H}{\partial u}-V\frac{\partial\log H}{\partial v}+\frac{2\sqrt{pq}}{kH}\left(U\frac{\partial V}{\partial\lambda}-V\frac{\partial U}{\partial\lambda}\right)=U'+V'+2W.$$

L'identité (29) du paragraphe 4 montre alors que cette expression est nulle. On en conclut que tous les coefficients α, β, γ, δ sont nuls et par suite $\Omega=0$; donc :

Les équations différentielles fondamentales (I) *forment un système complètement intégrable.*

§ 34.

LES TRANSFORMATIONS B_k DES DÉFORMÉES DU PARABOLOÏDE HYPERBOLIQUE.

Les équations (I) admettent donc une solution contenant une constante arbitraire pour laquelle on peut prendre la valeur qu'on veut attribuer à λ dans un point initial $F_0 \equiv (u_0 v_0)$ de la surface (S). Une telle fonction λ étant substituée dans les équations (1), celles-ci définissent une nouvelle surface (S_1) applicable sur le même paraboloïde. Lorsque la surface (S), entraînant les segments tangents FF_1 compris entre (S) et (S_1), s'applique sur le paraboloïde P_0, les extrêmes F_1 se disposent sur le paraboloïde homofocal P_k. Nous dirons que la surface (S_1) est dérivée de (S) par une transformation B_k. À ce point nous pouvons donc énoncer le résultat : *Toute surface* (S) *applicable sur le paraboloïde admet* ∞^1 *surfaces transformées* (S_1) *par une transformation* B_k, *et ces nouvelles surfaces* (S_1) *satisfont aux conditions b du paragraphe 30.*

Il nous reste à prouver qu'elles satisfont aussi aux premières conditions *a*.

Commençons par démontrer la propriété : *Tous les segments* FF_1 *qui unissent deux points correspondants* F, F_1 *de* (S), (S_1) *et qui sont, d'après la construction même, tangents en* F *à* (S), *touchent aussi, dans l'autre extrême* F_1, *la deuxième surface* (S_1).

D'après le paragraphe 1 [équation (10)], nous avons à prouver que le déterminant

$$\begin{vmatrix} l & m & 0 \\ \mathfrak{L}_0 + \frac{\partial l}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial u} & \mathfrak{M}_0 + \frac{\partial m}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial u} & \mathfrak{B} l + \mathfrak{B}' m \\ P_0 + \frac{\partial l}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial v} & Q_0 + \frac{\partial m}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial v} & \mathfrak{B}' l + \mathfrak{B}'' m \end{vmatrix}$$

s'annule, c'est-à-dire que l'on a :

$$(8)\quad \begin{cases} (\mathfrak{D}l+\mathfrak{D}'m)\left[lQ_0-mP_0+\left(l\frac{\partial m}{\partial\lambda}-m\frac{\partial l}{\partial\lambda}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial v}\right] \\ =(\mathfrak{D}'l+\mathfrak{D}''m)\left[l\mathfrak{M}_0-m\mathfrak{L}_0+\left(l\frac{\partial m}{\partial\lambda}-m\frac{\partial l}{\partial\lambda}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right]. \end{cases}$$

Or, comme nous l'avons vu au paragraphe 4, le déterminant

$$\begin{vmatrix} l & m & o \\ \mathfrak{L}_0 & \mathfrak{M}_0 & m \\ P_0 & Q_0 & l \end{vmatrix}$$

s'annule, c'est-à-dire :

$$(9)\qquad m(lQ_0-mP_0)=l(l\mathfrak{M}_0-m\mathfrak{L}_0).$$

D'ailleurs, comme

$$l=\frac{U}{W},\qquad m=\frac{V}{W},$$

si l'on substitue les valeurs de $\frac{\partial\lambda}{\partial u}$, $\frac{\partial\lambda}{\partial v}$, données par les équations (I) dans l'équation (8), celle-ci devient :

$$\mathfrak{D}U\left[lQ_0-mP_0+\frac{\sqrt{pq}}{kH}U\left(l\frac{\partial m}{\partial\lambda}-m\frac{\partial l}{\partial\lambda}\right)\right]$$

$$=\mathfrak{D}''V\left[l\mathfrak{M}_0-m\mathfrak{L}_0+\frac{\sqrt{pq}}{kH}V\left(l\frac{\partial m}{\partial\lambda}-m\frac{\partial l}{\partial\lambda}\right)\right].$$

Mais on a, à cause de l'équation (9) :

$$\frac{1}{U}(lQ_0-mP_0)=\frac{1}{V}(l\mathfrak{M}_0-m\mathfrak{L}_0),$$

et l'équation précédente peut s'écrire :

$$(\mathfrak{D}U^2 - \mathfrak{D}''V^2)\cdot\left[\frac{1}{V}(l\mathfrak{I}\mathfrak{C}_0 - m\underset{\sim}{\rho}_0) + \frac{\sqrt{pq}}{kH}\left(l\frac{\partial m}{\partial\lambda} - m\frac{\partial l}{\partial\lambda}\right)\right] = 0.$$

Sous cette forme on voit bien qu'elle est une identité, car, d'après l'équation (30) du paragraphe 4, le deuxième facteur entre crochets [ ] s'annule.

Nous en concluons que la surface primitive (S) et sa transformée (S_1) sont les deux nappes focales de la congruence des droites qui en joignent les points correspondants F et F_1.

Remarquons encore une autre propriété des transformations B_k qui résulte immédiatement de ce que l'équation aux différentielles totales en λ a la forme de Riccati. Il en suit : *Quatre surfaces* (S_1) *transformées de* (S) *par une transformation* B_k *coupent les* ∞^2 *coniques* C, *tracées dans les plans tangents de* (S), *suivant des groupes de quatre points d'égal rapport anharmonique.*

C'est le théorème énoncé au numéro III de l'aperçu.

§ 35.

CORRESPONDANCE DES LIGNES ASYMPTOTIQUES SUR (S) ET (S_1).

Pour compléter la démonstration des propriétés énoncées sous *a*, paragraphe 30, il reste à prouver que la congruence à nappes focales (S) et (S_1) est une congruence W, c'est-à-dire que les lignes asymptotiques de (S), (S_1) se correspondent. On pourrait le démontrer en calculant les coefficients $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}'_1$, $\mathfrak{D}''_1$ de la deuxième forme fondamentale de (S_1), qu'on trouverait proportionnels à $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$. Nous préférons ici une autre voie qui, utilisant les théorèmes de la première partie, conduit plus rapidement au bout,

et fait en même temps connaître d'autres propriétés intéressantes des transformations B_k.

Considérons sur une surface (S), d'abord quelconque, une ligne asymptotique a et soit $K = -\frac{1}{\rho^2}$ la courbure (négative) de la surface, s l'arc de l'asymptotique a. Comme le long de cette ligne on a :

$$\mathfrak{D}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\mathfrak{D}'\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \mathfrak{D}''\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 0,$$

on peut écrire :

$$\frac{\mathfrak{D}\frac{du}{ds} + \mathfrak{D}'\frac{dv}{ds}}{\frac{dv}{ds}} = -\frac{\mathfrak{D}'\frac{du}{ds} + \mathfrak{D}''\frac{dv}{ds}}{\frac{du}{ds}}.$$

Appelons R la valeur commune de ces deux rapports, d'où :

$$\begin{cases} \mathfrak{D}\frac{du}{ds} + \mathfrak{D}'\frac{dv}{ds} = R\frac{dv}{ds} \\ \mathfrak{D}'\frac{du}{ds} + \mathfrak{D}''\frac{dv}{ds} = -R\frac{du}{ds}. \end{cases}$$

Il suit de là :

$$\mathfrak{D}\mathfrak{D}'' = \mathfrak{D}'^2 - R^2,$$

ou encore :

$$R^2 = -K(\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2) = \frac{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}{\rho^2}.$$

Nous voyons donc que le long de l'asymptotique a on aura :

$$(10) \qquad \begin{cases} \mathfrak{D}\frac{du}{ds} + \mathfrak{D}'\frac{dv}{ds} = \pm\frac{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}}{\rho}\frac{dv}{ds} \\ \mathfrak{D}'\frac{du}{ds} + \mathfrak{D}''\frac{dv}{ds} = \mp\frac{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}}{\rho}\frac{du}{ds}. \end{cases}$$

Quelle est la signification géométrique du double signe? Il distingue les lignes asymptotiques à torsion positive (asymptotiques du premier système) de celles à torsion négative (deuxième système). On le reconnaît de suite si l'on a recours par exemple à la formule qui donne la torsion géodésique $\frac{1}{T_g}$ d'une ligne quelconque de la surface [1].

Supposons maintenant que notre surface (S) soit une déformée du paraboloïde et appliquons les formules (10) en formant, d'après les équations fondamentales (I), la dérivée de λ par rapport à s le long de a :

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{\partial\lambda}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial\lambda}{\partial v}\frac{dv}{ds};$$

il vient :

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{\sqrt{pq}}{k\mathrm{H}}\left[\left(\mathrm{V}\frac{du}{ds} + \mathrm{U}\frac{dv}{ds}\right) \pm \left(\mathrm{U}\frac{dv}{ds} - \mathrm{V}\frac{du}{ds}\right)\right].$$

Supposons, par exemple, pour fixer les idées, que l'asymptotique a soit à torsion positive; il vient simplement :

$$\frac{d\lambda}{ds} = 2\frac{\sqrt{pq}}{k\mathrm{H}}\mathrm{U}\frac{dv}{ds}. \tag{11}$$

[1] C'est la formule (voir mes *Lezioni*, etc., vol. I, page 199) :

$$\frac{1}{T_g} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}}\begin{vmatrix} \mathfrak{D}\frac{du}{ds} + \mathfrak{D}'\frac{dv}{ds} & \mathfrak{D}'\frac{du}{ds} + \mathfrak{D}''\frac{dv}{ds} \\ \mathcal{E}\frac{du}{ds} + \mathcal{F}\frac{dv}{ds} & \mathcal{F}\frac{du}{ds} + \mathcal{G}\frac{dv}{ds} \end{vmatrix};$$

pour une ligne asymptotique, cela donne, d'après les équations (10) du texte :

$$\frac{1}{T_g} = \pm\frac{1}{\rho};$$

comme la torsion géodésique de l'asymptotique coïncide avec la torsion ordinaire et que ρ est positif, on a bien le résultat énoncé.

Puisque le long de a les coefficients du polynôme en λ du second membre sont connus en fonction de s, l'équation (11) est une équation différentielle pour λ, considérée comme fonction de s le long de l'asymptotique a.

Imaginons maintenant que la surface (S) se déforme en se pliant autour de l'asymptotique a maintenue invariable. (On sait que les déformations d'une surface quelconque, avec une ligne asymptotique invariable, comportent une fonction arbitraire d'une variable.) Le second membre de notre équation différentielle (11) demeure toujours le même. Si l'on fixe donc la valeur initiale $\lambda = \lambda_0$ de λ pour une valeur initiale $s = s_0$ de s, la fonction $\lambda(s)$ restera toujours la même, dans toutes les configurations de (S). D'ailleurs la valeur initiale fixée pour λ fixe aussi, pour toute forme de (S), la surface transformée (S_1) sur laquelle la ligne a_1, qui correspond à la ligne a, sera donnée par les formules

$$x_1 = x + l\frac{\partial x}{\partial u} + m\frac{\partial x}{\partial v}, \quad \text{etc.}$$

Or, le long de la ligne a, les quantités

$$x,\ \frac{\partial x}{\partial u},\ \frac{\partial x}{\partial v},\ \lambda,\ l,\ m$$

restent toujours les mêmes et par suite : *La ligne a_1 reste fixe avec l'asymptotique a, et les segments FF_1, qui en joignent les points correspondants, conservent aussi une position invariable.* Maintenant, comme le plan tangent de la surface (S_1) en F_1 est le plan du segment FF_1 et de la tangente en F_1 à la ligne a_1, nous voyons que : *les surfaces (S_1) conservent toujours les mêmes normales le long de a_1.*

Or, parmi les configurations de (S) à ligne asymptotique a invariable, il y a aussi (§ 29) celle de la surface réglée R qui s'obtient en tirant, dans les points de a, les tangentes aux géodésiques g de (S) transformées des droites du paraboloïde (de l'un ou de l'autre système). Mais alors la transformée (S_1) est elle-même une sur-

IMPRIMERIE NATIONALE.

face réglée R_1 et la ligne a_1 est asymptotique de R_1; par suite elle est aussi asymptotique sur toutes les surfaces (S_1) dans leurs diverses configurations. Nous avons de la sorte établi le théorème :

Sur les deux nappes focales (S), (S_1) *d'une quelconque de nos congruences, les lignes asymptotiques se correspondent.*

§ 36.

PROPRIÉTÉS ULTÉRIEURES DES TRANSFORMATIONS B_k.

Poursuivons nos considérations géométriques, toujours en supposant que la surface (S) se déforme autour de l'asymptotique invariable a. Considérons pour chaque configuration de (S) la surface (S_1) transformée, fixée par un segment focal initial FF_1 dans le plan osculateur de a en F. Nous avons vu que la ligne asymptotique a_1 de (S_1), qui correspond à la ligne a, demeure toujours la même; mais je dis de plus que la surface (S_1) se déforme aussi autour de l'asymptotique invariable a_1. Pour le démontrer, remarquons que si l'on applique (S), dans une quelconque de ses configurations, sur le paraboloïde P_0, la ligne a occupera toujours sur P_0 la même position α, et les segments FF_1 issus des points de a, transportés sur P_0, occuperont aussi les mêmes positions. Leurs extrêmes F_1 se disposeront donc, sur le paraboloïde homofocal P_k, sur une ligne fixe α_1. Maintenant, à cause de la loi d'applicabilité donnée par l'affinité d'Ivory, si nous appliquons (S_1) sur P_0, la ligne a_1 occupera la position qui correspond sur P_0, dans l'affinité d'Ivory, à la ligne fixe α_1 de P_k. Nous avons donc le théorème :

Si l'on déforme la première nappe (S) *de l'une de nos congruences* W *autour de la ligne asymptotique invariable a, et si l'on tient fixe en outre un segment focal initial issu d'un point de a, la deuxième*

nappe (S_1) *se déforme aussi autour de la correspondante asymptotique invariable* a_1 [1].

Considérons encore cette particulière configuration de (S) donnée par la surface gauche R circonscrite, d'après le théorème de Chieffi, à (S) le long de l'asymptotique *a*. Sa transformée (S_1) devient alors la surface réglée homologue R_1 circonscrite à (S_1) le long de a_1; on a donc la proposition :

Les deux surfaces réglées R, R_1, *circonscrites le long de deux lignes asymptotiques correspondantes* a, a_1, *aux deux nappes* (S), (S_1) *d'une de nos congruences* W, *sont à leur tour les deux nappes focales d'une telle congruence.*

On peut tirer de là cette autre conséquence importante que : *la relation entre* (S) *et* (S_1) *est invertible, c'est-à-dire que* (S) *provient de* (S_1) *par une transformation* B_k *comme* (S_1) *de* (S). En effet, nous avons vu (§ 10) que la relation entre R et R_1 est invertible, d'où il suit que la même chose a lieu pour (S), (S_1); car si l'on applique (S_1) sur le paraboloïde P_0, les segments F_1F, entraînés par (S_1), se disposeront avec leurs extrèmes F sur le paraboloïde homofocal P_k.

Toutes ces propriétés que nous avons reconnues aux transformations B_k conduisent à regarder ces transformations sous deux aspects différents. En premier lieu on peut résoudre les transformations B_k en transformations de courbes : les lignes asymptotiques des déformées des quadriques. C'est ainsi que S. Lie a résolu les transformations des surfaces pseudosphériques dans les transformations des courbes à torsion constante, qui sont leurs lignes asymptotiques. En second lieu, en reprenant les considérations du paragraphe 30, nous pouvons regarder chaque défor-

[1] Nous remarquons, en passant, qu'une propriété parfaitement analogue a lieu pour toutes les congruences W *normales*, c'est-à-dire dans la transformation complémentaire des déformées des surfaces de révolution.

mée (S) de la quadrique comme enveloppe des ∞^1 surfaces réglées R circonscrites à (S), d'après le théorème de Chieffi, le long des asymptotiques d'un système. Les génératrices des surfaces R sont les tangentes des lignes géodésiques de (S) transformées des droites de la quadrique et forment donc une congruence normale, dont (S) est une nappe de la surface focale. Considérons une quelconque des transformées (S_1) de (S) par une B_k, et regardons aussi (S_1) comme enveloppe des ∞^2 surfaces réglées R_1 transformées des R. Les génératrices des R_1 appartiennent à la congruence engendrée par les génératrices du paraboloïde homofocal P_k entraîné par P_0 dans son roulement sur R. D'après cela nous pouvons regarder les transformations B_k sous l'aspect suivant :

Faisons rouler le paraboloïde P_0, *entraînant le paraboloïde homofocal* P_k, *sur une surface* (S) *quelconque applicable sur* P_0. *Les génératrices* (*d'un système*) *de* P_k *engendrent dans ce roulement un complexe de droites, qui se décompose en* ∞^1 *congruences normales, dont les premières nappes de la surface focale sont les surfaces* (S_1) *applicables sur le paraboloïde* P_0 *et transformées de* (S) *par* B_k.

En général, la recherche de *toutes* les congruences normales, contenues dans un complexe donné de droites, équivaut à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre en deux variables. D'après le théorème fondamental de Cauchy, la congruence normale est fixée si l'on fixe (arbitrairement) *une* surface réglée élémentaire de la congruence. Dans notre cas, il suffit de prendre pour surface élémentaire la transformée R_1 d'une des surfaces R; alors, une nappe de la focale de la congruence normale, individuée dans le complexe, devient la surface transformée (S_1).

§ 37.

CORRESPONDANCE DES SYSTÈMES CONJUGUÉS PERSISTANTS SUR (S) ET (S_1).

À tout système conjugué de (S) correspond, nous l'avons vu, un système conjugué sur (S_1). Or, parmi les systèmes conjugués de (S) il y en a un parfaitement déterminé, qui se conserve conjugué lorsque (S) s'applique sur le paraboloïde P_0; nous l'appelons le système conjugué *persistant* de (S). Cela posé, nous démontrons le théorème suivant :

Dans les congruences W *avec les deux nappes focales* (S), (S_1) *applicables sur le paraboloïde, les systèmes conjugués persistants des deux nappes se correspondent.*

Comme la deuxième forme fondamentale de (S) est :

$$\mathfrak{D}du^2 + 2\mathfrak{D}'dudv + \mathfrak{D}''dv^2,$$

et celle du paraboloïde

$$2\mathfrak{D}'_0 dudv,$$

l'équation différentielle du système conjugué persistant sur (S), qui s'obtient en égalant à zéro le Jacobien des deux formes, sera :

$$\mathfrak{D}du^2 - \mathfrak{D}''dv^2 = 0. \tag{12}$$

Pour l'autre surface (S_1) la deuxième forme, en coordonnées u, v, est proportionnelle (§ 35) à :

$$\mathfrak{D}du^2 + 2\mathfrak{D}'dudv + \mathfrak{D}''dv^2.$$

Or, dans l'applicabilité de (S_1) sur le paraboloïde P_0, les transformées des droites de P_0 sont les lignes (u_1) et (v_1); donc la deuxième forme fondamentale du paraboloïde est proportionnelle, en coordonnées u_1, v_1, au produit $du_1 dv_1$, et par conséquent, en coordonnées u et v, à :

$$\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}+\frac{\partial u_1}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial u}\right)du+\left(\frac{\partial u_1}{\partial v}+\frac{\partial u_1}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial v}\right)dv\right]\times\left(\frac{\partial \lambda}{\partial u}du+\frac{\partial \lambda}{\partial v}dv\right),$$

que nous écrivons :

$$\Delta du^2+2\Delta' du dv+\Delta'' dv^2,$$

en posant :

$$\Delta=\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}+\frac{\partial u_1}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial u}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial u},\quad 2\Delta'=\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}+\frac{\partial u_1}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial u}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial v}+\left(\frac{\partial u_1}{\partial v}+\frac{\partial u_1}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial v}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial u},$$

$$\Delta''=\left(\frac{\partial u_1}{\partial v}+\frac{\partial u_1}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial v}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial v}.$$

Donc l'équation différentielle du système conjugué persistant sur (S_1) sera :

$$(\mathfrak{D}\Delta'-\mathfrak{D}'\Delta)du^2+(\mathfrak{D}\Delta''-\mathfrak{D}''\Delta)dudv+(\mathfrak{D}'\Delta''-\mathfrak{D}''\Delta')dv^2=0.$$

Elle coïncide avec l'équation (12) si l'on a :

$$\mathfrak{D}\Delta''-\mathfrak{D}''\Delta=0;$$

nous avons donc à démontrer l'identité :

$$\mathfrak{D}\left(\frac{\partial u_1}{\partial v}+\frac{\partial u_1}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial v}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial v}-\mathfrak{D}''\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}+\frac{\partial u_1}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial u}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial u}=0.$$

Comme, d'après les formules (51) et (55), § 9,

$$\frac{\partial u_1}{\partial u} = 4\sqrt{pq}\,\frac{\lambda^2 V}{W^2}, \qquad \frac{\partial u_1}{\partial v} = 4\sqrt{pq}\,\frac{\lambda^2 U}{W^2}, \qquad \frac{\partial u_1}{\partial \lambda} = -2\,\frac{k\lambda^2 H}{W^2},$$

l'identité à démontrer devient :

$$\mathfrak{D}\left(2\sqrt{pq}\,U - kH\frac{\partial\lambda}{\partial v}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial v} - \mathfrak{D}''\left(2\sqrt{pq}\,V - kH\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial u} = 0,$$

ou encore, à cause des équations fondamentales (I) :

$$\mathfrak{D}\left[pqU^2 - \frac{H}{4}(\mathfrak{D}'U + \mathfrak{D}''V)^2\right] - \mathfrak{D}''\left[pqV^2 - \frac{H}{4}(\mathfrak{D}U + \mathfrak{D}'V)^2\right]$$
$$= (\mathfrak{D}U^2 - \mathfrak{D}''V^2)\left[pq + \frac{H}{4}(\mathfrak{D}\mathfrak{D}'' - \mathfrak{D}'^2)\right] = 0.$$

C'est bien une identité, car, d'après l'équation de Gauss :

$$\mathfrak{D}\mathfrak{D}'' - \mathfrak{D}'^2 = -\frac{4pq}{H}.$$

Le théorème est démontré et nous remarquons qu'il n'est pas même en défaut dans le cas des déformées réglées, car alors le système conjugué persistant se réduit aux génératrices rectilignes.

§ 38.

SURFACES DÉFORMÉES DE L'HYPERBOLOÏDE À UNE NAPPE.

Passons maintenant aux déformées générales de l'hyperboloïde à une nappe. En reprenant les notations des paragraphes 12 et suivants, nous supposerons que (S) soit une déformée quelconque de

l'hyperboloïde, définie intrinsèquement par le ds^2 de l'hyperboloïde et par sa deuxième forme fondamentale :

$$\mathfrak{D}du^2 + 2\mathfrak{D}'dudv + \mathfrak{D}''dv^2.$$

Les coefficients $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$ auront uniquement à satisfaire à l'équation de Gauss :

$$\mathfrak{D}\mathfrak{D}'' - \mathfrak{D}'^2 = -\frac{4abc}{(u+v)^4 \cdot \rho}, \tag{13}$$

et aux équations de Codazzi :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathfrak{D}}{\partial v} - \dfrac{\partial \mathfrak{D}'}{\partial u} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \log \rho}{\partial v}\mathfrak{D} + \left(\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \log \rho}{\partial u} + \dfrac{2}{u+v}\right)\mathfrak{D}', \\ \dfrac{\partial \mathfrak{D}''}{\partial u} - \dfrac{\partial \mathfrak{D}'}{\partial v} = \left(\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \log \rho}{\partial v} + \dfrac{2}{u+v}\right)\mathfrak{D}' + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \log \rho}{\partial u}\mathfrak{D}''. \end{cases} \tag{14}$$

Suivant la méthode générale décrite au paragraphe 30, considérons la surface (S_1) décrite par le point (x_1, y_1, z_1), dont les coordonnées sont données par les formules :

$$x_1 = x + l\frac{\partial x}{\partial u} + m\frac{\partial x}{\partial v}, \quad \text{etc.} \tag{15}$$

Ici, l, m ont les valeurs assignées par les formules (65), (66), § 12 (avec la détermination supérieure des signes) et θ est une fonction inconnue de u, v que nous aurons à déterminer. Calculons avant tout l'élément linéaire :

$$ds_1^2 = \mathcal{E}_1 du^2 + 2\mathcal{F}_1 dudv + \mathcal{G}_1 dv^2$$

de (S_1). La dérivation des formules (15) donne :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial u} = \mathcal{L}_0 \dfrac{\partial x}{\partial u} + \mathcal{M}_0 \dfrac{\partial x}{\partial v} + \mathfrak{D}'_0 m \mathrm{X} + \left[\dfrac{\partial l}{\partial \theta}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial m}{\partial \theta}\dfrac{\partial x}{\partial v}\right]\dfrac{\partial \theta}{\partial u} + [\mathfrak{D} l + (\mathfrak{D}' - \mathfrak{D}'_0) m]\mathrm{X}, \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v} = \mathrm{P}_0 \dfrac{\partial x}{\partial u} + \mathrm{Q}_0 \dfrac{\partial x}{\partial v} + \mathfrak{D}'_0 l \mathrm{X} + \left[\dfrac{\partial l}{\partial \theta}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial m}{\partial \theta}\dfrac{\partial x}{\partial v}\right]\dfrac{\partial}{\partial v} + [(\mathfrak{D}' - \mathfrak{D}'_0) l + \mathfrak{D}'' m]\mathrm{X}, \end{cases}$$

où $\mathcal{L}_0$, $\mathcal{M}_0$, P_0, Q_0 ont les valeurs (69), § 13. Considérons en particulier la surface (S) réduite à l'hyperboloïde Q_0 et la surface (S_1) réduite à une génératrice (θ) de l'hyperboloïde homofocal Q_k. Faisant usage des mêmes notations qu'au paragraphe 31, nous aurons :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial u} = \mathcal{L}_0 \dfrac{\partial x_0}{\partial u} + \mathcal{M}_0 \dfrac{\partial x_0}{\partial v} + \mathfrak{D}'_0 m \mathrm{X}_0, \\ \dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial v} = \mathrm{P}_0 \dfrac{\partial x_0}{\partial u} + \mathrm{Q}_0 \dfrac{\partial x_0}{\partial v} + \mathfrak{D}'_0 l \mathrm{X}_0, \\ \dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta} = \dfrac{\partial l}{\partial \theta}\dfrac{\partial x_0}{\partial u} + \dfrac{\partial m}{\partial \theta}\dfrac{\partial x_0}{\partial v}. \end{cases}$$

De ces formules, à l'aide des mêmes procédés qu'au paragraphe 31, on tire pour les valeurs cherchées de $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{G}_1$:

$$(16)\quad \begin{cases} \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_0 + 2\left[(\mathcal{E}\mathcal{L}_0 + \mathcal{F}\mathcal{M}_0)\dfrac{\partial l}{\partial \theta} + (\mathcal{F}\mathcal{L}_0 + \mathcal{G}\mathcal{M}_0)\dfrac{\partial m}{\partial \theta}\right]\dfrac{\partial \theta}{\partial u} + \mathrm{S}\left(\dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta}\right)^2\left(\dfrac{\partial \theta}{\partial u}\right)^2 \\ \qquad + 2\,\mathfrak{D}'_0 m[\mathfrak{D} l + (\mathfrak{D}' - \mathfrak{D}'_0) m] + [\mathfrak{D} l + (\mathfrak{D}' - \mathfrak{D}'_0) m]^2, \\ \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_0 + \left[(\mathcal{E}\mathrm{P}_0 + \mathcal{F}\mathrm{Q}_0)\dfrac{\partial l}{\partial \theta} + (\mathcal{F}\mathrm{P}_0 + \mathcal{G}\mathrm{Q}_0)\dfrac{\partial m}{\partial \theta}\right]\dfrac{\partial \theta}{\partial u} \\ \qquad + \left[(\mathcal{E}\mathcal{L}_0 + \mathcal{F}\mathcal{M}_0)\dfrac{\partial l}{\partial \theta} + (\mathcal{F}\mathcal{L}_0 + \mathcal{G}\mathcal{M}_0)\dfrac{\partial m}{\partial \theta}\right]\dfrac{\partial \theta}{\partial v} \\ \qquad + \mathrm{S}\left(\dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta}\right)^2 \dfrac{\partial \theta}{\partial u}\dfrac{\partial \theta}{\partial v} + \mathfrak{D}'_0 m[(\mathfrak{D}' - \mathfrak{D}'_0) l + \mathfrak{D}'' m] \\ \qquad + \mathfrak{D}'_0 l[\mathfrak{D} l + (\mathfrak{D}' - \mathfrak{D}'_0) m] \\ \qquad + [\mathfrak{D} l + (\mathfrak{D}' - \mathfrak{D}'_0) m]\cdot[(\mathfrak{D}' - \mathfrak{D}'_0) l + \mathfrak{D}'' m], \\ \mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_0 + 2\left[(\mathcal{E}\mathrm{P}_0 + \mathcal{F}\mathrm{Q}_0)\dfrac{\partial l}{\partial \theta} + (\mathcal{F}\mathrm{P}_0 + \mathcal{G}\mathrm{Q}_0)\dfrac{\partial m}{\partial \theta}\right]\dfrac{\partial \theta}{\partial v} + \mathrm{S}\left(\dfrac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta}\right)^2\left(\dfrac{\partial \theta}{\partial v}\right) \\ \qquad + 2\mathfrak{D}'_0 l[(\mathfrak{D}' - \mathfrak{D}'_0) l + \mathfrak{D}'' m] + [(\mathfrak{D}' - \mathfrak{D}'_0) l + \mathfrak{D}'' m]^2, \end{cases}$$

IMPRIMERIE NATIONALE.

où $\mathcal{E}_0$, $\mathcal{F}_0$, $\mathcal{G}_0$ ont les valeurs données par les formules (83), § 15.

Nous avons maintenant à déterminer la fonction inconnue $\theta(u, v)$ par les conditions d'identité des deux éléments linéaires :

$$\mathcal{E}_1 du^2 + 2\mathcal{F}_1 du dv + \mathcal{G}_1 dv^2, \qquad \overline{\mathcal{E}}_1 du_1^2 + 2\overline{\mathcal{F}}_1 du_1 dv_1 + \overline{\mathcal{G}}_1 dv_1^2,$$

les fonctions u_1, v_1 de u, v étant exprimées par les formules d'applicabilité (87), § 16 (déduites de l'affinité d'Ivory), tandis que $\overline{\mathcal{E}}_1$, $\overline{\mathcal{F}}_1$, $\overline{\mathcal{G}}_1$ ont les valeurs (89), § 16. Ainsi, on devra avoir :

$$(16^*)\quad \begin{cases} \mathcal{E}_1 = \overline{\mathcal{E}}_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2 + 2\left(\overline{\mathcal{E}}_1 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \overline{\mathcal{F}}_1 \frac{\partial v_1}{\partial \theta}\right)\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial \theta}{\partial u} \\ \qquad\qquad + \left[\overline{\mathcal{E}}_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial \theta}\right)^2 + 2\overline{\mathcal{F}}_1 \frac{\partial u_1}{\partial \theta}\frac{\partial v_1}{\partial \theta} + \overline{\mathcal{G}}_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial \theta}\right)^2\right]\left(\frac{\partial \theta}{\partial u}\right)^2, \\ \mathcal{F}_1 = \overline{\mathcal{E}}_1 \frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial u_1}{\partial v} + \left(\overline{\mathcal{E}}_1 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \overline{\mathcal{F}}_1 \frac{\partial v_1}{\partial \theta}\right)\cdot\left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial \theta}{\partial v}\right) \\ \qquad\qquad + \left[\overline{\mathcal{E}}_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial \theta}\right)^2 + 2\overline{\mathcal{F}}_1 \frac{\partial u_1}{\partial \theta}\frac{\partial v_1}{\partial \theta} + \overline{\mathcal{G}}_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial \theta}\right)^2\right]\frac{\partial \theta}{\partial u}\frac{\partial \theta}{\partial v}, \\ \mathcal{G}_1 = \overline{\mathcal{E}}_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)^2 + 2\left(\overline{\mathcal{E}}_1 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \overline{\mathcal{F}}_1 \frac{\partial v_1}{\partial \theta}\right)\frac{\partial u_1}{\partial v}\frac{\partial \theta}{\partial v} \\ \qquad\qquad + \left[\overline{\mathcal{E}}_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial \theta}\right)^2 + 2\overline{\mathcal{F}}_1 \frac{\partial u_1}{\partial \theta}\frac{\partial v_1}{\partial \theta} + \overline{\mathcal{G}}_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial \theta}\right)^2\right]\left(\frac{\partial \theta}{\partial v}\right)^2. \end{cases}$$

C'est de la comparaison des formules (16) et (16*) que nous devons tirer les équations différentielles caractéristiques pour θ, comme nous l'avons fait au paragraphe 32 pour λ, dans le cas du paraboloïde.

§ 39.

LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES POUR LA FONCTION θ.

Pour comparer les valeurs (16) et (16*) de $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{G}_1$ il faut avant tout rappeler les identités suivantes :

§ 16, (93) $$\frac{\partial u_1}{\partial u}=\frac{2abc}{a'b'c'}\,\frac{1+\sin\theta}{\Psi^2}\cdot V,\qquad \frac{\partial u_1}{\partial v}=\frac{2abc}{a'b'c'}\,\frac{1+\sin\theta}{\Psi^2}\cdot U,$$

§ 17, (96) $$\overline{\mathcal{E}}_1\frac{\partial u_1}{\partial\theta}+\overline{\mathcal{F}}_1\frac{\partial v_1}{\partial\theta}=-\frac{2\Psi^2}{(1+\sin\theta)W^2}\left[a'\sin\theta\frac{\partial\bar{x}_0}{\partial\theta}-b'\cos\theta\frac{\partial\bar{y}_0}{\partial\theta}+c'\frac{\partial\bar{z}_0}{\partial\theta}+k\right],$$

§ 15, (82) et (85)
$$\begin{cases}(\mathcal{E}\mathfrak{L}_0+\mathcal{F}\mathfrak{M}_0)\dfrac{\partial l}{\partial\theta}+(\mathcal{F}\mathfrak{L}_0+\mathcal{G}\mathfrak{M}_0)\dfrac{\partial m}{\partial\theta}\\ \qquad=-\dfrac{4abc}{a'b'c'}\dfrac{V}{W^2}\left[a'\sin\theta\dfrac{\partial\bar{x}_0}{\partial\theta}-b'\cos\theta\dfrac{\partial\bar{y}_0}{\partial\theta}+c'\dfrac{\partial\bar{z}_0}{\partial\theta}\right],\\ (\mathcal{E}P_0+\mathcal{F}Q_0)\dfrac{\partial l}{\partial\theta}+(\mathcal{F}P_0+\mathcal{G}Q_0)\dfrac{\partial m}{\partial\theta}\\ \qquad=-\dfrac{4abc}{a'b'c'}\dfrac{U}{W^2}\left[a'\sin\theta\dfrac{\partial\bar{x}_0}{\partial\theta}-b'\cos\theta\dfrac{\partial\bar{y}_0}{\partial\theta}+c'\dfrac{\partial\bar{z}_0}{\partial\theta}\right],\end{cases}$$

§ 16 $$\overline{\mathcal{E}}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2=\mathcal{E}_0,\qquad \overline{\mathcal{E}}_1\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial u_1}{\partial v}=\mathcal{F}_0,\qquad \overline{\mathcal{E}}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)^2=\mathcal{G}_0,$$

§ 18 $$\overline{\mathcal{E}}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial\theta}\right)^2+2\overline{\mathcal{F}}_1\frac{\partial u_1}{\partial\theta}\frac{\partial v_1}{\partial\theta}+\overline{\mathcal{G}}_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial\theta}\right)^2-S\left(\frac{\partial\bar{x}_0}{\partial\theta}\right)^2=\frac{4k^2abc}{a'^2b'^2c'^2}\frac{(u+v)^2\rho}{W^2}.$$

Déduisons encore des formules précédentes les deux suivantes :

$$\begin{cases}\left(\overline{\mathcal{E}}_1\dfrac{\partial u_1}{\partial\theta}+\overline{\mathcal{F}}_1\dfrac{\partial u_1}{\partial\theta}\right)\dfrac{\partial u_1}{\partial u}-\left[(\mathcal{E}\mathfrak{L}_0+\mathcal{F}\mathfrak{M}_0)\dfrac{\partial l}{\partial\theta}+(\mathcal{F}\mathfrak{L}_0+\mathcal{G}\mathfrak{M}_0)\dfrac{\partial m}{\partial\theta}\right]=-\dfrac{4kabc}{a'b'c'}\dfrac{V}{W^2},\\ \left(\overline{\mathcal{E}}_1\dfrac{\partial u_1}{\partial\theta}+\overline{\mathcal{F}}_1\dfrac{\partial v_1}{\partial\theta}\right)\dfrac{\partial u_1}{\partial v}-\left[(\mathcal{E}P_0+\mathcal{F}Q_0)\dfrac{\partial l}{\partial\theta}+(\mathcal{F}P_0+\mathcal{G}Q_0)\dfrac{\partial m}{\partial\theta}\right]=-\dfrac{4kabc}{a'b'c'}\dfrac{U}{W^2},\end{cases}$$

et enfin, rappelons-nous que l'on a :

$$l=(u+v)\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{W}},\qquad m=(u+v)\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{W}}.$$

D'après toutes ces formules, nous trouvons que les conditions imposées se traduisent dans les trois équations quadratiques suivantes en $\frac{\partial\theta}{\partial u}$, $\frac{\partial\theta}{\partial v}$:

$$(\alpha)\quad\begin{cases}\dfrac{4k^2abc}{a'^2b'^2c'^2}(u+v)^2\rho\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2-\dfrac{8kabc}{a'b'c'}\mathrm{V}\dfrac{\partial\theta}{\partial u}\\ \qquad-(u+v)^2(\mathfrak{D}\mathrm{U}+\mathfrak{D}'\mathrm{V})^2+(u+v)^2\mathfrak{D}_0'^2\mathrm{V}^2=0,\\ \dfrac{4k^2abc}{a'^2b'^2c'^2}(u+v)^2\rho\dfrac{\partial\theta}{\partial u}\dfrac{\partial\theta}{\partial v}-\dfrac{4kabc}{a'b'c'}\left(\mathrm{U}\dfrac{\partial\theta}{\partial u}+\mathrm{V}\dfrac{\partial\theta}{\partial v}\right)\\ \qquad-(u+v)^2\left[\mathfrak{D}\mathfrak{D}'\mathrm{U}^2+2\mathfrak{D}\mathfrak{D}''\mathrm{U}\mathrm{V}+\mathfrak{D}'\mathfrak{D}''\mathrm{V}^2\right]=0,\\ \dfrac{4k^2abc}{a'^2b'^2c'^2}(u+v)^2\rho\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2-\dfrac{8kabc}{a'b'c'}\mathrm{U}\dfrac{\partial\theta}{\partial v}\\ \qquad-(u+v)^2(\mathfrak{D}'\mathrm{U}+\mathfrak{D}''\mathrm{V})^2+(u+v)^2\mathfrak{D}_0'^2\mathrm{U}^2=0.\end{cases}$$

Comme l'on a :

$$\mathfrak{D}_0'^2=\frac{4abc}{(u+v)^4\rho},$$

la première et la dernière des équations (α) donnent de suite :

$$\frac{\partial\theta}{\partial u}=\frac{a'b'c'}{k(u+v)^2\rho}\cdot\mathrm{V}+\varepsilon\frac{a'b'c'}{2k\sqrt{abc}\sqrt{\rho}}(\mathfrak{D}\mathrm{U}+\mathfrak{D}\mathrm{V}),$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial v}=\frac{a'b'c'}{k(u+v)^2\rho}\cdot\mathrm{U}+\varepsilon'\frac{a'b'c'}{2k\sqrt{abc}\sqrt{\rho}}(\mathfrak{D}'\mathrm{U}+\mathfrak{D}''\mathrm{V}),$$

où ε, ε' ont la même signification ± 1 qu'au paragraphe 32. Mais l'équation (13) de Gauss démontre alors que pour satisfaire aussi à la deuxième équation (α), il faut et il suffit de prendre ε, ε' concordantes. Nous ferons (C. § 32) $\varepsilon = \varepsilon' = 1$, et les équations différentielles pour θ prendront la forme définitive :

$$(\mathrm{II}) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \theta}{\partial u} = \dfrac{a'b'c'}{k(u+v)^2\rho} \cdot \mathrm{V} + \dfrac{a'b'c'}{2k\sqrt{abc}\sqrt{\rho}} (\mathfrak{D}\mathrm{U} + \mathfrak{D}'\mathrm{V}), \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial v} = \dfrac{a'b'c'}{k(u+v)^2\rho} \cdot \mathrm{U} + \dfrac{a'b'c'}{2k\sqrt{abc}\sqrt{\rho}} (\mathfrak{D}'\mathrm{U} + \mathfrak{D}''\mathrm{V}). \end{cases}$$

On les peut écrire aussi sous la forme équivalente :

$$(\mathrm{II}^*) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \theta}{\partial u} = \dfrac{a'b'c'}{2k\sqrt{abc}\sqrt{\rho}} [\mathfrak{D}\mathrm{U} + (\mathfrak{D}' - \mathfrak{D}'_0)\,\mathrm{V}], \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial v} = \dfrac{a'b'c'}{2k\sqrt{abc}\sqrt{\rho}} [(\mathfrak{D}' - \mathfrak{D}'_0)\,\mathrm{U} + \mathfrak{D}''\mathrm{V}]. \end{cases}$$

Lorsqu'on prend pour (S) une déformée réglée de l'hyperboloïde, on a :

$$\mathfrak{D} = 0, \qquad \mathfrak{D}' = \mathfrak{D}'_0, \qquad \mathfrak{D}'' = 2\sqrt{abc}\sqrt{\rho} \cdot \varphi(v),$$

et les équations ci-dessus se réduisent aux équations :

$$\frac{\partial \theta}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial \theta}{\partial} = \frac{a'b'c'}{k} \mathrm{V} \varphi(v).$$

qui définissent (§ 13) les transformations B_k des déformées gauches de l'hyperboloïde.

§ 40.

CONDITIONS D'INTÉGRABILITÉ DU SYSTÈME (II).

Nous allons maintenant démontrer (C. § 33) que les équations différentielles simultanées (II) forment un système complètement intégrable. À cet effet, il faut prouver que l'expression

$$\Omega = \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{V}{(u+v)^2\rho} + \frac{1}{2\sqrt{abc}\sqrt{\rho}}(\mathfrak{D}U + \mathfrak{D}'V)\right] - \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{U}{(u+v)^2\rho} + \frac{1}{2\sqrt{abc}\sqrt{\rho}}(\mathfrak{D}'U + \mathfrak{D}''V)\right.$$

s'annule, en vertu même des équations (II). Le calcul effectif nous donne pour Ω :

$$\begin{aligned}\Omega = {} & \frac{V'-U'}{(u+v)^2\rho} + \frac{V}{(u+v)^2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\rho}\right) - \frac{U}{(u+v)^2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{2(U-V)}{(u+v)^3\rho} + \frac{\mathfrak{D}'}{2\sqrt{abc}\sqrt{\rho}}(V'-U') \\ & + \frac{1}{2\sqrt{abc}}(\mathfrak{D}U + \mathfrak{D}'V)\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\right) - \frac{1}{2\sqrt{abc}}(\mathfrak{D}'U + \mathfrak{D}''V)\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\right) \\ & + \frac{1}{2\sqrt{abc}\sqrt{\rho}}\left[U\left(\frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial v} - \frac{\partial\mathfrak{D}'}{\partial u}\right) - V\left(\frac{\partial\mathfrak{D}''}{\partial u} - \frac{\partial\mathfrak{D}'}{\partial v}\right)\right] \\ & + \frac{1}{(u+v)^2\rho}\frac{\partial V}{\partial\theta}\left[\frac{a'b'c'}{k(u+v)^2\rho}U + \frac{a'b'c'}{2k\sqrt{abc}\sqrt{\rho}}(\mathfrak{D}'U + \mathfrak{D}''V)\right] \\ & - \frac{1}{(u+v)^2\rho}\frac{\partial U}{\partial\theta}\left[\frac{a'b'c'}{k(u+v)^2\rho}V + \frac{a'b'c'}{2k\sqrt{abc}\sqrt{\rho}}(\mathfrak{D}U + \mathfrak{D}'V)\right] \\ & + \frac{a'b'c'}{2k\sqrt{abc}(u+v)^2\rho^{\frac{3}{2}}}\left[U\left(\mathfrak{D}\frac{\partial U}{\partial\theta} + \mathfrak{D}'\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) - V\left(\mathfrak{D}'\frac{\partial U}{\partial\theta} + \mathfrak{D}''\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)\right] \\ & + \frac{a'b'c'}{4kabc\rho}(\mathfrak{D}\mathfrak{D}'' - \mathfrak{D}'^2)\left(V\frac{\partial U}{\partial\theta} + U\frac{\partial V}{\partial\theta}\right).\end{aligned}$$

Substituons, dans cette expression de Ω, les valeurs (13) et (14) des quantités :

$$\mathfrak{D}\mathfrak{D}'' - \mathfrak{D}'^2, \qquad \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial v} - \frac{\partial \mathfrak{D}'}{\partial u}, \qquad \frac{\partial \mathfrak{D}''}{\partial u} - \frac{\partial \mathfrak{D}'}{\partial v};$$

alors Ω devient une fonction linéaire entière de $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$, que nous écrivons :

$$\Omega = \alpha\mathfrak{D} + \beta\mathfrak{D}' + \gamma\mathfrak{D}'' + \delta.$$

On trouve de suite :

$$\alpha = \gamma = 0,$$

et encore :

$$2\sqrt{abc}\sqrt{\rho}\,\beta = (u+v)^2\rho\cdot\delta = V' - U' + \frac{\partial \log\rho}{\partial u}U - \frac{\partial \log\rho}{\partial v}V + \frac{2}{u+v}(U-V) + \frac{2a'b'c'}{k(u+v)^2\rho}\left(U\frac{\partial V}{\partial\theta} - V\frac{\partial U}{\partial\theta}\right).$$

Or cette dernière expression, multipliée par $abc.(u+v)^2\rho$, devient :

$$\begin{aligned}
&(V'-U')\left[b^2c^2(1+uv)^2 + a^2c^2(u-v)^2 + a^2b^2(1-uv)^2\right]\\
&+2U\left[b^2c^2v(1+uv) + a^2c^2(u-v) - a^2b^2v(1-uv)\right]\\
&-2V\left[b^2c^2u(1+uv) - a^2c^2(u-v) - a^2b^2u(1-uv)\right]\\
&+2\frac{abc\cdot a'b'c'}{k}\left(U\frac{\partial V}{\partial\theta} - V\frac{\partial U}{\partial\theta}\right),
\end{aligned}$$

et celle-ci est identiquement nulle, comme nous l'avons remarqué au paragraphe 13, en calculant la quantité que nous y avons indiquée par $\mathfrak{H}$.

On en conclut que tous les coefficients α, β, γ, δ dans Ω s'an-

nulent et par suite : *Les équations* (II) *forment un système complètement intégrable.* La solution générale θ de ce système contient donc une constante arbitraire, que l'on fixera en donnant la valeur initiale θ_0 de θ pour $u = u_0$, $v = v_0$.

Remarquons enfin, comme au paragraphe 14, que les équations (II) ont la forme de Riccati par rapport au paramètre

$$\lambda = \operatorname{tang} \frac{\theta}{2}.$$

§ 41.

LES TRANSFORMATIONS B_k POUR LES DÉFORMÉES DE L'HYPERBOLOÏDE À UNE NAPPE.

Les propriétés fondamentales qui assurent l'existence des transformations B_k pour les déformées générales de l'hyperboloïde à une nappe sont établies, et nous pouvons en tirer les mêmes conséquences que dans le cas des déformées du paraboloïde. Ainsi, tous les théorèmes démontrés dans les paragraphes 33 à 37 subsistent encore pour les déformées de l'hyperboloïde. Il serait oiseux d'en répéter tous les énoncés; il nous faut seulement indiquer les points où les démonstrations, à cause des formules changées, doivent être variées :

1° Pour démontrer que la surface (S) et sa transformée (S_1) forment les deux nappes focales de la congruence FF_1, engendrée par les droites qui joignent leurs points correspondants, il faut vérifier que le déterminant :

$$\begin{vmatrix} l & m & o \\ \mathfrak{L}_0 + \dfrac{\partial l}{\partial \theta}\dfrac{\partial \theta}{\partial u} & \mathfrak{M}_0 + \dfrac{\partial m}{\partial \theta}\dfrac{\partial \theta}{\partial u} & \mathfrak{D}l + \mathfrak{D}'m \\ \mathrm{P}_0 + \dfrac{\partial l}{\partial \theta}\dfrac{\partial \theta}{\partial v} & \mathrm{Q}_0 + \dfrac{\partial m}{\partial \theta}\dfrac{\partial \theta}{\partial v} & \mathfrak{D}'l + \mathfrak{D}''m \end{vmatrix}$$

s'annule identiquement, c'est-à-dire que l'on a :

$$(\mathfrak{D}l+\mathfrak{D}'m)\left[lQ_0-mP_0+\left(l\frac{\partial m}{\partial\theta}-\frac{\partial l}{\partial\theta}\right)\frac{\partial\theta}{\partial u}\right]$$
$$=(\mathfrak{D}'l+\mathfrak{D}''m)\left[l\mathfrak{M}_0-mP_0+\left(l\frac{\partial m}{\partial\theta}-m\frac{\partial l}{\partial\theta}\right)\frac{\partial\theta}{\partial u}\right].$$

Or, d'après la formule (71) du paragraphe 13,

$$l(l\mathfrak{M}_0-m\mathfrak{L}_0)=m(lQ_0-mP_0),$$

et comme

$$l=(u+v)\frac{U}{W},\qquad m=(u+v)\frac{V}{W},$$

il suffit de substituer, dans l'identité à démontrer, les valeurs de $\frac{\partial\theta}{\partial u}$, $\frac{\partial\theta}{\partial v}$ données par les équations (II), pour la changer dans la suivante :

$$\mathfrak{D}U(lQ_0-mP_0)-\mathfrak{D}''V(l\mathfrak{M}_0-m\mathfrak{L}_0)$$
$$+\frac{a'b'c'}{k(u+v)^2\rho}(\mathfrak{D}U^2-\mathfrak{D}''V^2)\left(l\frac{\partial m}{\partial\theta}-m\frac{\partial l}{\partial\theta}\right)\Big]=0.$$

Mais, comme

$$\frac{lQ_0-mP_0}{U}=\frac{l\mathfrak{M}_0-m\mathfrak{L}_0}{V},$$

on peut l'écrire aussi :

$$(\mathfrak{D}U^2-\mathfrak{D}''V^2)\cdot\left[\frac{1}{V}(l\mathfrak{M}_0-m\mathfrak{L}_0)+\frac{a'b'c'}{k(u+v)^2\rho}\left(l\frac{\partial m}{\partial\theta}-m\frac{\partial l}{\partial\theta}\right)\right]=0,$$

et la formule (75), § 13 démontre qu'elle est satisfaite.

IMPRIMERIE NATIONALE.

2° Pour démontrer que les lignes asymptotiques se correspondent sur (S) et (S_1), on déduira, comme au paragraphe 35, des équations (10) les formules suivantes :

$$\begin{cases} \mathfrak{D}\dfrac{du}{ds}+\mathfrak{D}'\dfrac{dv}{ds}=\pm\dfrac{2\sqrt{abc}}{(u+v)^2\sqrt{\rho}}\dfrac{dv}{ds}, \\ \mathfrak{D}'\dfrac{du}{ds}+\mathfrak{D}''\dfrac{dv}{ds}=\mp\dfrac{2\sqrt{abc}}{(u+v)^2\sqrt{\rho}}\dfrac{du}{ds}, \end{cases}$$

qui ont lieu le long de chaque ligne asymptotique a de (S). Supposant par exemple que cette asymptotique soit à torsion positive, on devra prendre les signes supérieurs et nous en déduirons :

$$\frac{d\theta}{ds}=2\frac{a'b'c'}{k(u+v)^2\rho}\cdot U\frac{dv}{ds}, \tag{17}$$

formule qui correspond à la formule (11), § 35 et d'où l'on tire les mêmes conséquences.

3° La correspondance des systèmes conjugués persistants sur (S), (S_1), se traduit par les mêmes calculs effectués au paragraphe 37, dans l'équation

$$\mathfrak{D}\left(\frac{\partial u_1}{\partial v}+\frac{\partial u_1}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)\frac{\partial\theta}{\partial v}-\mathfrak{D}''\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}+\frac{\partial u_1}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)\frac{\partial\theta}{\partial u}=0.$$

Or on a (§§ 16 et 17) :

$$\frac{\partial u_1}{\partial u}=2\frac{abc}{a'b'c'}\frac{1+\sin\theta}{\Psi^2}\cdot V,\quad \frac{\partial u_1}{\partial v}=2\frac{abc}{a'b'c'}\frac{1+\sin\theta}{\Psi^2}\cdot U,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial\theta}=-k\frac{abc\,(1+\sin\theta)}{a'^2b'^2c'^2\Psi^2}(u+v)^2\rho,$$

et l'identité à démontrer devient :

$$\mathfrak{D}\left[2U-\frac{k}{a'b'c'}(u+v)^2\rho\frac{\partial\theta}{\partial v}\right]\frac{\partial\theta}{\partial v}-\mathfrak{D}''\left[2V-\frac{k}{a'b'c'}(u+v)^2\rho\frac{\partial\theta}{\partial u}\right]\frac{\partial\theta}{\partial u}=0.$$

Si nous substituons ici les valeurs (II) de $\frac{\partial\theta}{\partial u}$, $\frac{\partial\theta}{\partial v}$, nous la changeons dans cette autre :

$$\mathfrak{D}\left[U^2-\frac{(u+v)^2\rho}{4abc}(\mathfrak{D}'U+\mathfrak{D}''V)^2\right]-\mathfrak{D}''\left[V^2-\frac{(u+v)^2\rho}{4abc}(\mathfrak{D}U+\mathfrak{D}'V)^2\right]$$

$$=(\mathfrak{D}U^2-\mathfrak{D}''V^2)\cdot\left[1+\frac{(u+v)^4\rho}{4abc}(\mathfrak{D}\mathfrak{D}''-\mathfrak{D}'^2)\right]=0,$$

et celle-ci est bien une identité, à cause de l'équation (13) de Gauss.

§ 42.

LE THÉORÈME DE PERMUTABILITÉ EN GÉNÉRAL.

Pour compléter les propositions relatives aux transformations B_k des déformées générales des quadriques, que nous avons énoncées dans l'aperçu, il nous reste encore à établir le théorème de permutabilité (aperçu, n° V). Nous le déduirons des propriétés que nous avons déjà reconnues aux transformations B_k et du théorème de permutabilité pour les déformées gauches (§§ 25-27).

Soit donc (S) une déformée de la quadrique fondamentale Q et soient (S_1), (S_2) deux nouvelles déformées de Q, liées à (S) par les transformations B_{k_1}, B_{k_2}. Considérons sur (S) les lignes géodésiques g transformées des droites d'un système de Q et de même les lignes géodésiques g_1, g_2 homologues (dans l'applicabilité) sur (S_1) et (S_2). Appelons C, C_1, C_2 les congruences normales formées par les tangentes aux lignes g, g_1, g_2 et qui ont pour une des nappes de la focale respectivement (S), (S_1), (S_2).

Soient F, F_1, F_2 trois points correspondants quelconques de (S), (S_1), (S_2). Au rayon r de C issu de F faisons correspondre dans C_1, C_2 les rayons r_1, r_2, issus des points correspondants F_1, F_2. Maintenant sur la quadrique (r, r_1, r_2) des trois droites r, r_1, r_2, prenons la droite r' du même système, qui forme avec r_1, r_2, r le rapport anharmonique constant :

$$\mathfrak{M} = (r_1 r_2 r r') = \frac{k_1}{k_2},$$

et prenons enfin sur la droite r' le point F′ où elle est rencontrée par la droite de l'autre système de la quadrique (r, r_1, r_2) issue de F. Nous démontrerons alors : *La congruence* C′ *engendrée par la droite* r' *est de la même nature que les trois congruences* C, C_1, C_2 *et la surface* (S'), *lieu du point* F′, *est enveloppée, le long des lignes géodésiques* g', *par ses rayons; elle donne la quatrième surface du théorème de permutabilité.*

Nous réduisons la démonstration des propriétés que nous venons d'énoncer aux propriétés déjà établies, à l'aide des considérations suivantes. Faisons décrire aux trois points F, F_1, F_2 trois lignes asymptotiques correspondantes a, a_1, a_2 sur (S), (S_1), (S_2); et soit a' la ligne correspondante décrite par F′ sur (S'). Les trois droites r, r_1, r_2 décriront alors (§ 36) trois déformées réglées R, R_1, R_2 de la quadrique Q et R_1, R_2 se déduiront de R par les transformations B_{k_1}, B_{k_2}. Or, la quatrième surface R′ sera une nouvelle déformée gauche de Q et elle se trouvera liée à R_1, R_2 par deux transformations B'_{k_2}, B'_{k_1} (§ 27). En outre, la ligne a' sera asymptotique sur R′ et les segments $F'F_1$, $F'F_2$ ainsi que la droite r', seront situés dans le plan osculateur de la courbe a' en F′; ce plan osculateur sera donc le plan $F'F_1F_2$. Faisons maintenant décrire à F, F_1, F_2 trois asymptotiques correspondantes $\bar{a}$, $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ de l'autre système sur (S), (S_1), (S_2) et soit $\bar{a}'$ la ligne correspondante décrite par F′ sur (S').

Pour les mêmes raisons que plus haut, le plan osculateur de $\bar{a}'$ en F′ sera le même plan $F'F_1F_2$; donc : *la surface* (S′), *lieu de* F′, *aura pour asymptotiques les lignes* a', $\bar{a}'$, *et son plan tangent en* F′ *sera le plan* $F'F_1F_2$; *la droite* r' *sera tangente à* (S′) *en* F′. Or les rayons de la congruence C′, assemblés le long de l'asymptotique a' de (S′), forment la réglée R′ et de même, en les assemblant le long de $\bar{a}'$, une autre réglée $\bar{R}'$. Celles-ci sont deux déformées réglées de la quadrique Q, applicables l'une sur l'autre de telle manière que les points du rayon commun r' se correspondent. La surface (S′) est l'enveloppe soit des ∞^1 déformées réglées R′, soit des autres $\bar{R}'$ qui touchent respectivement (S′) le long des asymptotiques a' et $\bar{a}'$.

Toutes ces propriétés que nous avons reconnues à la congruence C′ des rayons r' tangents à (S′) assurent, d'après le théorème inverse de Chieffi (voir le mémoire de M. Chieffi, § 2), que (S′) est une nouvelle déformée de la quadrique Q.

En outre, comme R′ est liée à R_1 et R_2 par deux transformations B'_{k_2}, B'_{k_1}, il résulte immédiatement de la loi d'applicabilité de R′ sur Q que lorsqu'on applique (S′) sur Q, les segments $F'F_1$, $F'F_2$, entraînés par (S′), se disposeront avec leurs extrêmes F_1, F_2 respectivement sur les deux quadriques homofocales Q_{k_2}, Q_{k_1}. Donc (S′) est liée à (S_1), (S_2) par deux transformations B'_{k_2}, B'_{k_1} et on voit bien que (S′) est la quatrième surface du théorème de permutabilité, q. e. d.

Ajoutons enfin qu'on pourrait donner aussi une démonstration purement analytique de ce théorème, comme je l'ai fait pour les cas particuliers des quadriques de révolution et des paraboloïdes dans les deux mémoires A et B; mais je me bornerai ici à ces indications. Quant aux applications du théorème de permutabilité, on n'aura qu'à répéter les considérations développées au paragraphe 28 à propos des déformées gauches des quadriques.

§ 43.

LES TRANSFORMATIONS B_k POUR LES DÉFORMÉES DU PARABOLOÏDE ELLIPTIQUE.

Dans toutes nos recherches jusqu'ici il n'a été question que des transformations B_k pour les déformées *réelles* des quadriques réglées : le paraboloïde hyperbolique et l'hyperboloïde à une nappe. Mais il est bien évident que toutes nos formules et tous nos développements analytiques s'appliquent à une quadrique quelconque, réelle ou imaginaire. Même en se bornant aux surfaces *réelles*, dont le ds^2 est réductible à celui d'une quadrique réelle ou imaginaire, nous aurions à distinguer un grand nombre de types divers de ds^2, et pour toutes ces classes de surfaces applicables on aurait des transformations B_k correspondantes. Nous nous bornons ici à étudier, au point de vue réel, les transformations des surfaces applicables sur les quadriques réelles; seulement dans les derniers paragraphes (§§ 67-71) nous traiterons le cas de la sphère, de l'ellipsoïde imaginaire et du paraboloïde à paramètres p, q purement imaginaires. Commençons par le paraboloïde elliptique P_0 :

$$\frac{x_0^2}{p} + \frac{y_0^2}{q} = 2 z_0,$$

où nous supposerons p et q positifs et, par exemple, $p < q$. Les formules relatives à ce cas se déduiront de celles du paragraphe 2 en y changeant $\sqrt{q}$ en $i\sqrt{q}$. La région réelle du paraboloïde elliptique s'obtiendra en prenant dans les formules (12), § 2, les variables u, v *conjuguées imaginaires*. Posons :

$$u = \frac{\alpha - i\beta}{2}, \qquad v = \frac{\alpha + i\beta}{2},$$

avec α, β réelles; nous aurons :

$$x_0=\sqrt{p}\,\alpha, \qquad y_0=\sqrt{q}\,\beta, \qquad z_0=\frac{\alpha^2+\beta^2}{2},$$

d'où :

$$(a) \qquad ds^2=(\alpha^2+p)\,d\alpha^2+2\alpha\beta\,d\alpha\,d\beta+(\beta^2+q)\,d\beta^2.$$

Prenons maintenant le paraboloïde *hyperbolique* P_k homofocal à P_0 :

$$\frac{x^2}{k-p}-\frac{y^2}{q-k}+2z-k=0,$$

en supposant k dans l'intervalle $(p\ldots q)$:

$$p\leqslant k\leqslant q,$$

et posons :

$$p'=k-p, \qquad q'=q-k;$$

p', q' seront positifs. Les formules du cas actuel se déduiront de celles du paragraphe 2 en y changeant respectivement p, q, p', q' en p, $-q$, $-p'$, $-q'$. Cela donne en particulier pour les valeurs de U, V, W (22), § 2, les formules :

$$(17^*)\quad \begin{cases} \mathrm{U}=2\left(\sqrt{qp'}-i\sqrt{pq'}\right)\lambda^2u^2+2\left(\sqrt{p'q'}-i\sqrt{pq}\right)\lambda u \\ \qquad\qquad -\frac{k}{2}\left(\sqrt{qp'}+i\sqrt{pq'}\right)\lambda^2+\frac{1}{2}\left(\sqrt{qp'}-i\sqrt{pq'}\right), \\ \mathrm{V}=2\left(\sqrt{qp'}+i\sqrt{pq'}\right)\lambda^2v^2-2\left(\sqrt{p'q'}+i\sqrt{pq}\right)\lambda v \\ \qquad\qquad -\frac{k}{2}\left(\sqrt{qp'}-i\sqrt{pq'}\right)\lambda^2+\frac{1}{2}\left(\sqrt{qp'}+i\sqrt{pq'}\right), \\ \mathrm{W}=2\lambda\left[i\sqrt{pq}-\sqrt{qp'}\,(u+v)\,\lambda+i\sqrt{pq'}\,(u-v)\,\lambda\right]. \end{cases}$$

Comme u, v sont imaginaires conjuguées, on voit que, si l'on prend pour λ une *imaginaire pure,* la quantité W sera réelle, et U, V seront imaginaires conjuguées. Adoptons, pour abréger, la notation $\overline{A}$ pour indiquer la quantité conjuguée d'une quantité complexe quelconque A, nous aurons :

$$\overline{u}=v, \quad \overline{v}=u, \quad \overline{\lambda}=-\lambda, \quad \overline{W}=W, \quad \overline{U}=V, \quad \overline{V}=U,$$

et par suite :

$$\overline{l}=\frac{\overline{U}}{\overline{W}}=m, \qquad \overline{m}=l.$$

Supposons maintenant que la surface (S), déformée du paraboloïde P_0, soit réelle. Les quantités x, y, z seront réelles et leurs dérivées $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, etc., seront imaginaires conjuguées. Les formules :

$$x_1=x+l\frac{\partial x}{\partial u}+m\frac{\partial x}{\partial v}, \text{ etc.},$$

montrent alors que x_1, y_1, z_1, sont aussi réelles, et par suite : *la deuxième nappe* (S_1) *de la congruence est réelle comme la première* (S). Donc, pour avoir des transformations réelles B_k des déformées (S) du paraboloïde elliptique, il suffit de satisfaire aux équations fondamentales (I'), § 32 :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\lambda}{\partial u}=\dfrac{1}{2k\sqrt{H}}\left[\mathfrak{D}U+(\mathfrak{D}'-\mathfrak{D}'_0)\,V\right], \\ \dfrac{\partial\lambda}{\partial v}=\dfrac{1}{2k\sqrt{H}}\left[(\mathfrak{D}'-\mathfrak{D}'_0)\,U+\mathfrak{D}''V\right], \end{cases}$$

en prenant pour λ une imaginaire pure. Or, comme la surface (S) est réelle et $\overline{u}=v$, $\overline{v}=u$, on aura :

$$\overline{\mathfrak{D}}=\mathfrak{D}'', \quad \overline{\mathfrak{D}''}=\mathfrak{D}, \quad \overline{\mathfrak{D}'}=\mathfrak{D}', \quad \overline{\mathfrak{D}'_0}=\mathfrak{D}'_0.$$

D'ailleurs la quantité H [§ 2 (14)] devient ici, en changeant q en $-q$:

$$H = p(u-v)^2 - q(u+v)^2 - pq;$$

elle est réelle négative; posons :

$$H = -h^2, \qquad \sqrt{H} = ih \ (h \text{ réelle}).$$

Les équations (I) de transformation deviennent :

$$\begin{cases} \frac{\partial(i\lambda)}{\partial u} = \frac{1}{2kh}\left[\mathfrak{D}U + (\mathfrak{D}' - \mathfrak{D}'_0)V\right], \\ \frac{\partial(i\lambda)}{\partial v} = \frac{1}{2kh}\left[(\mathfrak{D}' - \mathfrak{D}'_0)U + \mathfrak{D}''V\right], \end{cases}$$

et leurs seconds membres sont des imaginaires conjuguées pour $i\lambda$ réelle. Donc il est en effet possible d'y satisfaire avec une valeur réelle de $i\lambda$, dont la valeur initiale reste en outre arbitraire. Au surplus, en introduisant les variables réelles α, β, on présenterait toutes les formules précédentes sous forme réelle. Nous concluons de là :

Toute surface réelle (S) *applicable sur le paraboloïde elliptique admet, pour chaque valeur de* k *dans l'intervalle* $(p \ldots q)$, ∞^1 *transformations réelles* B_k. Les valeurs extrêmes $k = p$, $k = q$ sont, bien entendu, encore permises; elles donnent les deux transformations singulières.

IMPRIMERIE NATIONALE.

§ 44.

APPLICABILITÉ IDÉALE DES SURFACES TRANSFORMÉES (S_1) SUR LE PARABOLOÏDE.

D'après notre théorie générale, la surface transformée (S_1) sera applicable sur le même paraboloïde P_0. Mais examinons de plus près l'espèce de cette applicabilité. Lorsque la première nappe (S) de notre congruence FF_1 s'applique sur le paraboloïde elliptique P_0, entraînant les segments FF_1, les extrêmes F_1 de ceux-ci se disposent sur le paraboloïde hyperbolique homofocal P_k. Or l'affinité d'Ivory fait correspondre à la région réelle de P_k, occupée par les positions finales des extrêmes F_1, une région imaginaire de P_0; donc :

La surface réelle (S_1) *est bien applicable sur le paraboloïde; mais à la région réelle de* (S_1) *correspond une région imaginaire du paraboloïde, c'est-à-dire qu'il s'agit d'une applicabilité idéale.*

Il est intéressant d'écrire la forme effective réelle du ds_1^2 des surfaces (S_1). D'après les calculs du paragraphe 31, on aura :

$$ds_1^2 = (p-q+4v_1^2)\,du_1^2 + 2\,(p-q+4u_1v_1)\,du_1dv_1 + (p-q+4u_1^2)\,dv_1^2,$$

les variables u_1, v_1 étant données par les formules (56), § 9, où l'on doit substituer à p, q, p', q' respectivement p, $-q$, $-p'$, $-q'$, ce qui donne :

$$(18)\qquad \begin{cases} u_1 = \dfrac{\sqrt{qp'}\,(u+v) + i\sqrt{pq'}\,(u-v) - i\sqrt{pq}\,(4uv+k)\,\lambda}{2\,[i\sqrt{pq} - \sqrt{qp'}\,(u+v)\,\lambda + i\sqrt{pq'}\,(u-v)\,\lambda]}, \\ v_1 = \dfrac{1}{2\lambda}. \end{cases}$$

Comme u, v sont imaginaires conjuguées et λ une imaginaire pure, on voit que u_1 et v_1 sont aussi purement imaginaires. Posons donc :

$$u_1 = i\frac{\beta_1 + \alpha_1}{2}, \qquad v_1 = i\frac{\beta_1 - \alpha_1}{2},$$

les variables α_1 et β_1 étant réelles, et nous aurons l'élément linéaire de (S_1) sous la forme réelle :

$$(a_1) \qquad ds_1^2 = (\alpha_1^2 + q)\,d\alpha_1^2 - 2\alpha_1\beta_1\,d\alpha_1\,d\beta_1 + (\beta_1^2 - p)\,d\beta_1^2.$$

Il se transforme dans le ds^2 du paraboloïde, donné par la formule (a), en posant :

$$\alpha_1 = \beta, \qquad \beta_1 = i\alpha.$$

Ces formules, qui correspondent à l'affinité d'Ivory, font bien correspondre à la région réelle de (S) une région imaginaire de (S_1) : l'applicabilité des deux nappes (S) et (S_1) est idéale.

Réciproquement nous démontrerons tout à l'heure que toute surface (S_1) d'élément linéaire (a_1) donne lieu à une double infinité de congruences réelles W, dont la première nappe est (S_1), tandis que l'autre nappe (S) a l'élément linéaire (a) de la région réelle du paraboloïde elliptique. Nous pouvons énoncer ces résultats sous la forme suivante :

Toute surface réelle applicable réellement (ou idéalement) sur le paraboloïde elliptique appartient comme première nappe de la surface focale à ∞^2 congruences rectilignes réelles W, *dont la deuxième nappe est applicable idéalement (ou réellement) sur le même paraboloïde.*

Il suit de là que si l'on applique un nombre *pair* de fois nos transformations, la surface initiale et la finale seront toujours applicables réellement l'une sur l'autre.

Remarquons enfin que dans le cas particulier du paraboloïde de révolution $p = q$, l'intervalle $(p \ldots q)$ s'annulant, il reste pour k

la valeur unique $k=p=q$, et toutes nos transformations réelles se réduisent à une seule transformation : la transformation complémentaire.

§ 45.

TRANSFORMATIONS B_k DES SURFACES APPLICABLES IDÉALEMENT SUR LE PARABOLOÏDE ELLIPTIQUE.

Ainsi que nous l'avons annoncé, nous allons maintenant invertir les recherches précédentes. Nous montrerons que toute surface réelle d'élément linéaire (a_1) appartient, comme première nappe focale, à ∞^2 congruences réelles W, dont les deuxièmes nappes ont l'élément linéaire (a) de la région réelle du paraboloïde elliptique.

Soit donc (S) une surface réelle applicable *idéalement* sur le paraboloïde elliptique. Son élément linéaire sera donné par les formules du paragraphe 2, relatives au paraboloïde hyperbolique, où l'on aura changé $\sqrt{q}$ en $i\sqrt{q}$, et les variables u, v seront des *imaginaires pures*, ce que nous écrivons :

$$\bar{u}=-u, \qquad \bar{v}=-v. \tag{19}$$

Appliquons à la surface (S) une transformation B_k, la constante k étant choisie, comme au paragraphe 43, entre p et q. Nous voulons que la surface transformée (S_1), donnée par les formules :

$$x_1=x+l\frac{\partial x}{\partial u}+m\frac{\partial x}{\partial v}, \text{ etc.},$$

satisfasse aux conditions suivantes :

1° La surface (S_1) est réelle;

2° Elle est applicable réellement sur le paraboloïde elliptique.

La première condition exige, d'après les formules (19), que l'on ait :

$$\overline{l} = -l, \qquad \overline{m} = -m. \tag{20}$$

Quant à la deuxième, elle se traduit dans cette autre que les variables u_1 et v_1, définies par les formules (18), résultent des imaginaires conjuguées; que l'on ait donc :

$$\overline{\lambda} = \frac{i\sqrt{pq} - \sqrt{qp'}\,(u+v)\,\lambda + i\sqrt{pq'}\,(u-v)\,\lambda}{\sqrt{qp'}\,(u+v) + i\sqrt{pq'}\,(u-v) - i\sqrt{pq}\,(4uv+k)\,\lambda}. \tag{21}$$

Écrivons en outre la formule conjuguée équivalente :

$$\lambda = \frac{-i\sqrt{pq} + \sqrt{qp'}\,(u+v)\,\overline{\lambda} + i\sqrt{pq'}\,(u-v)\,\overline{\lambda}}{-\sqrt{qp'}\,(u+v) + i\sqrt{pq'}\,(u-v) + i\sqrt{pq}\,(4uv+k)\,\overline{\lambda}}. \tag{21*}$$

Il est facile de voir qu'il suffit de satisfaire à ces dernières équations (21), (21*), car elles ont pour conséquences les équations (20), ou bien :

$$\overline{W}U + W\overline{U} = 0, \qquad \overline{W}V + W\overline{V} = 0. \tag{20*}$$

En effet développons, par exemple la première d'après les formules (17*); elle devient :

$$\begin{aligned}
\overline{\lambda}\,[-i\sqrt{pq} + \sqrt{qp'}\,(u+v)\,\overline{\lambda} + i\sqrt{pq'}\,(u-v)\,\overline{\lambda}]\,.\Big\{ & 2\left(\sqrt{qp'} - i\sqrt{pq'}\right)\lambda^2 u^2 \\
& + 2\left(\sqrt{p'q'} - i\sqrt{pq}\right)\lambda u - \frac{k}{2}\left(\sqrt{qp'} + i\sqrt{pq'}\right)\lambda^2 \\
& + \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{qp'} - i\sqrt{pq'}\right)\Big\} + \lambda\,[i\sqrt{pq} - \sqrt{qp'}\,(u+v)\,\lambda \\
& + i\sqrt{pq'}\,(u-v)\,\lambda]\,.\Big\{ 2\left(\sqrt{qp'} - i\sqrt{pq'}\right)\overline{\lambda}^2 u^2 \\
& - 2\left(\sqrt{p'q'} + i\sqrt{pq}\right)\overline{\lambda}\,u - \frac{k}{2}\left(\sqrt{qp'} - i\sqrt{pq'}\right)\overline{\lambda}^2 \\
& + \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{qp'} + i\sqrt{pq'}\right)\Big\} = 0.
\end{aligned}$$

Substituons ici pour $\bar{\lambda}$ sa valeur (21) et chassons les dénominateurs, en ayant égard à l'identité :

$$pq(4uv+k)+qp'(u+v)^2+pq'(u-v)^2=-k\mathrm{H}.$$

On trouve alors aisément que l'équation ci-dessus est identiquement satisfaite. Un calcul analogue s'applique à la deuxième équation (20*).

Après cela nous n'avons plus qu'à démontrer qu'il est possible de satisfaire aux équations différentielles pour λ (I), § 32, de manière que l'équation (21) soit satisfaite, c'est-à-dire de manière que λ, $\bar{\lambda}$ soient liées par la relation bilinéaire :

$$(22)\qquad \begin{cases} \Omega = i\sqrt{pq}\,(4uv+k)\lambda\bar{\lambda}-\sqrt{qp'}\,(u+v)(\lambda+\bar{\lambda}) \\ \qquad\qquad +i\sqrt{pq'}\,(u-v)(\lambda-\bar{\lambda})+i\sqrt{pq}=0. \end{cases}$$

Commençons par écrire les équations différentielles pour λ, qui s'obtiennent des équations (I), § 32, en y changeant $\sqrt{q}$ en $i\sqrt{q}$, ce qui donne :

$$(23)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\lambda}{\partial u}=i\dfrac{\sqrt{pq}}{k\mathrm{H}}\mathrm{V}+\dfrac{1}{2k\sqrt{\mathrm{H}}}(\mathfrak{D}\mathrm{U}+\mathfrak{D}'\mathrm{V}), \\ \dfrac{\partial\lambda}{\partial v}=i\dfrac{\sqrt{pq}}{k\mathrm{H}}\mathrm{U}+\dfrac{1}{2k\sqrt{\mathrm{H}}}(\mathfrak{D}'\mathrm{U}+\mathfrak{D}''\mathrm{V}). \end{cases}$$

Pour en déduire les formules correspondantes pour la fonction conjuguée $\bar{\lambda}$, on doit remarquer que la quantité :

$$\mathrm{H}=p(u-v)^2-q(u+v)^2-pq$$

est réelle positive, puisque le ds^2 est défini positif et u, v sont des imaginaires pures. D'autre part, la surface (S) étant réelle, sa

deuxième forme fondamentale l'est aussi et par suite $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$ et $\sqrt{\mathrm{H}}$ sont réelles. Cela posé, en prenant les équations conjuguées des (23), on a (puisque $\bar{u}=-u$, $\bar{v}=-v$) :

$$(23^*)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\bar{\lambda}}{\partial u}=i\dfrac{\sqrt{pq}}{k\mathrm{H}}\overline{\mathrm{V}}-\dfrac{1}{2k\sqrt{\mathrm{H}}}(\mathfrak{D}\overline{\mathrm{U}}+\mathfrak{D}'\overline{\mathrm{V}}), \\ \dfrac{\partial\bar{\lambda}}{\partial v}=i\dfrac{\sqrt{pq}}{k\mathrm{H}}\overline{\mathrm{U}}-\dfrac{1}{2k\sqrt{\mathrm{H}}}(\mathfrak{D}'\overline{\mathrm{U}}+\mathfrak{D}''\overline{\mathrm{V}}). \end{cases}$$

Adjoignons au système différentiel (23), (23*) l'équation bilinéaire (22), ou $\Omega=0$. Il est facile de voir que les dérivées de Ω par rapport à u et v s'annulent en vertu même des équations (22), (23) et (23*). Nous avons en effet :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Omega}{\partial u}=&\left[i\sqrt{pq}\,(4uv+k)\,\bar{\lambda}-\sqrt{qp'}\,(u+v)+i\sqrt{pq'}\,(u-v)\right]\frac{\partial\lambda}{\partial u} \\ &+\left[i\sqrt{pq}\,(4uv+k)\,\lambda-\sqrt{qp'}\,(u+v)-i\sqrt{pq'}\,(u-v)\right]\frac{\partial\bar{\lambda}}{\partial u} \\ &+4i\sqrt{pq}\,v\lambda\bar{\lambda}-\sqrt{qp'}\,(\lambda+\bar{\lambda})+i\sqrt{pq'}\,(\lambda-\bar{\lambda}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Omega}{\partial v}=&\left[i\sqrt{pq}\,(4uv+k)\,\bar{\lambda}-\sqrt{qp'}\,(u+v)+i\sqrt{pq'}\,(u-v)\right]\frac{\partial\lambda}{\partial v} \\ &+\left[i\sqrt{pq}\,(4uv+k)\,\lambda-\sqrt{qp'}\,(u+v)-i\sqrt{pq'}\,(u-v)\right]\frac{\partial\bar{\lambda}}{\partial v} \\ &+4i\sqrt{pq}\,u\lambda\bar{\lambda}-\sqrt{qp'}\,(\lambda+\bar{\lambda})-i\sqrt{pq'}\,(\lambda-\bar{\lambda}). \end{aligned}$$

Or, si nous substituons dans les seconds membres les valeurs (23), (23*) pour les dérivées de λ, $\bar{\lambda}$, il est clair que $\frac{\partial\Omega}{\partial u}$ et $\frac{\partial\Omega}{\partial v}$ deviennent des expressions de la forme :

$$\alpha\mathfrak{D}+\beta\mathfrak{D}'+\gamma\mathfrak{D}''+\delta.$$

On trouve de suite que les coefficients α, β, γ sont nuls, à cause des relations :

$$\frac{U}{\overline{U}} = \frac{V}{\overline{V}} = \frac{i\sqrt{pq}\,(4uv+k)\lambda - \sqrt{qp'}\,(u+v) - i\sqrt{pq'}\,(u-v)}{i\sqrt{pq}\,(4uv+k)\overline{\lambda} - \sqrt{qp'}\,(u+v) + i\sqrt{pq'}\,(u-v)},$$

qui sont des simples conséquences des équations (20'), (21) et (21'). Et, d'après ces mêmes équations, on trouve encore aisément que le coefficient δ est nul aussi. Nous concluons de tout cela que l'équation $\Omega = 0$ sera satisfaite pour toutes les valeurs des variables u, v, si elle l'est pour un système initial de valeurs $(u_0 v_0)$. Or notre équation $\Omega = 0$ a la forme :

$$A\lambda\overline{\lambda} + B\lambda + \overline{B}\overline{\lambda} + C = 0,$$

les coefficients extrêmes $A = \sqrt{pq}\,(4uv+k)$, $C = \sqrt{pq}$ étant réels, et les moyens

$$\begin{cases} B = \sqrt{pq'}\,(u-v) + i\sqrt{qp'}\,(u+v), \\ \overline{B} = -\sqrt{pq'}\,(u-v) + i\sqrt{qp'}\,(u+v), \end{cases}$$

imaginaires conjugués. En fixant arbitrairement u, v, cette équation représente *dans le plan complexe de la variable* λ un cercle, et ce cercle est *réel* puisque le déterminant

$$B\overline{B} - AC = kH$$

est positif avec ses deux facteurs k, H. Il est donc possible, en ∞^1 manières, de satisfaire pour une couple initiale $(u_0 v_0)$ à l'équation $\Omega = 0$, après quoi elle sera satisfaite pour u, v variables. Nous avons donc de la sorte ∞^1 surfaces réelles (S_1) transformées de (S) par une transformation B_k, qui sont toutes applicables réellement sur le paraboloïde elliptique.

§ 46.

LES TRANSFORMATIONS B_k POUR LES DÉFORMÉES DE L'HYPERBOLOÏDE À DEUX NAPPES.

Considérons maintenant l'hyperboloïde à deux nappes Q_0 d'équation :

$$\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}=1,$$

où nous supposerons, pour fixer les idées :

$$b^2\leqslant c^2.$$

On pourra appliquer les formules du paragraphe 12, en y changeant b en ib, ce qui donne :

$$x_0=a\frac{1+uv}{u+v},\qquad y_0=ib\frac{u-v}{u+v},\qquad z_0=c\frac{1-uv}{u+v}.$$

La région réelle de cet hyperboloïde s'obtiendra en prenant les variables u, v *imaginaires conjuguées* : $u=\bar{v}$, $v=\bar{u}$.

Considérons l'hyperboloïde Q_k *à une nappe*, homofocal à Q_0, d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2+k}+\frac{y^2}{k-b^2}-\frac{z^2}{c^2-k}=1,$$

le paramètre k étant compris dans l'intervalle $(b^2\ldots c^2)$:

$$b^2\leqslant k\leqslant c^2.$$

IMPRIMERIE NATIONALE.

Posons maintenant :

$$a' = \sqrt{a^2 + k}, \qquad b' = \sqrt{k - b^2}, \qquad c' = \sqrt{c^2 - k};$$

a', b', c' seront des quantités réelles (positives). Les équations (66), § 12, où l'on aura seulement à changer b en ib, donnent avec la détermination supérieure des signes :

$$\begin{cases} \mathrm{U} = \left(\frac{ac}{a'c'} - i\frac{b}{b'}\right) 2u\cos\theta + \left(i\frac{bc}{b'c'} - \frac{a}{a'}\right)(u^2 - 1)\sin\theta + \left(i\frac{ab}{a'b'} - \frac{c}{c'}\right)(u^2 + 1), \\ \mathrm{V} = \left(-\frac{ac}{a'c'} - i\frac{b}{b'}\right) 2v\cos\theta + \left(i\frac{bc}{b'c'} + \frac{a}{a'}\right)(v^2 - 1)\sin\theta + \left(i\frac{ab}{a'b'} + \frac{c}{c'}\right)(v^2 + 1), \\ \mathrm{W} = 2\left[\frac{ac}{a'c'}(u - v)\cos\theta - i\frac{bc}{b'c'}(1 + uv)\sin\theta + i\frac{ab}{a'b'}(1 - uv)\right]. \end{cases}$$

Si l'on suppose θ *réelle*, comme $\overline{u} = v$, $\overline{v} = u$, on aura :

$$(\alpha) \qquad \overline{\mathrm{U}} = -\mathrm{V}, \qquad \overline{\mathrm{V}} = -\mathrm{U}, \qquad \overline{\mathrm{W}} = -\mathrm{W},$$

et par suite :

$$(\alpha') \qquad \overline{l} = m, \qquad \overline{m} = l.$$

Soit (S) une déformée réelle quelconque de notre hyperboloïde; nous aurons :

$$(\beta) \qquad \overline{\mathfrak{D}} = \mathfrak{D}'', \qquad \overline{\mathfrak{D}}' = \mathfrak{D}', \qquad \overline{\mathfrak{D}}'' = \mathfrak{D}.$$

L'équation (60), § 12, qui donne la valeur de ρ, devient ici :

$$\rho = i\,\frac{b^2c^2(1 + uv)^2 + a^2b^2(1 - uv)^2 - a^2c^2(u - v)^2}{abc(u + v)^2};$$

on voit que le coefficient de i dans le second membre est positif; posons :

$$\rho = i\mathrm{R}^2 \ (\mathrm{R} \text{ réelle}).$$

Après cela les équations fondamentales (II), § 39, deviennent :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\theta}{\partial u} = -i\dfrac{a'b'c'}{k(u+v)^2\mathrm{R}^2}\cdot\mathrm{V} - i\dfrac{a'b'c'}{2k\mathrm{R}\sqrt{abc}}\left(\mathfrak{D}\mathrm{U}+\mathfrak{D}'\mathrm{V}\right), \\ \dfrac{\partial\theta}{\partial v} = -i\dfrac{a'b'c'}{k(u+v)^2\mathrm{R}^2}\cdot\mathrm{U} - i\dfrac{a'b'c'}{2k\mathrm{R}\sqrt{abc}}\left(\mathfrak{D}'\mathrm{U}+\mathfrak{D}''\mathrm{V}\right), \end{cases}$$

et il résulte des équations ci-dessus (α), (β) que, *pour θ réelle*, leurs seconds membres sont *imaginaires conjuguées*. Nous pouvons donc satisfaire aux équations fondamentales par une valeur réelle de θ, dont la valeur initiale reste arbitraire. Les formules :

$$x_1 = x + l\frac{\partial x}{\partial u} + m\frac{\partial x}{\partial v}, \text{ etc.}$$

montrent alors, d'après les équations (α^*), que la surface transformée (S_1) est aussi réelle : *l'existence de ∞^2 transformations réelles B_k pour les déformées de l'hyperboloïde à deux nappes est établie.*

Mais ici encore, ainsi que dans le cas du paraboloïde elliptique, l'affinité d'Ivory fait correspondre à la région réelle de Q_k une région imaginaire de Q_0 et l'applicabilité des surfaces (S_1) est idéale. Cherchons la forme réelle du ds_1^2 des surfaces (S_1). Il suffira pour cela d'avoir recours aux formules d'applicabilité (87), § 16, où l'on aura toutefois à changer b en ib, ce qui donne :

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{\dfrac{ib}{b'}\left[\dfrac{a}{a'}(1-uv)-\dfrac{c}{c'}(1+uv)\right]\cdot(1+\sin\theta)+\dfrac{ac}{a'c'}\left[u-v+\dfrac{ib}{b'}(u+v)\right]\cos\theta}{\dfrac{ib}{b'}\left[\dfrac{a}{a'}(1-uv)+\dfrac{c}{c'}(1+uv)\right]\cdot\cos\theta+\dfrac{ac}{a'c'}\left[u-v-\dfrac{ib}{b'}(u+v)\right]\cdot(1+\sin\theta)}, \\ v_1 = \dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta}. \end{cases}$$

Comme θ est réelle et $\bar{u} = v$, $\bar{v} = u$, on voit que u_1 *et* v_1 *sont réelles;* donc : *L'élément linéaire des nouvelles surfaces* (S_1) *s'obtient de l'élément linéaire* (58, § 12) *de l'hyperboloïde à une nappe, en y changeant* b^2 *en* $-b^2$, *les variables* u, v *demeurant réelles*[1].

Par une analyse toute semblable à celle développée dans le paragraphe précédent (voir aussi le paragraphe 50), on démontre réciproquement que toute surface réelle (S_1) de cet élément linéaire admet ∞^2 surfaces réelles transformées (S) qui sont applicables réellement sur l'hyperboloïde à deux nappes.

Considérons enfin le cas particulier de l'hyperboloïde de révolution : $b^2 = c^2$. Alors il reste la seule valeur possible pour k :

$$k = b^2 = c^2,$$

et toutes nos transformations réelles B_k se réduisent à la seule transformation complémentaire.

§ 47.

CAS DE L'ELLIPSOÏDE[2]. — CHANGEMENT DE NOTATIONS.

Pour traiter le dernier cas de l'ellipsoïde réel, il convient d'écrire les formules du paragraphe 12, relatives à l'hyperboloïde à une nappe, sous une autre forme en y posant :

$$v = \frac{1}{w},$$

[1] Remarquons que ces valeurs réelles de u, v doivent satisfaire à l'inégalité

$$a^2b^2(1 - uv)^2 + b^2c^2(1 + uv)^2 < a^2c^2(u - v)^2,$$

nécessaire et suffisante pour que le ds_1^2 soit défini positif.

[2] Nous traitons directement, dans ce paragraphe et le suivant, le cas de l'ellipsoïde bien que les prochaines recherches (§§ 51-55) permettent de déduire les transformations pour les déformées de l'ellipsoïde de celles relatives à l'hyperboloïde à deux nappes.

ce qui donne :

$$(24)\qquad x_0 = a\frac{u+w}{1+uw},\qquad y_0 = b\frac{uw-1}{1+uw},\qquad z_0 = c\frac{w-u}{1+uw}.$$

Les formules

$$x_1 = x + l\frac{\partial x}{\partial u} + m\frac{\partial x}{\partial v},\ \text{etc.}$$

deviennent, dans les nouvelles variables u, w,

$$(25)\qquad x_1 = x + l_0\frac{\partial x}{\partial u} + m_0\frac{\partial x}{\partial w},\ \text{etc.},$$

où l'on a posé

$$l_0 = l,\qquad m_0 = -w^2 m,$$

ou bien, d'après les équations (65), (66), § 12,

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} l_0 &= \frac{1+uw}{2}\cdot\frac{\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+k}}\frac{c}{\sqrt{c^2-k}} - \frac{b}{\sqrt{b^2+k}}\right)2u\cos\theta + \left(\frac{b}{\sqrt{b^2+k}}\frac{c}{\sqrt{c^2-k}} - \frac{a}{\sqrt{a^2+k}}\right)(u^2-1)\sin\theta}{\frac{a}{\sqrt{a^2+k}}\frac{c}{\sqrt{c^2-k}}(uw-1)\cos\theta - \frac{b}{\sqrt{b^2+k}}\frac{c}{\sqrt{c^2-k}}(u+w)\sin\theta} \\ &\qquad + \frac{\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+k}}\frac{b}{\sqrt{b^2+k}} - \frac{c}{\sqrt{c^2-k}}\right)(u^2+1)}{+\frac{a}{\sqrt{a^2+k}}\frac{b}{\sqrt{b^2+k}}(w-u)}, \\ m_0 &= \frac{1+uw}{2}\cdot\frac{\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+k}}\frac{c}{\sqrt{c^2-k}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+k}}\right)2w\cos\theta + \left(\frac{b}{\sqrt{b^2+k}}\frac{c}{\sqrt{c^2-k}} + \frac{a}{\sqrt{a^2+k}}\right)(w^2-1)\sin\theta}{\frac{a}{\sqrt{a^2+k}}\frac{c}{\sqrt{c^2-k}}(uw-1)\cos\theta - \frac{b}{\sqrt{b^2+k}}\frac{c}{\sqrt{c^2-k}}(u+w)\sin\theta} \\ &\qquad - \frac{\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+k}}\frac{b}{\sqrt{b^2+k}} + \frac{c}{\sqrt{c^2-k}}\right)(w^2+1)}{+\frac{a}{\sqrt{a^2+k}}\frac{b}{\sqrt{b^2+k}}(w-u)}. \end{aligned}\right.$$

Pour appliquer ces formules au cas de l'ellipsoïde réel

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1,$$

il suffira de changer c en ic. Les formules (24) donnent :

$$x_0=a\frac{u+w}{uw+1}, \qquad y_0=b\frac{uw-1}{uw+1}, \qquad z_0=ic\frac{w-u}{uw+1},$$

et nous aurons la région réelle de l'ellipsoïde en prenant les variables u, w imaginaires conjuguées :

$$\overline{u}=w, \qquad \overline{w}=u.$$

Supposons, comme d'habitude,

$$a^2>b^2>c^2,$$

et prenant la constante k dans l'intervalle $(-b^2 \ldots -c^2)$

$$-b^2\leqq k\leqq -c^2,$$

considérons l'hyperboloïde *à une nappe* homofocal

$$\frac{x^2}{a^2+k}+\frac{y^2}{b^2+k}-\frac{z^2}{-(c^2+k)}=1,$$

et posons enfin

$$a'=\sqrt{a^2+k}, \qquad b'=\sqrt{b^2+k}, \qquad c'=\sqrt{-c^2-k},$$

où les quantités a', b', c' seront réelles (positives). Les formules (26), en y changeant c en ic, donnent :

$$\left\{\begin{aligned} l_0 &= \frac{1+uw}{2}\,\frac{\left(i\frac{ac}{a'c'}-\frac{b}{b'}\right)2u\cos\theta+\left(i\frac{bc}{b'c'}-\frac{a}{a'}\right)(u^2+1)\sin\theta+\left(\frac{ab}{a'b'}-i\frac{c}{c'}\right)(u^2+1)}{i\frac{ac}{a'c'}(uw-1)\cos\theta-i\frac{bc}{b'c'}(u+w)\sin\theta+\frac{ab}{a'b'}(w-u)},\\ m_0 &= \frac{1+uw}{2}\,\frac{\left(i\frac{ac}{a'c'}+\frac{b}{b'}\right)2w\cos\theta+\left(i\frac{bc}{b'c'}+\frac{a}{a'}\right)(w^2+1)\sin\theta-\left(\frac{ab}{a'b'}+i\frac{c}{c'}\right)(w^2+1)}{i\frac{ac}{a'c'}(uw-1)\cos\theta-i\frac{bc}{b'c'}(u+w)\sin\theta+\frac{ab}{a'b'}(w-u)}. \end{aligned}\right.$$

Si l'on prend θ *réelle*, comme $\bar{u}=w$, $\bar{w}=u$, on aura :

$$\bar{l}_0 = m_0, \qquad m_0 = l_0,$$

et les formules (25), appliquées à une déformée réelle (S) de l'ellipsoïde, montrent que la surface transformée (S_1) sera aussi réelle. Il reste à examiner s'il est possible de satisfaire aux équations différentielles fondamentales avec une fonction θ réelle.

§ 48.

LES TRANSFORMATIONS B_k DES DÉFORMÉES DE L'ELLIPSOÏDE.

Les équations fondamentales (II), § 39, deviennent ici d'abord, par le changement de c en ic :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial u} &= \frac{a'b'c'}{k(u+v)^2\rho}\cdot V+\frac{a'b'c'}{2k\sqrt{iabc}\sqrt{\rho}}(\mathfrak{D}U+\mathfrak{D}'V),\\ \frac{\partial\theta}{\partial v} &= \frac{a'b'c'}{k(u+v)^2\rho}\cdot U+\frac{a'b'c'}{2k\sqrt{iabc}\sqrt{\rho}}(\mathfrak{D}'U+\mathfrak{D}''V). \end{aligned}\right.$$

Comme la valeur (60), § 12, pour ρ devient par le même changement (de c en ic) :

$$\rho = i\,\frac{b^2c^2(uw+1)^2 + a^2c^2(uw-1)^2 - a^2b^2(u-w)^2}{abc(uw+1)^2},$$

on peut écrire évidemment :

$$\rho = iR^2 \qquad (R \text{ réelle}),$$

et les équations pour θ prennent la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\theta}{\partial u} = -i\,\dfrac{a'b'c'}{k(uw+1)^2R^2}\cdot w^2V - i\,\dfrac{a'b'c'}{2kR\sqrt{abc}}\,(\mathfrak{D}U + \mathfrak{D}'V), \\ \dfrac{\partial\theta}{\partial v} = -i\,\dfrac{a'b'c'}{k(uw+1)^2R^2}\cdot w^2U - i\,\dfrac{a'b'c'}{2kR\sqrt{abc}}\,(\mathfrak{D}'U + \mathfrak{D}''V). \end{cases}$$

Changeons ces formules dans les coordonnées symétriques imaginaires u, w. En appelant :

$$\Delta du^2 + 2\Delta' du\,dw + \Delta'' dw^2$$

la seconde forme fondamentale de la surface (S) en coordonnées u et $w = \frac{1}{v}$, on a :

$$\Delta = \mathfrak{D}, \qquad \Delta' = -\frac{\mathfrak{D}'}{w^2}, \qquad \Delta'' = \frac{\mathfrak{D}''}{w^4}.$$

et en outre :

$$\frac{\partial\theta}{\partial w} = -\frac{1}{w^2}\frac{\partial\theta}{\partial v}.$$

Les équations pour θ deviennent :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\theta}{\partial u} = -i\dfrac{a'b'c'}{k(uw+1)^2R^2}\cdot w^2V - i\dfrac{a'b'c'}{2kR\sqrt{abc}}(\Delta U - \Delta'.w^2V), \\ \dfrac{\partial\theta}{\partial w} = +i\dfrac{a'b'c'}{k(uw+1)^2R^2}\cdot U - i\dfrac{a'b'c'}{2kR\sqrt{abc}}(\Delta' U - \Delta''.w^2V); \end{cases}$$

les expressions de U, w^2V sont données, à cause des formules (66), § 12 (où l'on changera c en ic), par les formules suivantes :

$$\begin{cases} U = \left(i\dfrac{ac}{a'c'} - \dfrac{b}{b'}\right)2u\cos\theta + \left(i\dfrac{bc}{b'c'} - \dfrac{a}{a'}\right)(u^2-1)\sin\theta \\ \qquad\qquad + \left(\dfrac{ab}{a'b'} - i\dfrac{c}{c'}\right)(u^2+1), \\ w^2V = \left(-i\dfrac{ac}{a'c'} - \dfrac{b}{b'}\right)2w\cos\theta - \left(i\dfrac{bc}{b'c'} + \dfrac{a}{a'}\right)(u^2-1)\sin\theta \\ \qquad\qquad + \left(\dfrac{ab}{a'b'} + i\dfrac{c}{c'}\right)(w^2+1). \end{cases}$$

Comme $\overline{u} = w$, on voit que, pour θ réelle, la quantité w^2V est la conjuguée de U :

$$w^2V = \overline{U},$$

après quoi les équations différentielles pour θ s'écrivent :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\theta}{\partial u} = -i\dfrac{a'b'c'}{k(uw+1)^2R^2}\cdot\overline{U} - i\dfrac{a'b'c'}{2kR\sqrt{abc}}(\Delta U - \Delta'\overline{U}), \\ \dfrac{\partial\theta}{\partial w} = +i\dfrac{a'b'c'}{k(uw+1)^2R^2}\cdot U + i\dfrac{a'b'c'}{2kR\sqrt{abc}}(\Delta''\overline{U} - \Delta' U). \end{cases}$$

Mais, puisque $\overline{u} = w$, $\overline{w} = u$ et que la surface (S) est réelle, on a :

$$\overline{\Delta} = \Delta'', \qquad \overline{\Delta''} = \Delta, \qquad \overline{\Delta'} = \Delta',$$

IMPRIMERIE NATIONALE.

d'où l'on voit que les seconds membres des équations ci-dessus sont des imaginaires conjuguées (pour θ réelle). On peut donc satisfaire aux équations différentielles par une valeur réelle de θ, dont la valeur initiale reste arbitraire, et nous avons encore pour les déformées de l'ellipsoïde à trois axes le même résultat que pour les autres quadriques générales : *l'existence de* ∞^2 *transformations réelles* B_k.

Les surfaces transformées (S_1) sont applicables sur le même ellipsoïde; mais, comme l'affinité d'Ivory fait correspondre à la région réelle de l'hyperboloïde une région imaginaire de l'ellipsoïde, il s'agira ici encore d'une applicabilité idéale. Calculons, sous forme réelle, le ds_1^2 des surfaces (S_1). Les formules d'applicabilité (87), § 16, par le changement de c en ic et de v en $\frac{1}{u}$, donnent :

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{\dfrac{b}{b'}\left[\dfrac{a}{a'}(w-u) - \dfrac{ic}{c'}(w+u)\right]\cdot(1+\sin\theta) + i\dfrac{ac}{a'c'}\left[uw - 1 + \dfrac{b}{b'}(w+u)\right]\cos\theta}{\dfrac{b}{b'}\left[\dfrac{a}{a'}(w-u) + \dfrac{ic}{c'}(w+u)\right]\cos\theta + i\dfrac{ac}{a'c'}\left[uw - 1 - \dfrac{b}{b'}(w+u)\right]\cdot(1+\sin\theta)}; \\ v_1 = \dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta}; \end{cases}$$

celles-ci démontrent que les nouvelles variables u_1 et v_1 sont réelles. Donc :

L'élément linéaire des surfaces transformées (S_1) *s'obtient de l'élément linéaire* (58), § 12, *de l'hyperboloïde à une nappe en y changeant* c^2 *en* $-c^2$, *les variables* u, v *demeurant réelles*[1] (C. § 46). Inversement on démontre (C. § 45) que toute surface (S_1), avec ce ds^2, admet

[1] Pour donner un ds_1^2 défini positif, elles doivent satisfaire uniquement à l'inégalité :

$$a^2b^2(1-uv)^2 > b^2c^2(1+uv)^2 + a^2c^2(u-v)^2.$$

∞^2 transformations réelles B_k qui la changent en des surfaces (S) applicables réellement sur l'ellipsoïde.

Nos recherches pour les transformations réelles des déformées effectives des quadriques réelles sont maintenant complètes, et nous pouvons résumer les résultats de la recherche par la proposition finale :

Toute déformée réelle d'une quadrique générale réelle Q *appartient, comme première nappe de la surface focale, à une double infinité de congruences* W *réelles, dont les deuxièmes nappes* (S_1) *sont applicables sur la même quadrique* Q. *L'applicabilité des deux nappes* (S) *et* (S_1) *est réelle pour les quadriques à génératrices réelles, idéale pour celles à génératrices imaginaires.*

C'est le théorème fondamental I de l'aperçu (n° I), précisé dans le sens réel; et les recherches des deux paragraphes suivants lui donneront une plus grande extension.

Revenons encore au cas actuel de l'ellipsoïde, et supposons qu'il devienne une surface de révolution. Nous devons distinguer deux formes :

$$\text{ellipsoïde allongé} \qquad (a^2 > b^2 = c^2),$$

$$\text{ellipsoïde aplati} \qquad (a^2 = b^2 > c^2).$$

Dans le premier cas, l'intervalle $(-b^2 \ldots - c^2)$ s'annule et les transformations réelles B_k se réduisent à l'unique transformation B_{-b^2}, qui est la transformation complémentaire. Pour l'ellipsoïde aplati, nous avons encore, au contraire, les ∞^2 transformations réelles B_k du cas général, qui conduisent toutes d'une surface (S) applicable réellement sur l'ellipsoïde à une surface (S_1) applicable sur sa surface complémentaire.

En résumant encore ici les résultats relatifs aux formes de quadriques de révolution, nous voyons que les ∞^2 transformations

réelles B_k pour leurs déformées existent seulement pour ces deux formes :

hyperboloïde à une nappe,
ellipsoïde aplati.

Pour les autres trois formes :

paraboloïde,
ellipsoïde allongé,
hyperboloïde à deux nappes,

les transformations réelles B_k disparaissent, ou plutôt elles se réduisent à l'unique transformation complémentaire. J'avais obtenu, par une tout autre voie, ces derniers résultats dans le mémoire A. Actuellement, nous reconnaissons que la persistance des ∞^2 transformations réelles B_k, pour les déformées des quadriques de révolution, est due à l'existence, dans le système homofocal, d'*effectives quadriques réglées*. Dans les trois dernières formes, ces quadriques réglées se réduisent aux plans par l'axe; et nous n'avons plus d'autre transformation réelle que la transformation complémentaire.

§ 49.

LES TRANSFORMATIONS B_k DES SURFACES APPLICABLES IDÉALEMENT SUR LE PARABOLOÏDE HYPERBOLIQUE.

Notre problème a été circonscrit, au paragraphe 43, à la considération des surfaces réelles applicables sur les quadriques réelles. Nous avons vu toutefois que l'examen des déformées des quadriques

à points elliptiques introduit forcément, à côté des surfaces applicables réellement sur ces quadriques, d'autres surfaces réelles, dont l'applicabilité sur ces mêmes quadriques est seulement idéale. Cela nous indique que le sujet est loin encore d'être épuisé! Il y a, en effet, plusieurs classes de ds^2 réels transformables dans le ds^2 d'une quadrique réelle, et pour tous ces ds^2 il y a lieu de rechercher les transformations B_k réelles des surfaces correspondantes. Même pour les déformées des deux quadriques à génératrices réelles, dont nous avons étudié d'abord les transformations, nous devons revenir sur nos recherches et étudier aussi les surfaces réelles applicables idéalement sur ces quadriques. Nous verrons que toute surface d'une de ces classes admet ∞^2 transformations réelles B_k qui la changent dans une autre surface de la même classe, conformément à la proposition finale du paragraphe précédent.

Commençant par le paraboloïde hyperbolique, nous définissons la classe de surfaces applicables idéalement sur ce paraboloïde, en prenant dans les formules du paragraphe 2 les variables u, v imaginaires conjuguées. Si l'on pose :

$$u+v=\alpha, \qquad u-v=i\beta,$$

on a :

$$(27) \qquad ds^2=(\alpha^2+p)\,d\alpha^2+2\alpha\beta\,d\alpha\,d\beta+(\beta^2-q)\,d\beta^2,$$

les variables *réelles* α, β étant assujetties à satisfaire à l'inégalité

$$p\beta^2 \geq q\alpha^2+pq.$$

Cela rend la quantité

$$H=pq+p\,(u-v)^2+q\,(u+v)^2=pq-p\beta^2+q\alpha^2$$

négative, et nous posons

$$H = -h^2, \qquad \sqrt{H} = ih \qquad (h \text{ réelle}).$$

Soit maintenant (S) une surface réelle d'élément linéaire (27), dont la deuxième forme fondamentale, en coordonnées u, v,

$$\mathfrak{D}du^2 + 2\mathfrak{D}'\,du\,dv + \mathfrak{D}''\,dv^2,$$

satisfera aux conditions :

$$(28) \qquad \overline{\mathfrak{D}} = \mathfrak{D}'', \qquad \overline{\mathfrak{D}''} = \mathfrak{D}, \qquad \overline{\mathfrak{D}'} = \mathfrak{D}'.$$

Cherchons à appliquer à la surface (S) une transformation B_k, telle que la surface transformée (S_1) soit encore réelle et d'élément linéaire (27). Nous choisirons pour notre but la constante k positive et plus petite que p,

$$0 < k < p.$$

Pour que (S_1) soit réelle, il faut que l'on ait :

$$\bar{l} = m, \qquad \bar{m} = l,$$

c'est-à-dire :

$$(29) \qquad \frac{\bar{U}}{\bar{W}} = \frac{V}{W}.$$

Mais comme, en outre, le ds_1^2 de (S_1) doit revêtir la forme (27), les formules d'applicabilité (56), § 9, devront donner des valeurs

imaginaires conjuguées pour les variables u_1, v_1. Cela se traduit par l'équation :

$$(30) \qquad \bar{\lambda} = \frac{\sqrt{pq} + [\sqrt{pq'}(u-v) - \sqrt{qp'}(u+v)].\lambda}{\sqrt{qp'}(u+v) + \sqrt{pq'}(u-v) - \sqrt{pq}(4uv+k).\lambda},$$

que nous écrivons aussi sous la forme conjuguée équivalente :

$$(30^*) \qquad \lambda = \frac{\sqrt{pq} - [\sqrt{pq'}(u-v) + \sqrt{qp'}(u+v)].\bar{\lambda}}{\sqrt{qp'}(u+v) - \sqrt{pq'}(u-v) - \sqrt{pq}(4uv+k)\bar{\lambda}}.$$

Remarquons que l'équation (29), d'après les valeurs (22), § 2, de U, V, W, s'écrit développée :

$$\frac{2(\sqrt{qp'} - \sqrt{pq'})\bar{\lambda}^2 v^2 - 2(\sqrt{pq} - \sqrt{p'q'})\bar{\lambda}v - \frac{k}{2}(\sqrt{qp'} + \sqrt{pq'}).\bar{\lambda}^2 + \frac{1}{2}(\sqrt{qp'} - \sqrt{pq'})}{\bar{\lambda}\{\sqrt{pq} - [\sqrt{qp'}(u+v) + \sqrt{pq'}(u-v)].\bar{\lambda}\}}$$

$$= \frac{2(\sqrt{qp'} + \sqrt{pq'})\lambda^2 v^2 - 2(\sqrt{pq} + \sqrt{p'q'})\lambda v - \frac{k}{2}(\sqrt{qp'} - \sqrt{pq'})\lambda^2 + \frac{1}{2}(\sqrt{qp'} + \sqrt{pq'})}{\lambda\{\sqrt{pq} - [\sqrt{qp'}(u+v) - \sqrt{pq'}(u-v)]\lambda\}}.$$

On vérifie aisément, à l'aide de l'identité

$$(31) \qquad pq(4uv+k) + pq'(u-v)^2 - qp'(u+v)^2 = k\mathrm{H},$$

qu'elle est une conséquence de l'équation (30). Aussi suffira-t-il de rechercher si l'on peut satisfaire aux équations différentielles pour λ de manière que l'équation (30), c'est-à-dire l'équation bilinéaire entre λ et $\bar{\lambda}$

$$(32) \qquad \Omega = \sqrt{pq}(4uv+k)\lambda\bar{\lambda} + \sqrt{pq'}(u-v)(\lambda - \bar{\lambda}) - \sqrt{qp'}(u+v)(\lambda + \bar{\lambda}) + \sqrt{pq} = 0,$$

soit satisfaite.

Maintenant, comme $\sqrt{\overline{H}} = ih$, les équations différentielles (I), § 32, donnent :

$$(33)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\lambda}{\partial u} = -\dfrac{\sqrt{pq}}{kh^2}V - \dfrac{i}{2kh}(\mathfrak{D}U + \mathfrak{D}'V), \\ \dfrac{\partial\lambda}{\partial v} = -\dfrac{\sqrt{pq}}{kh^2}U - \dfrac{i}{2kh}(\mathfrak{D}'U + \mathfrak{D}''V), \end{cases}$$

d'où, changeant i en $-i$, ayant égard aux équations (28) :

$$(33^*)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\bar{\lambda}}{\partial u} = -\dfrac{\sqrt{pq}}{kh^2}\overline{U} + \dfrac{i}{2kh}(\mathfrak{D}'\overline{U} + \mathfrak{D}\overline{V}), \\ \dfrac{\partial\bar{\lambda}}{\partial v} = -\dfrac{\sqrt{pq}}{kh^2}\overline{V} + \dfrac{i}{2kh}(\mathfrak{D}''\overline{U} + \mathfrak{D}'\overline{V}). \end{cases}$$

Or, à cause de l'identité

$$\frac{U}{\overline{V}} = \frac{\lambda}{\bar{\lambda}} \cdot \frac{\sqrt{pq} - \sqrt{qp'}\,(u+v)\lambda + \sqrt{pq'}\,(u-v)\lambda}{\sqrt{pq} - \sqrt{qp'}\,(u+v)\bar{\lambda} - \sqrt{pq'}\,(u-v)\bar{\lambda}},$$

qui se déduit des équations (29), (30) et (30*), en procédant comme au paragraphe 45, on trouve que les équations

$$\frac{\partial\Omega}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial\Omega}{\partial v} = 0$$

sont des conséquences de $\Omega = 0$ et des équations différentielles (33), (33*). Donc il suffit de prendre pour λ une telle solution des équations différentielles (33) que sa valeur initiale satisfasse à $\Omega = 0$. Il est maintenant facile de voir que l'équation $\Omega = 0$ représente dans le plan complexe λ un cercle *réel*, car la valeur du déterminant $B\overline{B} - AC$ est ici, à cause de l'identité (31) :

$$B\overline{B} - AC = qp'(u+v)^2 - pq'(u-v)^2 - pq(4uv + k) = -kH,$$

une quantité positive, puisque $k > 0$, $H < 0$. Nous concluons de là la proposition annoncée :

Toute surface réelle (S) *applicable idéalement sur le paraboloïde hyperbolique admet* ∞^2 *transformations réelles* B_k *en d'autres surfaces* (S_1) *de la même espèce.* C'est, comme l'on voit, le même résultat que pour les surfaces applicables sur la région réelle du même paraboloïde.

§ 50.

LES TRANSFORMATIONS B_k POUR LES SURFACES APPLICABLES IDÉALEMENT SUR L'HYPERBOLOÏDE À UNE NAPPE.

Considérons maintenant le cas de l'hyperboloïde à une nappe; nous obtenons deux classes distinctes de surfaces réelles applicables idéalement sur cette quadrique, en supposant une première fois, dans les formules du paragraphe 12, que v soit la conjuguée de u, et une seconde fois que v soit la conjuguée de l'inverse $\frac{1}{u}$. On voit en effet que, chaque fois, le ds^2 revêt une forme réelle, définie positive, pourvu que l'on assujettisse les variables réelles qui composent u à satisfaire à une inégalité convenable. L'une et l'autre classe de surfaces admet des transformations réelles B_k; mais nous nous bornerons à étudier le premier cas, car l'autre donne lieu à des développements tout à fait analogues. Au surplus, la nouvelle transformation $\mathfrak{H}$, que nous étudions dans les paragraphes suivants, donne le passage des transformations B_k d'une classe aux transformations B_k de l'autre classe.

Supposons donc que l'on ait, dans les formules du paragraphe 12 :

$$\bar{u} = v, \qquad \bar{v} = u,$$

et considérons une surface réelle (S) de l'élément linéaire correspondant. Prenons la constante k positive et plus petite que c^2 :

$$0 < k \leq c^2,$$

IMPRIMERIE NATIONALE.

et conservons toutes les notations du paragraphe 12, où en particulier dans les formules (66) qui donnent U, V, W nous adoptons les signes supérieurs. Nous tâcherons encore ici d'appliquer à la surface (S) une transformation B_k de manière que la surface transformée (S_1) soit aussi réelle et applicable sur (S). Pour que (S_1) soit réelle, il faut et il suffit que l, m soient imaginaires conjuguées, c'est-à-dire que l'on ait :

$$\frac{\overline{U}}{\overline{W}} = \frac{V}{W}. \tag{34}$$

En outre, afin que le ds_1^2 de (S_1) revête la même forme que le ds^2 de l'hyperboloïde à une nappe, avec les variables u_1, v_1 imaginaires conjuguées, il faut que les formules d'applicabilité (87), § 16, donnent pour u_1, v_1 des valeurs conjuguées. Or, si nous posons :

$$t = \frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta}, \tag{35}$$

comme il s'ensuit :

$$\cos\theta = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \sin\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \tag{36}$$

la dernière condition s'exprime par l'équation bilinéaire :

$$A\bar{t}\bar{t} + Bt + \overline{B}\bar{t} + C = 0, \tag{37}$$

où l'on a posé :

$$\begin{cases} A = \frac{ab}{a'b'}(1-uv) + \frac{bc}{b'c'}(1+uv), & B = -\frac{ac}{a'c'}\left[u - v + \frac{b}{b'}(u+v)\right], \\ C = -\frac{ab}{a'b'}(1-uv) + \frac{bc}{b'c'}(1+uv), & \overline{B} = \frac{ac}{a'c'}\left[u - v - \frac{b}{b'}(u+v)\right]. \end{cases} \tag{38}$$

On remarquera que les coefficients A, C sont réels et B, $\overline{\mathrm{B}}$ conjugués imaginaires. On trouve de suite :

$$\mathrm{B}\overline{\mathrm{B}}-\mathrm{AC}=-\frac{k}{a'^2b'^2c'^2}\left[b^2c^2(1+uv)^2+a^2c^2(u-v)^2+a^2b^2(1-uv)^2\right],$$

et comme la quantité entre [ ] est négative, puisqu'elle ne diffère de $\mathcal{EG}-\mathcal{F}^2$ (calculé en coordonnées symétriques imaginaires u, v) que par un facteur positif, et puisque en outre $k>0$, on voit que le déterminant $\mathrm{B}\overline{\mathrm{B}}-\mathrm{AC}$ est positif et l'équation (37), pour toute couple (u, v) rendant le ds^2 défini positif, représente dans le plan complexe t un cercle *réel*.

Maintenant nous allons démontrer que l'équation (34) est une conséquence de (37). En effet substituons dans (34) les valeurs effectives (66), § 12, de U, V, W; elle s'écrit alors :

$$\frac{\left[\left(\frac{ab}{a'b'}-\frac{c}{c'}-\frac{bc}{b'c'}+\frac{a}{a'}\right)v^2+\left(\frac{ab}{a'b'}-\frac{c}{c'}+\frac{bc}{b'c'}-\frac{a}{a'}\right)\right]\bar{t}^2}{\mathrm{A}\bar{t}^2-2\frac{ac}{a'c'}(u-v)\bar{t}-\mathrm{C}}$$

$$+\frac{4\left(\frac{ac}{a'c'}-\frac{b}{b'}\right)v\bar{t}+\left[\left(\frac{ab}{a'b'}-\frac{c}{c'}+\frac{bc}{b'c'}-\frac{a}{a'}\right)v^2+\left(\frac{ab}{a'b'}-\frac{c}{c'}-\frac{bc}{b'c'}+\frac{a}{a'}\right)\right]}{\mathrm{A}\bar{t}^2-2\frac{ac}{a'c'}(u-v)\bar{t}-\mathrm{C}}$$

$$=\frac{\left[\left(\frac{ab}{a'b'}+\frac{c}{c'}-\frac{bc}{b'c'}-\frac{a}{a'}\right)v^2+\left(\frac{ab}{a'b'}+\frac{c}{c'}+\frac{bc}{b'c'}+\frac{a}{a'}\right)\right]t^2}{\mathrm{A}t^2+2\frac{ac}{a'c'}(u-v)t-\mathrm{C}}$$

$$-\frac{4\left(\frac{ac}{a'c'}+\frac{b}{b'}\right)vt-\left[\left(\frac{ab}{a'b'}+\frac{c}{c'}+\frac{bc}{b'c'}+\frac{a}{a'}\right)v^2-\left(\frac{ab}{a'b'}+\frac{c}{c'}-\frac{bc}{b'c'}-\frac{a}{a'}\right)\right]}{\mathrm{A}t^2+2\frac{ac}{a'c'}(u-v)t-\mathrm{C}}.$$

Introduisons dans la première fraction pour $\bar{t}$ la valeur :

$$\bar{t} = -\frac{Bt + C}{At + \overline{B}}$$

tirée de l'équation (37), et multiplions-en les deux termes par $(At + \overline{B})^2$. Il reste à prouver l'identité de deux quotients de polynômes du deuxième degré en t que nous écrivons pour un moment :

$$\frac{\Phi_1}{\Phi} = \frac{\Psi_1}{\Psi}.$$

La comparaison des deux dénominateurs Φ, Ψ montre que l'on a :

$$\Phi = (B\overline{B} - AC)\,\Psi,$$

ce que nous pouvons écrire :

$$(39)\qquad \begin{cases} (At + \overline{B})^2 \left[A\bar{t}^2 - 2\,\frac{ac}{a'c'}(u - v)\,\bar{t} - C\right] \\ \qquad = (B\overline{B} - AC)\left[At^2 + 2\,\frac{ac}{a'c'}(u - v)\,t - C\right]; \end{cases}$$

et on trouve encore :

$$\Phi_1 = (B\overline{B} - AC)\,\Psi_1;$$

ce qui démontre notre assertion.

Cela posé, prenons les équations différentielles (II), § 39, pour θ_1 en remarquant que la quantité

$$\rho = \frac{b^2c^2(1 + uv)^2 + a^2c^2(u - v)^2 + a^2b^2(1 - uv)^2}{abc\,(u + v)^2}$$

est réelle négative, d'après ce que l'on a observé plus haut; posons donc :

$$\rho = -\mathrm{R}^2, \qquad \sqrt{\rho} = i\mathrm{R} \ (\mathrm{R} \text{ réelle}).$$

Les équations en θ deviennent :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\theta}{\partial u} = -\dfrac{a'b'c'}{k(u+v)^2\mathrm{R}^2}\cdot \mathrm{V} - i\dfrac{a'b'c'}{2k\mathrm{R}\sqrt{abc}}\left(\mathfrak{D}\mathrm{U} + \mathfrak{D}'\mathrm{V}\right), \\ \dfrac{\partial\theta}{\partial v} = -\dfrac{a'b'c'}{k(u+v)^2\mathrm{R}^2}\cdot \mathrm{U} - i\dfrac{a'b'c'}{2k\mathrm{R}\sqrt{abc}}\left(\mathfrak{D}'\mathrm{U} + \mathfrak{D}''\mathrm{V}\right), \end{cases}$$

et, comme

$$\frac{dt}{d\theta} = -\frac{1+t^2}{2},$$

elles se traduisent pour la fonction t dans le système :

$$(40) \qquad \begin{cases} 2\dfrac{\partial t}{\partial u} = \dfrac{a'b'c'}{k(u+v)^2\mathrm{R}^2}\cdot \mathrm{V}_1 + i\dfrac{a'b'c'}{2k\mathrm{R}\sqrt{abc}}\left(\mathfrak{D}\mathrm{U}_1 + \mathfrak{D}'\mathrm{V}_1\right), \\ 2\dfrac{\partial t}{\partial v} = \dfrac{a'b'c'}{k(u+v)^2\mathrm{R}^2}\cdot \mathrm{U}_1 + i\dfrac{a'b'c'}{2k\mathrm{R}\sqrt{abc}}\left(\mathfrak{D}'\mathrm{U}_1 + \mathfrak{D}''\mathrm{V}_1\right), \end{cases}$$

où l'on a posé :

$$\mathrm{U}_1 = \mathrm{U}(1+t^2), \qquad \mathrm{V}_1 = \mathrm{V}(1+t^2), \qquad \mathrm{W}_1 = \mathrm{W}(1+t^2).$$

Maintenant, comme la surface (S) est réelle et $\bar{u} = v$, $\bar{v} = u$, on a :

$$\overline{\mathfrak{D}} = \mathfrak{D}'', \qquad \overline{\mathfrak{D}}'' = \mathfrak{D}, \qquad \overline{\mathfrak{D}}' = \mathfrak{D}';$$

les équations conjuguées des (40) sont donc les suivantes :

$$(40^*)\quad \begin{cases} 2\dfrac{\partial \bar t}{\partial u} = \dfrac{a'b'c'}{k(u+v)^2 R^2}\cdot \overline{U}_1 - i\dfrac{a'b'c'}{2kR\sqrt{abc}}(\mathfrak{D}'\overline{U}_1 + \mathfrak{D}\overline{V}_1), \\ 2\dfrac{\partial \bar t}{\partial v} = \dfrac{a'b'c'}{k(u+v)^2 R^2}\cdot \overline{V}_1 - i\dfrac{a'b'c'}{2kR\sqrt{abc}}(\mathfrak{D}''\overline{U}_1 + \mathfrak{D}'\overline{V}_1). \end{cases}$$

Si l'on adjoint à ces équations différentielles (40), (40*) l'équation bilinéaire (37), on peut démontrer que les équations obtenues en dérivant celle-ci par rapport à u et v sont des conséquences des mêmes équations (37), (40) et (40*). Il suffira de s'occuper de la première, dont la conjuguée donne la seconde. Or la dérivation de l'équation (37) par rapport à u donne :

$$(A\bar t + B)\frac{\partial t}{\partial u} + (At + \overline{B})\frac{\partial \bar t}{\partial u} + \frac{b}{b'}\left(\frac{c}{c'} - \frac{a}{a'}\right)v t\bar t - \frac{ac}{a'c'}\left(\frac{b}{b'} + 1\right)t$$
$$- \frac{ac}{a'c'}\left(\frac{b}{b'} - 1\right)\bar t + \frac{b}{b'}\left(\frac{a}{a'} + \frac{c}{c'}\right)v = 0.$$

Substituant dans le premier membre les valeurs (40), (40*) de $\frac{\partial t}{\partial u}$, $\frac{\partial \bar t}{\partial u}$, nous avons une expression de la forme :

$$\Omega = \alpha\mathfrak{D} + \beta\mathfrak{D}' + \gamma,$$

dans laquelle :

$$2\alpha = i\frac{a'b'c'}{2kR\sqrt{abc}}[(A\bar t + B)U_1 - (At + \overline{B})\overline{V}_1],$$

$$2\beta = i\frac{a'b'c'}{2kR\sqrt{abc}}[(A\bar t + B)V_1 - (At + \overline{B})\overline{U}_1].$$

Or nous avons démontré que l'on a :

$$\frac{U}{\overline{V}} = \frac{W}{\overline{W}},$$

ou, ce qui est la même chose :

$$\frac{U_1}{V_1} = \frac{W_1}{W_1},$$

et d'autre part on tire de l'identité (39) :

$$\frac{W_1}{W_1} = \frac{At + \overline{B}}{A\overline{t} + B};$$

il en résulte donc $\alpha = 0$, et de même $\beta = 0$. Après cela l'expression de γ devient :

$$\gamma = \frac{a'b'c'}{k(u+v)^2 R^2}(A\overline{t} + B)\,V_1 + \frac{b}{b'}\left(\frac{c}{c'} - \frac{a}{a'}\right)vt\overline{t} - \frac{ac}{a'c'}\left(\frac{b}{b'} + 1\right)t$$

$$- \frac{ac}{a'c'}\left(\frac{b}{b'} - 1\right)\overline{t} + \frac{b}{b'}\left(\frac{a}{a'} + \frac{c}{c'}\right)v.$$

Comme

$$R^2 = \frac{a'^2b'^2c'^2}{kabc(u+v)^2}(B\overline{B} - AC),$$

d'où :

$$\frac{a'b'c'}{k(u+v)^2R^2} = \frac{abc}{a'b'c'}\,\frac{1}{B\overline{B} - AC},$$

nous en déduisons :

$$\gamma(At + \overline{B}) = \frac{abc}{a'b'c'}V_1 + \frac{b}{b'}\left(\frac{a}{a'} - \frac{c}{c'}\right)vt(Bt + C) - \frac{ac}{a'c'}\left(\frac{b}{b'} + 1\right)t(At + \overline{B})$$

$$+ \frac{ac}{a'c'}\left(\frac{b}{b'} - 1\right)(Bt + C) + \frac{b}{b'}\left(\frac{a}{a'} + \frac{c}{c'}\right)v(At + \overline{B}).$$

Le second membre est un polynôme du deuxième degré en t, qu'on vérifie sans peine être identiquement nul. Donc $\alpha=\beta=\gamma=0$ et notre proposition est démontrée.

Nous concluons de là : *Toute surface réelle* (S) *applicable idéalement sur l'hyperboloïde à une nappe admet* ∞^2 *transformations* B_k *réelles chacune desquelles change* (S) *dans une autre surface* (S_1) *de la même classe.*

§ 51.

LES QUADRIQUES CONJUGUÉES EN DÉFORMATION.

Nous allons maintenant introduire dans notre théorie une nouvelle transformation de tout autre nature que les transformations B_k considérées jusqu'ici. Cette nouvelle transformation dépend de la notion de *couples de surfaces conjuguées en déformation* que j'ai introduite dans deux notes insérées en 1902-1903 aux *Rendiconti dei Lincei* [1].

Appelons asymptotiques *virtuelles* d'une surface tout système de lignes capables de devenir les lignes asymptotiques effectives après une convenable déformation de la surface. Nous dirons que deux surfaces (S), ($\overline{S}$) sont *conjuguées en déformation* lorsqu'elles se correspondent point par point de telle manière que leurs lignes asymptotiques actuelles se correspondent, ainsi que *tous les systèmes d'asymptotiques virtuelles*. Pour que cela arrive, il faut et il suffit (1re note) que la correspondance entre (S) et ($\overline{S}$) conserve les asymptotiques actuelles et les lignes géodésiques [2]. Dans la pre-

[1] 1re note. — Sopra un problema relativo alla teoria della deformazione delle superficie (aprile 1902).

2e note. — Sulle quadriche coniugate in deformazione (aprile 1903).

Voir aussi : SERVANT. Sur la déformation des surfaces (*Comptes rendus de l'Académie*, 2e semestre 1902).

[2] Il est bien évident que toute couple de surfaces semblables satisfait à ces conditions; mais nous écartons toujours dans le texte ce cas banal.

mière des notes citées j'ai résolu le problème de la détermination des couples de surfaces conjuguées en déformation dans le cas des déformées des surfaces de révolution et j'ai montré dans la seconde que toute quadrique générale admet une quadrique (non semblable) conjuguée en déformation. M. Servant, dans sa note (antérieure à ma deuxième publication), établit de plus que deux surfaces conjuguées en déformation (non applicables sur des surfaces de révolution) sont toujours déformées de quadriques.

Nous devons encore remarquer que pour deux surfaces (S), $(\overline{S})$ conjuguées en déformation les deux deuxièmes formes fondamentales :

$$\mathfrak{D}\,du^2 + 2\,\mathfrak{D}'\,du\,dv + \mathfrak{D}''\,dv^2,$$

$$\overline{\mathfrak{D}}\,du^2 + 2\,\overline{\mathfrak{D}}'\,du\,dv + \overline{\mathfrak{D}}''\,dv^2\,[1],$$

sont proportionnelles par un facteur, indépendant de la déformation des surfaces. Chaque déformation de l'une des surfaces fixe ainsi (intrinsèquement) une déformation correspondante pour l'autre.

Cela rappelé, je vais encore reproduire ici, de la deuxième note, les considérations géométriques très simples qui conduisent aux couples de quadriques conjuguées en déformation, parce qu'elles nous sont nécessaires dans la suite.

Considérons une homographie quelconque de l'espace, qui ne soit pas une similitude. Il y a un et un seul système triple orthogonal, composé de quadriques homofocales, qui se transforme par l'homographie dans un autre tel système. Soit Q une quadrique quelconque du premier système, $\overline{Q}$ la quadrique correspondante dans l'autre; je dis que : *sur les deux quadriques* Q, $\overline{Q}$ *les systèmes conjugués se correspondent, ainsi que les lignes géodésiques.*

Le premier point est évident, puisque la correspondance entre Q

[1] Il est presque superflu d'avertir qu'à partir d'ici (et jusqu'au dernier paragraphe) les signes $\overline{\mathfrak{D}}$, $\overline{\mathfrak{D}}'$... n'ont plus la signification de quantités conjuguées de $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$...

IMPRIMERIE NATIONALE.

et $\overline{Q}$ est une homographie. Pour démontrer que les lignes géodésiques se correspondent aussi, il suffit de remarquer que notre homographie fait correspondre à la normale à Q dans un point p la normale à $\overline{Q}$ dans le point correspondant $\overline{p}$, et par suite à chaque plan normal en p à la quadrique Q un plan normal à $\overline{Q}$ en $\overline{p}$. Une ligne géodésique g de Q, ayant son plan osculateur normal à Q, aura pour ligne correspondante $\overline{g}$ sur $\overline{Q}$ une ligne qui jouira de la même propriété et sera par suite géodésique sur $\overline{Q}$. Nous en concluons :

Si deux quadriques se correspondent dans une homographie qui change le système homofocal déterminé par l'une dans le système homofocal déterminé par l'autre, elles sont conjuguées en déformation.

Supposons fixée la première quadrique Q. Pour trouver ses quadriques $\overline{Q}$ conjuguées en déformation, il faudra chercher une homographie qui change le système homofocal (Q) déterminé par Q dans un autre système homofocal. Prenons une quadrique Q à centre et écrivons l'équation du système homofocal (Q) sous la forme habituelle :

$$(41) \qquad \frac{x^2}{a^2+\rho}+\frac{y^2}{b^2+\rho}+\frac{z^2}{c^2+\rho}=1,$$

en supposant :

$$a^2>b^2>c^2.$$

Si l'on cherche une homographie *réelle* qui change ce système dans un autre homofocal, on trouve (2e note) qu'elle est donnée, à moins d'une similitude, par les formules :

$$(42) \quad \overline{x}=\frac{\sqrt{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}}{x}, \qquad \overline{y}=\sqrt{a^2-b^2}\,\frac{z}{x}, \qquad \overline{z}=\sqrt{a^2-c^2}\,\frac{y}{x}.$$

Celles-ci définissent en effet une homographie (biaxiale harmonique) qui transforme le système homofocal (42) *dans le même système*

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2+\bar{\rho}}+\frac{\bar{y}^2}{b^2+\bar{\rho}}+\frac{\bar{z}^2}{c^2+\bar{\rho}}=1,$$

où l'on a posé :

$$\bar{\rho}=\frac{b^2c^2-a^2(b^2+c^2+\rho)}{a^2+\rho}. \tag{43}$$

Aux valeurs singulières de ρ :

$$\rho=\infty, \quad -a^2, \quad -b^2, \quad -c^2,$$

qui donnent les coniques focales (y compris le cercle de l'infini correspondant à $\rho=\infty$), correspondent, dans un autre ordre, les mêmes valeurs :

$$\bar{\rho}=-a^2, \quad \infty, \quad -c^2, \quad -b^2.$$

On voit que l'homographie permute le cercle de l'infini avec la conique focale imaginaire et les deux coniques focales réelles entre elles. En particulier on déduit d'ici :

L'ellipsoïde à trois axes

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (a^2>b^2>c^2)$$

admet, comme quadrique conjuguée en déformation, l'hyperboloïde homofocal à deux nappes

$$\frac{\bar{x}^2}{\frac{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}{a^2}}-\frac{\bar{y}^2}{\frac{(a^2-b^2)c^2}{a^2}}-\frac{\bar{z}^2}{\frac{(a^2-c^2)b^2}{a^2}}=1,$$

et la correspondance entre les deux quadriques est donnée par l'homographie (42).

Prenons maintenant l'hyperboloïde à une nappe; nous avons:

L'hyperboloïde à une nappe

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (a^2>b^2)$$

est conjugué en déformation à l'autre hyperboloïde homofocal à une nappe

$$\frac{\bar{x}^2}{\frac{(a^2-b^2)(a^2+c^2)}{a^2}}+\frac{\bar{y}^2}{\frac{(a^2-b^2)c^2}{a^2}}-\frac{\bar{z}^2}{\frac{(a^2+c^2)b^2}{a^2}}=1,$$

et la correspondance entre les deux quadriques est donnée par l'homographie

$$(44)\quad \bar{x}=\sqrt{(a^2-b^2)(a^2+c^2)}\,\frac{x}{a^2}, \qquad \bar{y}=\sqrt{a^2-b^2}\,\frac{z}{x}, \qquad \bar{z}=\sqrt{a^2+c^2}\,\frac{y}{x}.$$

Un cas particulier remarquable est donné par l'hyperboloïde *orthogonal*, où

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{b^2}.$$

Dans ce cas (et dans celui-ci seulement) l'hyperboloïde conjugué est identique (ou semblable) au primitif, et l'homographie (44) transforme la surface en elle-même et conserve ses lignes géodésiques. Les déformations de l'hyperboloïde orthogonal se présentent, d'après cela, en couples de déformations conjuguées.

Il importe aussi de remarquer que nos considérations s'appliquent non seulement aux régions *réelles* des quadriques, mais

aussi à leurs régions imaginaires correspondantes. Si l'on prend d'abord l'hyperboloïde à une nappe, les formules (57), § 12, démontrent que pour u, v imaginaires conjuguées y est purement imaginaire et x, z sont réelles; au contraire lorsque v est conjuguée de $\frac{1}{u}$, x, y sont réelles, z purement imaginaire. Or, comme l'homographie (44) permute entre elles les deux espèces de régions imaginaires de l'hyperboloïde, on voit que les deux classes de surfaces applicables idéalement sur l'hyperboloïde à une nappe, que nous avons considéré au paragraphe 50, sont conjuguées en déformation l'une de l'autre.

De même les surfaces applicables idéalement sur l'hyperboloïde à deux nappes du paragraphe 46 ont pour conjuguées en déformation les surfaces applicables idéalement sur l'ellipsoïde duparagraphe 48.

§ 52.

LA TRANSFORMATION $\mathfrak{H}$ ET SES PREMIÈRES PROPRIÉTÉS.

Soient Q et $\overline{\text{Q}}$ deux quadriques conjuguées en déformation. Soit (S) une déformée quelconque de Q; il y correspondra une déformée $(\overline{\text{S}})$ de $(\overline{\text{Q}})$, parfaitement déterminée, les deux surfaces (S) et $(\overline{\text{S}})$ se correspondant encore par systèmes conjugués et lignes géodésiques. Nous appelons *transformation* $\mathfrak{H}$ le passage de la déformée (S) de Q à la déformée $(\overline{\text{S}})$ de $(\overline{\text{Q}})$. Cette transformation $\mathfrak{H}$ a la période 2 et change les déformées d'une quadrique Q dans les déformées d'une autre quadrique $\overline{\text{Q}}$. Elle est assimilable sous plusieurs rapports à la *transformation d'Hazzidakis*[1] des surfaces à courbure constante positive, ce qui s'explique en remarquant que les surfaces lieux des centres de courbure de deux surfaces à courbure constante positive, liées par une transformation d'Hazzidakis, sont précisément conjuguées en déformation.

[1] Voir mes *Lezioni*, etc., vol. II, § 392.

Bien que la transformation $\mathfrak{H}$ ne soit pas réalisable par une construction géométrique dans l'espace, elle a toutefois plusieurs propriétés en commun avec les transformations B_k, ainsi que nous allons le voir.

En premier lieu remarquons que si la surface (S) est réglée, sa conjuguée en déformation $(\overline{S})$ est aussi réglée, car aux droites de (S) correspondent sur $(\overline{S})$ des lignes qui sont à la fois asymptotiques et géodésiques; donc :

La transformation $\mathfrak{H}$ change toute déformée réglée R *de* Q *dans une déformée réglée* $\overline{R}$ *de* $\overline{Q}$.

Une autre propriété, qui dérive immédiatement de la définition même de la transformation $\mathfrak{H}$, est la suivante :

La transformation $\mathfrak{H}$ conserve les systèmes conjugués; en particulier elle change le système conjugué persistant de (S) *dans le système conjugué persistant de* $(\overline{S})$.

Supposons maintenant que la surface (S) se déforme autour d'une ligne asymptotique invariable a. Dans la déformation correspondante de $(\overline{S})$ la ligne $\overline{a}$, qui correspond à l'asymptotique a, sera toujours asymptotique et par suite de forme invariable. Donc : *Si la surface* (S) *se déforme autour d'une asymptotique invariable* a, *sa conjuguée en déformation* $(\overline{S})$ *se déforme aussi autour de l'asymptotique invariable* $\overline{a}$ *correspondante.*

En particulier déformons (S) autour de l'asymptotique invariable a jusqu'à rectifier les géodésiques g transformées des droites (d'un système) de Q; elle deviendra, d'après le théorème de Chieffi, la réglée R circonscrite à (S) le long de a, et la même chose arrivera pour $(\overline{S})$. Donc : *Si par les points de deux lignes asymptotiques correspondantes sur les deux surfaces* (S), $(\overline{S})$ *conjuguées en déformation, on tire les tangentes aux géodésiques transformées des droites correspondantes des quadriques* Q, $\overline{Q}$, *les deux surfaces réglées* R, $\overline{R}$ *que l'on forme sont encore conjuguées en déformation.*

Toutes ces propriétés de la transformation $\mathcal{S}$ découlent, comme l'on voit, presque immédiatement de sa définition. Nous voulons indiquer ici une autre propriété qui se rapporte aux déformations *infiniment petites* conjuguées de (S), $(\overline{S})$. La correspondance ponctuelle entre (S) et $(\overline{S})$ établit aussi une correspondance entre les congruences rectilignes qui ont (S) pour une nappe focale et celles qui ont pour nappe focale la conjuguée en déformation $(\overline{S})$, les rayons des deux congruences étant censés dans les directions correspondantes. On a le théorème général suivant : *La transformation* $\mathcal{S}$ *change toute congruence rectiligne* W, *dont une des nappes focales est* (S), *en une autre congruence* W *avec la nappe focale* $(\overline{S})$.

Nous ne donnerons pas ici la démonstration de cette propriété, car c'est seulement un cas particulier du théorème qui nous intéresse, lorsque ces congruences W appartiennent à la classe que nous avons étudiée dans ce mémoire. Alors la propriété se précise toujours plus et met en relation la transformation $\mathcal{S}$ avec les transformations B_k.

§ 53.

HYPERBOLOÏDES À UNE NAPPE CONJUGUÉS EN DÉFORMATION.

Nous allons développer nos calculs seulement dans le cas des régions réelles de deux hyperboloïdes à une nappe conjugués en déformation. Mais nos développements analytiques conserveront évidemment leur valeur pour toute couple de quadriques conjuguées en déformation; et cela aussi bien pour leurs régions réelles que pour les régions imaginaires correspondantes.

Soit donc

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}=1 \qquad (a^2>b^2)$$

l'équation de Q, et soit (§ 50)

$$\frac{\bar{x}_0^2}{\bar{a}^2}+\frac{\bar{y}_0^2}{\bar{b}^2}-\frac{\bar{z}_0^2}{\bar{c}^2}=1$$

celle de $\overline{\mathrm{Q}}$, où nous avons posé :

$$(45)\qquad \bar{a}=\frac{\sqrt{(a^2-b^2)(a^2+c^2)}}{a},\qquad \bar{b}=\frac{c}{a}\sqrt{a^2-b^2},\qquad \bar{c}=\frac{b}{a}\sqrt{a^2+c^2}.$$

On passe de l'hyperboloïde Q à son conjugué en déformation $\overline{\mathrm{Q}}$ à l'aide de l'homographie (44), ou :

$$(45^*)\qquad \frac{\bar{x}_0}{\bar{a}}=\frac{a}{x_0},\qquad \frac{\bar{y}_0}{\bar{b}}=\frac{a}{c}\frac{z_0}{x_0},\qquad \frac{\bar{z}_0}{\bar{c}}=\frac{a}{b}\frac{y_0}{x_0}.$$

Les formules (57), paragraphe 12, donnent par suite :

$$(46)\qquad \bar{x}_0=\bar{a}\frac{u+v}{1+uv},\qquad \bar{y}_0=b\frac{1-uv}{1+uv},\qquad \bar{z}_0=\bar{c}\frac{u-v}{1+uv},$$

et pour les quantités

$$\bar{\mathcal{E}}\bar{\mathcal{G}}-\bar{\mathcal{F}}^2,\quad \overline{\mathfrak{D}}_0,\overline{\mathfrak{D}}'_0,\overline{\mathfrak{D}}''_0,\quad \bar{\rho}$$

de $\overline{\mathrm{Q}}$ homologues aux quantités

$$\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2,\qquad \mathfrak{D}_0,\ \mathfrak{D}'_0,\ \mathfrak{D}''_0,\qquad \rho$$

de Q, on trouve :

$$\frac{\bar{\mathcal{E}}\bar{\mathcal{G}}-\bar{\mathcal{F}}^2}{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}=\frac{\bar{a}^2}{a^2}\frac{(u+v)^6}{(1+uv)^6},$$

$$\overline{\mathfrak{D}}_0=\overline{\mathfrak{D}}''_0=0,\quad \overline{\mathfrak{D}}'_0=-4\frac{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}{(1+uv)^4\sqrt{\bar{\mathcal{E}}\bar{\mathcal{G}}-\bar{\mathcal{F}}^2}};$$

d'où

$$\bar{\rho} = \frac{(1+uv)^4 (\bar{\mathcal{E}}\bar{\mathcal{G}} - \bar{\mathcal{F}}^2)}{4\bar{a}\bar{b}\bar{c}}.$$

Comme on a :

$$\rho = \frac{(u+v)^4 (\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2)}{4abc}, \quad \bar{a}\bar{b}c = a\bar{b}\bar{c},$$

nous en déduisons :

$$\bar{\rho} = \frac{(u+v)^2}{(1+uv)^2} \cdot \rho. \tag{47}$$

Soit maintenant (S) une déformée quelconque de Q, et soit

$$\mathfrak{D}du^2 + 2\mathfrak{D}'dudv + \mathfrak{D}''dv^2$$

sa deuxième forme fondamentale. La surface $(\bar{S})$, conjuguée en déformation de (S), aura sa deuxième forme fondamentale :

$$\bar{\mathfrak{D}}du^2 + 2\bar{\mathfrak{D}}'dudv + \bar{\mathfrak{D}}''dv^2,$$

proportionnelle à celle de (S). Cela donne :

$$\frac{\bar{\mathfrak{D}}}{\mathfrak{D}} = \frac{\bar{\mathfrak{D}}'}{\mathfrak{D}'} = \frac{\bar{\mathfrak{D}}''}{\mathfrak{D}''};$$

et comme

$$\frac{\mathfrak{D}\mathfrak{D}'' - \mathfrak{D}'^2}{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2} = -\frac{1}{\rho^2}, \qquad \frac{\bar{\mathfrak{D}}\bar{\mathfrak{D}}'' - \bar{\mathfrak{D}}'^2}{\bar{\mathcal{E}}\bar{\mathcal{G}} - \bar{\mathcal{F}}^2} = -\frac{1}{\bar{\rho}^2},$$

d'où

$$\frac{\bar{\mathfrak{D}}\bar{\mathfrak{D}}'' - \bar{\mathfrak{D}}'^2}{\mathfrak{D}\mathfrak{D}'' - \mathfrak{D}'^2} = \frac{\bar{\rho}^2}{\rho^2} \frac{\bar{\mathcal{E}}\bar{\mathcal{G}} - \bar{\mathcal{F}}^2}{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2} = \frac{\bar{a}^2}{a^2} \frac{(u+v)^2}{(1+uv)^2},$$

il vient :

$$\frac{\bar{\mathfrak{D}}}{\mathfrak{D}} = \frac{\bar{\mathfrak{D}}'}{\mathfrak{D}'} = \frac{\bar{\mathfrak{D}}''}{\mathfrak{D}''} = \pm \frac{\bar{a}}{a} \frac{u+v}{1+uv}.$$

IMPRIMERIE NATIONALE.

Il est inutile de conserver le double signe, car on passe d'un signe à l'autre en remplaçant par exemple $(\overline{S})$ par sa surface symétrique. Choisissons le signe inférieur et écrivons :

$$\frac{\overline{\Theta}}{\Theta} = \frac{\overline{\Theta}'}{\Theta'} = \frac{\overline{\Theta}''}{\Theta''} = -\frac{\bar{a}}{a}\sqrt{\frac{\bar{\rho}}{\rho}}. \tag{48}$$

Transformons maintenant (S), à l'aide d'une transformation B_k, dans une nouvelle déformée (S_1) de Q, qui sera donnée par les formules habituelles :

$$x_1 = x + l\frac{\partial x}{\partial u} + m\frac{\partial x}{\partial v}, \quad \text{etc.} \tag{49}$$

Si l'on applique la première nappe (S) de la congruence W, dont la deuxième nappe est (S_1), sur la quadrique Q, les segments focaux FF_1, entraînés dans la déformation, se disposent avec leurs extrêmes F_1 sur la quadrique homofocale Q. L'homographie (45*) qui change Q en $\overline{Q}$ transforme Q_k dans une autre quadrique du même système homofocal, que nous appelons $\overline{Q}_{\bar{k}}$ dont l'équation soit :

$$\frac{x^2}{a^2+\bar{k}} + \frac{y^2}{b^2+\bar{k}} - \frac{z^2}{c^2-\bar{k}} = 1;$$

on trouve de suite :

$$\bar{k} = -\frac{a^2 k}{a^2+k}. \tag{50}$$

Pour la même homographie les segments FF_1 se transforment en d'autres segments $\overline{F}\overline{F}_1$ qui touchent en $\overline{F}$ la quadrique $\overline{Q}$ et se terminent en F_1 à la quadrique $\overline{Q}_{\bar{k}}$.

Cela posé, déformons la seconde quadrique $\overline{Q}$ dans la surface $(\overline{S})$. Les segments $\overline{F}\overline{F}_1$ entraînés par $\overline{Q}$ dans la déformation, se dispo-

seront avec leurs extrêmes $\overline{F}_1$ sur une surface $(\overline{S}_1)$, et les coordonnées $\overline{x}_1, \overline{y}_1, \overline{z}_1$ du point de $(\overline{S}_1)$ qui correspond à $\overline{F}_1$ seront données par des formules du type suivant :

$$(5\,1) \qquad \overline{x}_1 = \overline{x} + \overline{l}\frac{\partial \overline{x}}{\partial u} + \overline{m}\frac{\partial \overline{x}}{\partial v}, \quad \text{etc.}$$

Nous voulons démontrer la proposition :

Les deux surfaces $(\overline{S})$, $(\overline{S}_1)$ *seront à leur tour les deux nappes focales d'une congruence* W; *la deuxième nappe* $(\overline{S}_1)$ *sera transformée de la première* $(\overline{S})$ *par une transformation* $B_{\bar{k}}$; *elle sera en outre conjuguée en déformation de la deuxième nappe* (S_1) *de la congruence* W *primitive, comme la première nappe* $(\overline{S})$ *l'était de la première* (S).

§ 54.

LA SURFACE $(\overline{S}_1)$ COMME TRANSFORMÉE DE $(\overline{S})$ PAR UNE $B_{\bar{k}}$.

Pour démontrer la proposition énoncée il faut avant tout calculer les valeurs des coefficients $\overline{l}$, $\overline{m}$ dans les formules (5 1). À cet effet, nous devons remarquer qu'on a la proportion :

$$\frac{\overline{l}}{l} = \frac{\overline{m}}{m},$$

car les segments $\overline{F}\overline{F}_1$ sont tirés, d'après notre construction, dans les directions qui correspondent à celles des segments FF_1. Posons donc :

$$\overline{l} = hl, \qquad \overline{m} = hm,$$

et déterminons le facteur h de proportionnalité. Indiquons par ξ, η, ζ ce que deviennent x_1, y_1, z_1 lorsque (S) s'applique sur Q, et de même par $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$ ce que deviennent $\bar{x}_1$, $\bar{y}_1$ $\bar{z}_1$ lorsque $(\bar{S})$ s'applique sur $(\bar{Q})$. On passe du point (ξ, η, ζ) au point $(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$ à l'aide de l'homographie (45*); donc :

$$\frac{\bar{\xi}}{\bar{a}} = \frac{a}{\xi}.$$

D'ailleurs on a :

$$\frac{\xi}{a} = \frac{(u+v)(1+uv) + l(v^2-1) + m(u^2-1)}{(u+v)^2},$$

$$\frac{\bar{\xi}}{\bar{a}} = \frac{(u+v)(1+uv) - \bar{l}(v^2-1) - \bar{m}(u^2-1)}{(1+uv)^2},$$

et par suite :

$$\frac{h[l(1-v^2)+m(1-u^2)]+(u+v)(1+uv)}{(1+uv)^2} = \frac{(u+v)^2}{(u+v)(1+uv)-l(1-v^2)-m(1-u^2)},$$

ou encore :

$$h = \frac{(u+v)(1+uv)}{(u+v)(1+uv)-l(1-v^2)-m(1-u^2)}.$$

Maintenant, comme

$$l = \frac{(u+v)\,U}{W}, \qquad m = \frac{(u+v)\,V}{W},$$

il vient :

$$h = \frac{(1+uv)\,W}{(1+uv)\,W+(v^2-1)\,U+(u^2-1)\,V}.$$

Par la substitution des valeurs effectives (66), § 12, de U, V, W (signes supérieurs), on trouve :

$$(1+uv)\,W+(v^2-1)\,U+(u^2-1)\,V = (u+v)\cdot\Omega,$$

en posant :

$$(52)\qquad \Omega = 2\left[\frac{b}{b'}(1-uv)\cos\theta - \frac{bc}{b'c'}(u+v)\sin\theta + \frac{c}{c'}(u-v)\right].$$

Nous avons donc :

$$h = \frac{1+uv}{u+v}\cdot\frac{W}{\Omega},$$

et par suite :

$$(53)\qquad \bar{l} = (1+uv)\cdot\frac{U}{\Omega}, \qquad \bar{m} = (1+uv)\cdot\frac{V}{\Omega}.$$

Il s'agit maintenant de démontrer que les formules (51), ou bien, d'après les formules précédentes, les autres

$$(54)\qquad \bar{x}_1 = \bar{x} + \frac{1+uv}{\Omega}\left(U\frac{\partial\bar{x}}{\partial u} + V\frac{\partial\bar{x}}{\partial v}\right)$$

définissent une transformée $(\bar{S}_1)$ de la surface $(\bar{S})$ à l'aide de la transformation B_k.

Il nous faut encore, à cet effet, transformer les formules actuelles relatives à l'hyperboloïde $\bar{Q}$ dans celles qui se rapportent à l'hyperboloïde Q, données au paragraphe 12. Écrivons donc, en correspondance aux formules (57), § 12 :

$$\bar{x}_0 = \bar{a}\frac{1+\bar{u}\bar{v}}{\bar{u}+\bar{v}}, \qquad \bar{y}_0 = \bar{b}\frac{\bar{u}-\bar{v}}{\bar{u}+\bar{v}}, \qquad z_0 = \bar{c}\frac{1-\bar{u}\bar{v}}{\bar{u}+\bar{v}}.$$

La comparaison avec les équations (46) montre que les nouvelles variables $\bar{u}$, $\bar{v}$ s'expriment par les anciennes u, v à l'aide des simples formules :

$$(55)\qquad \bar{u} = \frac{1}{u}, \qquad \bar{v} = v.$$

Une surface $(\bar{S}_1)$ transformée de $(\bar{S})$ à l'aide de la transformation $B_{\bar{k}}$ sera donnée par les formules

$$\bar{x}_1 = \bar{x} + \lambda \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{u}} + \mu \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{v}}, \tag{56}$$

où l'on aura (§ 12) :

$$\lambda = (\bar{u} + \bar{v}) \cdot \frac{\bar{U}}{\bar{W}}, \qquad \mu = (\bar{u} + \bar{v}) \cdot \frac{\bar{V}}{\bar{W}}, \tag{57}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{U} &= \left(\frac{\bar{a}\bar{c}}{\bar{a}'\bar{c}'} - \frac{\bar{b}}{\bar{b}'} \right) 2\bar{u}\cos\theta + \left(\frac{\bar{b}\bar{c}}{\bar{b}'\bar{c}'} - \frac{\bar{a}}{\bar{a}'} \right) (\bar{u}^2 - 1)\sin\theta + \left(\frac{\bar{a}\bar{b}}{\bar{a}'\bar{b}'} - \frac{\bar{c}}{\bar{c}'} \right) (\bar{u}^2 + 1), \\ \bar{V} &= \left(-\frac{\bar{a}\bar{c}}{\bar{a}'\bar{c}'} - \frac{\bar{b}}{\bar{b}'} \right) 2\bar{v}\cos\theta + \left(\frac{\bar{b}\bar{c}}{\bar{b}'\bar{c}'} + \frac{\bar{a}}{\bar{a}'} \right) (\bar{v}^2 - 1)\sin\theta + \left(\frac{\bar{a}\bar{b}}{\bar{a}'\bar{b}'} + \frac{\bar{c}}{\bar{c}'} \right) (\bar{v}^2 + 1), \\ \bar{W} &= 2\left[\frac{\bar{a}\bar{c}}{\bar{a}'\bar{c}'} (\bar{u} - \bar{v})\cos\theta - \frac{\bar{b}\bar{c}}{\bar{b}'\bar{c}'} (1 + \bar{u}\bar{v})\sin\theta + \frac{\bar{a}\bar{b}}{\bar{a}'\bar{b}'} (1 - \bar{u}\bar{v}) \right], \end{aligned} \right. \tag{58}$$

ayant posé :

$$\bar{a}^1 = \sqrt{\bar{a}^2 + \bar{k}}, \qquad \bar{b}^1 = \sqrt{\bar{b}^2 + \bar{k}}, \qquad \bar{c}^1 = \sqrt{\bar{c}^2 - \bar{k}}. \tag{59}$$

D'ici, à cause des valeurs (45) de $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ et de la valeur (50) de $\bar{k}$, on tire :

$$\frac{\bar{a}}{\bar{a}'} = \frac{a'}{a}, \qquad \frac{\bar{b}}{\bar{b}'} = \frac{a'}{a} \cdot \frac{c}{c'}, \qquad \frac{\bar{c}}{\bar{c}'} = \frac{a'}{a} \cdot \frac{b}{b'}, \tag{60}$$

et par suite :

$$\bar{U} = -\frac{a'^2}{a^2} \frac{U}{u^2}, \qquad \bar{V} = \frac{a'^2}{a^2} V, \qquad \bar{W} = \frac{a'^2}{a^2} \frac{\Omega}{u}. \tag{61}$$

D'ailleurs les formules (56) s'écrivent en coordonnées u, v :

$$\bar{x}_1 = \bar{x} - \lambda u^2 \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} + \mu \frac{\partial \bar{x}}{\partial v};$$

elles coïncident précisément avec les formules (51), car les formules (54), (58) et (61) montrent que l'on a :

$$\bar{l} = -\lambda u^2, \qquad \bar{m} = \mu.$$

Mais une autre vérification essentielle reste à faire qui se rapporte aux équations différentielles pour θ [(II), § 39] :

$$(62) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \theta}{\partial u} = \dfrac{a'b'c'}{k(u+v)^2\rho} \cdot \mathrm{V} + \dfrac{a'b'c'}{2k\sqrt{abc}\sqrt{\rho}} (\mathfrak{D}\mathrm{U} + \mathfrak{D}'\mathrm{V}), \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial v} = \dfrac{a'b'c'}{k(u+v)^2\rho} \cdot \mathrm{U} + \dfrac{a'b'c'}{2k\sqrt{abc}\sqrt{\rho}} (\mathfrak{D}'\mathrm{U} + \mathfrak{D}''\mathrm{V}). \end{cases}$$

Il faut démontrer que la fonction θ, comme fonction de $\bar{u}$, $\bar{v}$, satisfait aux équations analogues :

$$(63) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \theta}{\partial \bar{u}} = \dfrac{\bar{a}'\bar{b}'\bar{c}'}{\bar{k}(\bar{u}+\bar{v})^2\bar{\rho}} \cdot \overline{\mathrm{V}} + \dfrac{\bar{a}'\bar{b}'\bar{c}'}{2\bar{k}\sqrt{\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}}\sqrt{\bar{\rho}}} (\overline{\Delta}\,\overline{\mathrm{U}} + \overline{\Delta}'\overline{\mathrm{V}}), \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial \bar{v}} = \dfrac{\bar{a}'\bar{b}'\bar{c}'}{\bar{k}(\bar{u}+\bar{v})^2\bar{\rho}} \cdot \overline{\mathrm{U}} + \dfrac{\bar{a}'\bar{b}'\bar{c}'}{2\bar{k}\sqrt{\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}}\sqrt{\bar{\rho}}} (\overline{\Delta}'\overline{\mathrm{U}} + \overline{\Delta}''\overline{\mathrm{V}}), \end{cases}$$

en désignant par

$$\overline{\Delta}\,d\bar{u}^2 + 2\,\overline{\Delta}'d\bar{u}d\bar{v} + \overline{\Delta}''d\bar{v}^2$$

la deuxième forme fondamentale de $(\overline{\mathrm{S}})$:

$$\overline{\mathfrak{D}}\,du^2 + 2\overline{\mathfrak{D}}'dudv + \overline{\mathfrak{D}}''dv^2,$$

transformée en coordonnées $\bar{u} = \frac{1}{u}$, $\bar{v} = v$. Cela donne de suite :

$$\overline{\Delta} = u^4 \overline{\Theta}, \qquad \overline{\Delta}' = -u^2 \overline{\Theta}', \qquad \overline{\Delta}'' = \overline{\Theta}'',$$

ou encore, à cause des équations (48) :

$$\overline{\Delta} = -\frac{\bar{a}}{a} u^4 \sqrt{\frac{\bar{\rho}}{\rho}} \cdot \Theta, \qquad \overline{\Delta}' = \frac{\bar{a}}{a} u^2 \sqrt{\frac{\bar{\rho}}{\rho}} \cdot \Theta', \qquad \overline{\Delta}'' = -\frac{\bar{a}}{a} \sqrt{\frac{\bar{\rho}}{\rho}} \cdot \Theta''.$$

D'après cela, en ayant égard aux formules (61), les équations (63) deviennent :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \theta}{\partial u} = -\dfrac{\bar{a}'\bar{b}'\bar{c}'}{\bar{k}(1+uv)^2\bar{\rho}} \dfrac{a'^2}{a^2} \mathrm{V} - \dfrac{\bar{a}'\bar{b}'\bar{c}'}{2\bar{k}\sqrt{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} \cdot \sqrt{\bar{\rho}}} \cdot \dfrac{a'^2 \bar{a}}{a^3} (\Theta \mathrm{U} + \Theta' \mathrm{V}), \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial v} = -\dfrac{\bar{a}'\bar{b}'\bar{c}'}{\bar{k}(1+uv)^2\bar{\rho}} \dfrac{a'^2}{a^2} \mathrm{U} - \dfrac{\bar{a}'\bar{b}'\bar{c}'}{2\bar{k}\sqrt{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} \cdot \sqrt{\bar{\rho}}} \cdot \dfrac{a'^2 \bar{a}}{a^3} (\Theta' \mathrm{U} + \Theta'' \mathrm{V}). \end{cases}$$

Mais, comme on a :

$$\bar{k} = -\frac{\bar{a}^2}{a'^2} k, \quad \frac{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}{abc} = \frac{\bar{a}^2}{a^2}, \quad \frac{\bar{a}'\bar{b}'\bar{c}'}{a'b'c'} = \frac{\bar{a}^3}{a'^3} \bar{a}^2, \quad \bar{\rho} = \frac{(u+v)^2}{(1+uv)^2} \rho,$$

on voit que les équations précédentes pour θ coïncident avec les équations (62), ce qui complète notre vérification.

§ 55.

PERMUTABILITÉ DE LA TRANSFORMATION $\mathfrak{S}$ AVEC LES B_k.

Les calculs que nous venons d'effectuer démontrent la première partie de la proposition énoncée à la fin du paragraphe 53. Il reste encore à prouver que les surfaces (S_1) et $(\overline{\mathrm{S}_1})$ sont à leur tour con-

juguées en déformation. La démonstration s'achève en ayant de nouveau recours à la loi d'applicabilité entre les deux nappes focales de nos congruences W, c'est-à-dire à l'affinité d'Ivory.

D'après la construction même de la surface $(\overline{S}_1)$, au paragraphe 53, on voit que si l'on applique (S) sur Q, ou $(\overline{S})$ sur $(\overline{Q})$, les segments FF_1 et $\overline{F}\overline{F}_1$, entraînés respectivement par (S) et $(\overline{S})$, se disposent, les premiers avec leurs extrêmes F_1 sur Q_k, les seconds avec leurs extrêmes $\overline{F}_1$ sur $\overline{Q}_k$. Appelons M_1, $\overline{M}_1$ ces positions finales occupées sur Q_k et $\overline{Q}_{\overline{k}}$ par F_1, $\overline{F}_1$; alors M_1, $\overline{M}_1$ se correspondent dans l'homographie (45*). Transportons maintenant, à l'aide de l'affinité d'Ivory, M_1 en N_1 sur Q et $\overline{M}_1$ en $\overline{N}_1$ sur $\overline{Q}$. Les points N_1 et $\overline{N}_1$ seront les positions occupées par F_1 et $\overline{F}_1$ dans les respectives applicabilités de (S_1) et $(\overline{S}_1)$ sur Q et $\overline{Q}$. D'ailleurs, comme l'homographie (45*) échange entre elles toutes les quadriques du système homofocal et par suite les trajectoires orthogonales des hyperboloïdes, les points N_1 et $\overline{N}_1$ se correspondent aussi dans l'homographie (45*). Donc, si N_1 décrit une ligne géodésique sur Q, le point $\overline{N}_1$ décrit une autre géodésique sur $\overline{Q}$. Il s'ensuit que la correspondance entre les points F_1 et $\overline{F}_1$ de (S_1), $(\overline{S}_1)$ conserve les lignes géodésiques. Mais elle conserve aussi les systèmes conjugués, car les systèmes conjugués de (S), (S_1) se correspondent; de même ceux de $(\overline{S})$, $(\overline{S}_1)$ et enfin ceux de (S), $(\overline{S})$. Les surfaces (S_1), $(\overline{S}_1)$ sont donc bien conjuguées en déformation, et notre proposition est complètement démontrée. Nous pouvons l'énoncer aussi sous la forme équivalente :

La transformation $\mathfrak{H}$ *change à la fois les deux nappes focales* (S), (S_1) *d'une de nos congruences* W *dans les deux nappes focales* $(\overline{S})$, $(\overline{S}_1)$ *d'une autre telle congruence.*

Il résulte de là que la transformation $\mathfrak{H}$ est *permutable* avec les transformations B_k, au même sens que celles-ci sont permutables entre elles.

IMPRIMERIE NATIONALE.

On voit en outre que, lorsque les deux surfaces initiales (S) et $(\overline{S})$ sont connues, de toute transformation B_k de (S) on déduit, *en termes finis*, une transformation correspondante $B_{\overline{k}}$ de $(\overline{S})$. Aussi convient-il, dans l'application des transformations B_k aux déformées d'une quadrique Q, d'y associer toujours les deformées de l'autre quadrique $\overline{Q}$ conjuguée en déformation de Q, car les deux problèmes se trouvent résolus ensemble. On passe de cette manière des transformations B_k des surfaces applicables sur l'hyperboloïde à une nappe à celles des surfaces applicables sur l'hyperboloïde à une nappe conjugué, soit qu'il s'agisse de surfaces applicables sur les régions réelles ou bien sur les régions imaginaires correspondantes des deux hyperboloïdes. De même, on passe par la transformation $\mathfrak{H}$ des transformations des déformées de l'ellipsoïde à celles de l'hyperboloïde à deux nappes conjugué, et réciproquement. En particulier, la transformation $\mathfrak{H}$ change les transformations singulières encore en transformations singulières.

§ 56.

INDICATIONS RELATIVES AUX ESPACES À COURBURE CONSTANTE.

La notion de couples (S) et $(\overline{S})$ de surfaces conjuguées en déformation dans l'espace euclidien (§ 51) comporte une extension immédiate au cas où les deux surfaces (S), $(\overline{S})$ appartiennent respectivement à deux espaces à courbure constante, égale ou différente. La même analyse de la première note citée au paragraphe 51 s'applique en effet aussi au cas plus général, et l'on voit que : les deux surfaces (S), $(\overline{S})$ sont conjuguées en déformation lorsque leurs lignes asymptotiques actuelles se correspondent, ainsi que leurs lignes géodésiques.

Cela admis, prenons dans l'espace euclidien une quadrique quel-

conque Q et employons une autre quadrique Q′ homofocale à Q, comme *absolu* d'une métrique de Cayley. Le ds^2 de cette métrique appartient à un espace à courbure constante et la quadrique euclidienne Q est aussi une quadrique non-euclidienne. Il est évident que sur cette quadrique Q les systèmes conjugués euclidiens ou non-euclidiens sont les mêmes; mais je dis de plus que: *les géodésiques euclidiennes de* Q *sont aussi des géodésiques non-euclidiennes, et réciproquement.* Pour le voir il suffit de se rappeler la propriété élémentaire d'après laquelle chaque plan tangent à Q dans un point p a son pôle, par rapport à la quadrique homofocale Q′ (absolu), sur la normale ordinaire à Q en p; celle-ci est donc en même temps normale non-euclidienne. Maintenant une ligne géodésique euclidienne g de Q a partout son plan osculateur normal à la surface dans le sens euclidien et par suite aussi dans le sens non-euclidien; donc elle est aussi une géodésique non-euclidienne. La réciproque résulte de la même considération. Nous concluons de là : *La quadrique* Q *a les mêmes systèmes de lignes asymptotiques virtuelles, soit euclidiennes, soit non-euclidiennes.* Par conséquent les deux problèmes de déformer la quadrique Q dans l'espace euclidien, ou bien dans l'espace à courbure constante, sont *intrinsèquement* équivalents, à chaque déformée euclidienne (S) de Q correspondant une déformée non-euclidienne $(\overline{S})$, qui est sa conjuguée en déformation.

Soit maintenant, dans l'espace euclidien, (S_1) une transformée de (S) par une transformation B_k. À la congruence W de l'espace euclidien ayant pour nappes focales (S), (S_1) correspond, dans l'espace à courbure constante, une autre congruence rectiligne W dont la première nappe focale est $(\overline{S})$ et la deuxième sera appelée $(\overline{S_1})$. Or la proposition finale du paragraphe 53 subsiste encore ici et, tout en omettant la démonstration, nous énonçons le résultat : *La surface non-euclidienne* $(\overline{S_1})$ *est applicable sur* $\overline{Q}$ *et conjuguée en déformation de* (S_1); *elle dérive en outre de* $(\overline{S})$ *par une transformation* $B_{\bar{k}}$ *dans l'espace à courbure constante.*

Ce que nous avons dit suffit pour reconnaître que la théorie des transformations B_k pour les surfaces applicables sur les quadriques est indépendante de la courbure de l'espace. Nous arrêtons là ces considérations, dont le développement ultérieur ne manquera pas d'intérêt. Donnons seulement encore un exemple très simple. Aux sphères, réelles ou imaginaires, de l'espace euclidien sont évidemment conjuguées en déformation, dans l'espace à courbure constante, encore des sphères. Les transformations de Bäcklund des surfaces à courbure constante se transportent d'après cela immédiatement de l'espace euclidien à l'espace non-euclidien. C'est une extension que je donnais, par une tout autre voie, en 1887 [1], et qui a été retrouvée à une époque plus récente par divers auteurs.

§ 57.

LES SYSTÈMES ISOTHERMES-CONJUGUÉS [2] SUR LES QUADRIQUES.

Nous avons vu (§ 37) que les transformations B_k sont intimement liées aux systèmes conjugués persistants sur les quadriques. Aussi peut-on étudier les transformations B_k sans sortir de la quadrique, comme des transformations des systèmes conjugués persistants, ou, si l'on veut, des systèmes d'asymptotiques virtuelles. C'est au même point de vue qu'on étudie les transformations (de Bäcklund) des surfaces pseudosphériques comme des transformations des *courbes d'habillement* (asymptotiques virtuelles) de la surface, qui donnent au ds^2 la forme de Tchébychef :

$$ds^2 = d\alpha^2 + 2\cos\omega\, d\alpha d\beta + d\beta^2.$$

[1] Voir mon mémoire : Sui sistemi di Weingarten negli spazi di curvatura costante (*Memorie dell' Accademia dei Lincei*. Serie IV, vol. IV).

[2] Nous appelons un système de lignes (α, β), tracé sur une surface, *isotherme-conjugué* lorsque la deuxième forme fondamentale de la surface en coordonnées (α, β) prend la forme :

$$\Phi\,(d\alpha^2 \pm d\beta^2).$$

Les recherches que je vais rapidement esquisser dans cette dernière partie ont pour but de commencer une telle étude, et surtout de donner le passage de la méthode qui m'a servi dans ce mémoire à celle que j'ai adoptée dans mes recherches antérieures, particulièrement dans le mémoire B. Nous rencontrerons, chemin faisant, plusieurs propriétés déjà connues par les travaux de MM. Darboux, Servant et Calapso.

Soit Q une quadrique quelconque, que nous rapportons d'abord à ses génératrices rectilignes (u, v). Comme celles-ci sont les lignes asymptotiques, on aura

$$(\mathfrak{L}) = (\mathfrak{L})'' = 0;$$

mais elles sont aussi des lignes géodésiques et par suite on a encore :

$$\left\{ \begin{matrix} 1\,1 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 2\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} = 0.$$

Alors les équations fondamentales de Gauss (5), § 1, montrent que les coordonnées x, y, z d'un point (u, v), mobile sur la quadrique Q, sont trois solutions du système

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} = \left\{ \begin{matrix} 1\,1 \\ 1 \end{matrix} \right\} \frac{\partial \xi}{\partial u}, \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} = \left\{ \begin{matrix} 2\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\} \frac{\partial \xi}{\partial v}. \tag{64}$$

Comme ce système admet aussi la solution $\xi = 1$ indépendante de x, y, z, il est complètement intégrable, et l'on a en particulier :

$$\frac{\partial}{\partial v} \left\{ \begin{matrix} 1\,1 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \begin{matrix} 2\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\}^{(1)}.$$

(1) Cela résulte aussi de la formule de M. Dini :

$$\frac{\partial}{\partial v} \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\}$$

et des formules générales :

$$\partial \log \frac{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}}{\partial u} = \left\{ \begin{matrix} 1\,1 \\ 1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\}, \qquad \partial \log \frac{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}}{\partial v} = \left\{ \begin{matrix} 2\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\}.$$

Indiquant par $\mathcal{L}$ une fonction convenable de u, v, posons :

$$\begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix} = 2\frac{\partial \log \mathcal{L}}{\partial u}, \qquad \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} = 2\frac{\partial \log \mathcal{L}}{\partial v},$$

et le système (64) prendra la forme :

$$(64^*) \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial u} = 2\frac{\partial \log \mathcal{L}}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial u}, \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} = 2\frac{\partial \log \mathcal{L}}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial v}.$$

Maintenant changeons de lignes coordonnées, en posant :

$$\alpha = u + v, \qquad \beta = u - v.$$

Ces lignes (α, β) donnent un système isotherme-conjugué [1], qui est en outre le plus général possible, puisque les paramètres u, v restent arbitraires. Nous avons donc :

Les coordonnées x, y, z d'un point mobile sur une quadrique, rapportée à un système isotherme-conjugué quelconque (α, β), sont trois solutions du système complètement intégrable suivant :

$$(65) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial \alpha^2} + \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial \beta^2} = 2\dfrac{\partial \log \mathcal{L}}{\partial \alpha}\dfrac{\partial \xi}{\partial \alpha} + 2\dfrac{\partial \log \mathcal{L}}{\partial \beta}\dfrac{\partial \xi}{\partial \beta}, \\ \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial \alpha \partial \beta} = \dfrac{\partial \log \mathcal{L}}{\partial \beta}\dfrac{\partial \xi}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial \log \mathcal{L}}{\partial \alpha}\dfrac{\partial \xi}{\partial \beta}. \end{cases}$$

Si l'on veut toutefois séparer, au point de vue réel, les deux cas des quadriques à génératrices réelles ou imaginaires, tout en conservant les paramètres α, β réels, il faudra écrire, dans le deuxième cas des quadriques à points elliptiques, le système (65) sous l'autre forme :

$$(65^*) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial \alpha^2} - \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial \beta^2} = 2\dfrac{\partial \log \mathcal{L}}{\partial \alpha}\dfrac{\partial \xi}{\partial \alpha} - 2\dfrac{\partial \log \mathcal{L}}{\partial \beta}\dfrac{\partial \xi}{\partial \beta}, \\ \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial \alpha \partial \beta} = \dfrac{\partial \log \mathcal{L}}{\partial \beta}\dfrac{\partial \xi}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial \log \mathcal{L}}{\partial \alpha}\dfrac{\partial \xi}{\partial \beta}. \end{cases}$$

[1] En effet, la deuxième forme fondamentale de Q est proportionnelle à :

$$4du dv = d\alpha^2 - d\beta^2.$$

Réciproquement, toutes les fois que la fonction $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$ rendra le système (65) ou (65*), complètement intégrable[1], trois solutions x, y, z linéairement indépendantes du système donneront une quadrique :

$$x = x(\alpha, \beta), \qquad y = y(\alpha, \beta), \qquad z = z(\alpha, \beta),$$

rapportée à un système (α, β) isotherme-conjugué. En effet, si l'on rétablit les variables (u, v), le système prendra la forme (64*), et l'on aura par suite :

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}'' = 0, \qquad \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0;$$

donc les lignes u, v, étant à la fois asymptotiques et géodésiques, seront des droites.

§ 58.

EXTENSION AUX QUADRIQUES DANS LES ESPACES À COURBURE CONSTANTE.

Nous voulons démontrer que les résultats précédents subsistent encore (avec une légère modification) pour les quadriques dans tout espace à courbure constante. Les propriétés que nous allons en déduire seront donc indépendantes de la courbure de l'espace (C. § 56). Appelons K_0 la courbure de l'espace et faisons, pour simplifier, $K_0 = \pm 1$, suivant qu'il s'agit de l'espace elliptique ou hyperbolique. Soit (S) une surface de cet espace, rapportée à des coordonnées curvilignes quelconques (u, v) ; soient encore

$$\mathcal{E}du^2 + 2\mathcal{F}dudv + \mathcal{G}dv^2,$$

$$\mathfrak{D}du^2 + 2\mathfrak{D}'dudv + \mathfrak{D}''dv^2$$

[1] Il faut et il suffit pour cela que $\mathcal{L}$ soit une solution de l'équation de Liouville

$$\frac{\partial^2 \log \mathcal{L}}{\partial \alpha^2} \mp \frac{\partial^2 \log \mathcal{L}}{\partial \beta^2} = k\,\mathcal{L}^2. \ (k \text{ constante}).$$

les deux formes quadratiques fondamentales de (S)[1]. Appelons x_0, x_1, x_2, x_3 les coordonnées de Weierstrass d'un point (u, v) mobile sur (S) et rappelons-nous qu'elles sont liées par l'équation quadratique

$$x_0^2 + K_0(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 1.$$

Les formules analogues aux fondamentales (5), § 1 de Gauss, sont ici :

$$(\alpha)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 x_i}{\partial u^2} = \left\{ \begin{matrix} 1\,1 \\ 1 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial x_i}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 1\,1 \\ 2 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial x_i}{\partial v} - K_0 \mathcal{E} x_i + \mathfrak{D} \xi_i, \\ \dfrac{\partial^2 x_i}{\partial u \partial v} = \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial x_i}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial x_i}{\partial v} - K_0 \mathcal{F} x_i + \mathfrak{D}' \xi_i \quad (i = 0, 1, 2, 3), \\ \dfrac{\partial^2 x_i}{\partial v^2} = \left\{ \begin{matrix} 2\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial x_i}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 2\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial x_i}{\partial v} - K_0 \mathcal{G} x_i + \mathfrak{D}'' \xi_i, \end{cases}$$

où ξ_0, ξ_1, ξ_2, ξ_3 sont les coordonnées de Weierstrass du plan tangentes, liées par la relation quadratique :

$$K_0 \xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1.$$

Cela rappelé, supposons que la surface (S) soit une quadrique Q, rapportée à ses génératrices rectilignes (u, v); on aura encore :

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}'' = 0, \qquad \left\{ \begin{matrix} 1\,1 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 2\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} = 0.$$

Procédant comme dans le cas euclidien (paragraphe précédent), nous trouvons les résultats suivants. Les coordonnées x_0, x_1, x_2, x_3

[1] Voir mes *Lezioni*, vol. I, § 213.

d'un point mobile sur la quadrique à génératrices réelles, rapportée à un système isotherme-conjugué quelconque (α, β), sont quatre solutions du système complètement intégrable :

$$(66)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\xi}{\partial\alpha^2}+\dfrac{\partial^2\xi}{\partial\beta^2}=2\dfrac{\partial\log\mathcal{L}}{\partial\alpha}\dfrac{\partial\xi}{\partial\alpha}+2\dfrac{\partial\log\mathcal{L}}{\partial\beta}\dfrac{\partial\xi}{\partial\beta}-K_0(\mathcal{E}+\mathcal{G})\xi, \\ \dfrac{\partial^2\xi}{\partial\alpha\partial\beta}=\dfrac{\partial\log\mathcal{L}}{\partial\beta}\dfrac{\partial\xi}{\partial\alpha}+\dfrac{\partial\log\mathcal{L}}{\partial\alpha}\dfrac{\partial\xi}{\partial\beta}-K_0\mathcal{F}\xi. \end{cases}$$

Pour les quadriques à génératrices imaginaires, on a l'autre système :

$$(66^*)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\xi}{\partial\alpha^2}-\dfrac{\partial^2\xi}{\partial\beta^2}=2\dfrac{\partial\log\mathcal{L}}{\partial\alpha}\dfrac{\partial\xi}{\partial\alpha}-2\dfrac{\partial\log\mathcal{L}}{\partial\beta}\dfrac{\partial\xi}{\partial\beta}-K_0(\mathcal{E}-\mathcal{G})\xi, \\ \dfrac{\partial^2\xi}{\partial\alpha\partial\beta}=\dfrac{\partial\log\mathcal{L}}{\partial\beta}\dfrac{\partial\xi}{\partial\alpha}+\dfrac{\partial\log\mathcal{L}}{\partial\alpha}\dfrac{\partial\xi}{\partial\beta}-K_0\mathcal{F}\xi. \end{cases}$$

Si l'on fait dans ces formules $K_0 = 0$, la solution x_0 devient $= 1$, et l'on revient aux résultats du cas euclidien.

§ 59.

PROPRIÉTÉS DES SYSTÈMES ISOTHERMES-CONJUGUÉS (α, β) DES QUADRIQUES.

La quadrique Q étant rapportée à un système isotherme-conjugué quelconque (α, β), soit :

$$ds^2 = \mathcal{E}d\alpha^2 + 2\mathcal{F}d\alpha d\beta + \mathcal{G}d\beta^2,$$

et désignons par $\left\{\begin{matrix} ik \\ l \end{matrix}\right\}$ les symboles de Christoffel relatifs à cette forme quadratique. Comparant les formules de Gauss (5), § 1, ou bien les formules généralisées (α) de Gauss du paragraphe pré-

IMPRIMERIE NATIONALE.

cédent, avec les équations (65), (65*), ou (66), (66*), on trouve de suite :

$$\begin{cases} \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \dfrac{\partial \log \mathcal{L}}{\partial \beta}, & \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \dfrac{\partial \log \mathcal{L}}{\partial \alpha}, \\ \left\{ \begin{matrix} 1\,1 \\ 1 \end{matrix} \right\} \pm \left\{ \begin{matrix} 2\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} = 2\,\dfrac{\partial \log \mathcal{L}}{\partial \alpha}, & \left\{ \begin{matrix} 2\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\} \pm \left\{ \begin{matrix} 1\,1 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 2\,\dfrac{\partial \log \mathcal{L}}{\partial \beta}, \end{cases}$$

les signes supérieurs se rapportant aux systèmes (65), (66) [génératrices réelles], les inférieurs aux systèmes (65*), (66*) [génératrices imaginaires].

Comme

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\},$$

on voit que tout système isotherme-conjugué d'une quadrique est à invariants égaux; il est en même temps un système conjugué persistant dans une déformation infiniment petite de la quadrique.

Maintenant les formules générales

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \log \sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}}{\partial \alpha} = \left\{ \begin{matrix} 1\,1 \\ 1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 3\,\dfrac{\partial \log \mathcal{L}}{\partial \alpha} \mp \left\{ \begin{matrix} 2\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\}, \\ \dfrac{\partial \log \sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}}{\partial \beta} = \left\{ \begin{matrix} 2\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} = 3\,\dfrac{\partial \log \mathcal{L}}{\partial \beta} \mp \left\{ \begin{matrix} 1\,1 \\ 2 \end{matrix} \right\} \end{cases}$$

démontrent que, si l'on pose :

$$\sqrt{\mathrm{H}} = \frac{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}}{\mathcal{L}^3}, \tag{67}$$

les valeurs des symboles de Christoffel seront données par les formules :

$$(68)\quad \begin{cases} \left\{ \begin{matrix} 1\,1 \\ 1 \end{matrix} \right\} = 2\,\dfrac{\partial \log \mathcal{L}}{\partial \alpha} + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\partial \log \mathrm{H}}{\partial \alpha}, & \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \dfrac{\partial \log \mathcal{L}}{\partial \beta}, & \left\{ \begin{matrix} 2\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \mp \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\partial \log \mathrm{H}}{\partial \alpha}, \\ \left\{ \begin{matrix} 1\,1 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \mp \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\partial \log \mathrm{H}}{\partial \beta}, & \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \dfrac{\partial \log \mathcal{L}}{\partial \alpha}, & \left\{ \begin{matrix} 2\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 2\,\dfrac{\partial \log \mathcal{L}}{\partial \beta} + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\partial \log \mathrm{H}}{\partial \beta}. \end{cases}$$

Prenons les formules de Codazzi (qui conservent la même forme dans l'espace courbe), en remarquant que l'on a ici :

$$\mathfrak{D}'' = \mp \mathfrak{D}, \qquad \mathfrak{D}' = 0;$$

elles deviennent :

$$\frac{\partial \log \mathfrak{D}}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \log\left(\frac{\mathcal{L}}{\sqrt{H}}\right), \qquad \frac{\partial \log \mathfrak{D}}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta} \log\left(\frac{\mathcal{L}}{\sqrt{H}}\right),$$

d'où, en intégrant :

$$(68^*) \qquad \mathfrak{D} = \frac{c\mathcal{L}}{\sqrt{H}}, \qquad \mathfrak{D}'' = \mp \frac{c\mathcal{L}}{\sqrt{H}} \qquad (c \text{ constante}).$$

Nous avons dit plus haut que tout système isotherme-conjugué d'une quadrique est un système conjugué persistant dans une déformation infiniment petite de la surface. Cherchons si cela peut arriver aussi dans une déformation *continue* de la quadrique. Les calculs développés au paragraphe 232 de mes *Lezioni* (volume II, page 25), qui sont indépendants de la courbure de l'espace, démontrent qu'il faut et qu'il suffit pour cela que l'on ait :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{\mathfrak{D}''}{\mathfrak{D}}\left\{\begin{matrix}1\,1\\2\end{matrix}\right\}\right] = \frac{\partial}{\partial \beta}\left[\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}''}\left\{\begin{matrix}2\,2\\1\end{matrix}\right\}\right] = 2\left\{\begin{matrix}1\,1\\2\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2\,2\\1\end{matrix}\right\},$$

ce qui donne ici simplement, à cause des équations (68), (68*) :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \alpha \partial \beta} = 0.$$

Donc : *Le système isotherme-conjugué* (α, β) *de la quadrique sera persistant dans une déformation continue lorsque la fonction* H *a la forme* $H = f(\alpha) + \varphi(\beta)$.

Un cas particulier remarquable de systèmes isothermes-conjugués sur la quadrique s'obtient en prenant pour lignes (α, β) les coniques sections de deux faisceaux de plans, dont les axes soient des droites polaires réciproques par rapport à la quadrique. Plus en particulier encore, le système sera conjugué persistant dans une déformation continue de la surface lorsqu'une des deux droites est un axe de la quadrique. Ces déformées des quadriques ont été déterminées par Peterson dans le mémoire cité au numéro IV de l'aperçu; elles dépendent des fonctions elliptiques. Les sections planes parallèles de la quadrique demeurent encore en plans parallèles et les autres restent dans les plans d'un faisceau orthogonal aux plans des sections parallèles[1]. C'est donc un cas particulier des déformations considérées par M. Goursat (*American Journal*, vol. XIV).

Enfin, nous remarquons en passant que, parmi les systèmes isothermes-conjugués des quadriques, il y a aussi celui formé par les lignes de courbure.

[1] Pour donner au moins un exemple, prenons l'ellipsoïde :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

et considérons les sections (α) dans les plans $z=\text{const.}$ et les sections conjuguées (β) dans les plans par l'axe Oz; posons :

$$x=a\frac{\cos\beta}{\cosh\alpha}, \qquad y=b\frac{\sin\beta}{\cosh\alpha}, \qquad z=c\tanh\alpha.$$

On a, en coordonnées α, β :

$$\mathfrak{D}=\mathfrak{D}''=\frac{abc}{\cosh^3\alpha\sqrt{\mathcal{L}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}}, \qquad \mathfrak{D}'=0,$$

et dans les formules (68) du texte, les fonctions $\mathcal{L}$, H ont les valeurs suivantes :

$$\mathcal{L}=\frac{1}{\cosh\alpha}, \quad H=a^2b^2\sinh^2\alpha+a^2c^2\sin^2\beta+b^2c^2\cos^2\beta.$$

La fonction H a bien la forme $f(\alpha)+\varphi(\beta)$, et le système (α, β) est conjugué persistant dans une déformation continue de l'ellipsoïde.

§ 60.

LES SYSTÈMES CONJUGUÉS PERSISTANTS SUR LES DÉFORMÉES DES QUADRIQUES.

Passons maintenant à l'étude des systèmes conjugués des quadriques persistants dans une déformation *finie*. Bornons-nous au cas d'une quadrique Q réelle et non réglée; les autres cas donnent lieu à des développements analogues.

Rapportons la quadrique Q à un système isotherme-conjugué (α, β); nous aurons, d'après les formules (68) et (68*) :

$$(69)\quad \begin{cases} \left\{ \begin{matrix} 1\,1 \\ 1 \end{matrix} \right\} = 2\frac{\partial \log \mathcal{L}}{\partial \alpha} + \frac{1}{2}\frac{\partial \log \mathrm{H}}{\partial \alpha}, & \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \frac{\partial \log \mathcal{L}}{\partial \beta}, & \left\{ \begin{matrix} 2\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}\frac{\partial \log \mathrm{H}}{\partial \alpha}, \\ \left\{ \begin{matrix} 1\,1 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}\frac{\partial \log \mathrm{H}}{\partial \beta}, & \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \frac{\partial \log \mathcal{L}}{\partial \alpha}, & \left\{ \begin{matrix} 2\,2 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 2\frac{\partial \log \mathcal{L}}{\partial \beta} + \frac{1}{2}\frac{\partial \log \mathrm{H}}{\partial \beta}, \end{cases}$$

$$(70)\qquad \mathfrak{D} = \mathfrak{D}'' = \frac{\mathcal{L}}{\sqrt{\mathrm{H}}}, \qquad \mathfrak{D}' = 0.$$

Désignant par K la courbure (absolue) de la surface, nous aurons, d'après la formule de Gauss (généralisée à tout espace de courbure constante K_0) :

$$\mathrm{K} - \mathrm{K}_0 = \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{D}'' - \mathfrak{D}'^2}{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2} = \frac{\mathcal{L}^2}{\mathrm{H}(\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2)},$$

ou bien, à cause de la formule (67) :

$$(70^*)\qquad \mathrm{K} - \mathrm{K}_0 = \frac{\mathcal{L}^2}{\mathrm{H}^2 \mathcal{L}^2}.$$

Soit (S) une déformée réelle quelconque de la quadrique Q. Le système conjugué commun à Q et (S) sera formé des lignes (u, v) *réelles* et distinctes (car $K - K_0$ est positive). Indiquons les deux deuxièmes formes quadratiques fondamentales des surfaces Q et (S), rapportées au système conjugué commun (u,v), par :

$$\Delta du^2 + \Delta'' dv^2 \ldots\ldots \text{pour Q},$$

$$\overline{\Delta} du^2 + \overline{\Delta}'' dv^2 \ldots\ldots \text{pour (S)}.$$

Nous aurons en premier lieu :

$$\Delta du^2 + \Delta'' dv^2 = \frac{\mathcal{L}}{\sqrt{H}} (d\alpha^2 + d\beta^2),$$

d'où les formules :

$$(7^1) \qquad \begin{cases} \Delta = \dfrac{\mathcal{L}}{\sqrt{H}} \left[\left(\dfrac{\partial \alpha}{\partial u} \right)^2 + \left(\dfrac{\partial \beta}{\partial u} \right)^2 \right], \\ \Delta'' = \dfrac{\mathcal{L}}{\sqrt{H}} \left[\left(\dfrac{\partial \alpha}{\partial v} \right)^2 + \left(\dfrac{\partial \beta}{\partial v} \right)^2 \right], \end{cases}$$

et en outre :

$$(7^2) \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial u} \frac{\partial \alpha}{\partial v} + \frac{\partial \beta}{\partial u} \frac{\partial \beta}{\partial v} = 0.$$

Indiquons par $\left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\}$ les valeurs des symboles de Christoffel pour le ds^2 commun à Q et (S), *en coordonnées* α, β, et par $\left\{ \begin{matrix} \overline{i\,k} \\ l \end{matrix} \right\}$ celles relatives aux coordonnées u, v, Les fonctions α, β de u, v doivent satisfaire aux équations du second ordre de Christoffel, qui traduisent l'équivalence des deux ds^2 en coordonnées α, β et u, v.

Parmi ces formules de Christoffel écrivons seulement les deux suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\alpha}{\partial u\partial v}+\left\{\begin{matrix}1&1\\1\end{matrix}\right\}\dfrac{\partial\alpha}{\partial u}\dfrac{\partial\alpha}{\partial v}+\left\{\begin{matrix}1&2\\1\end{matrix}\right\}\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial u}\dfrac{\partial\beta}{\partial v}+\dfrac{\partial\alpha}{\partial v}\dfrac{\partial\beta}{\partial u}\right)+\left\{\begin{matrix}2&2\\1\end{matrix}\right\}\dfrac{\partial\beta}{\partial u}\dfrac{\partial\beta}{\partial v}=\overline{\left\{\begin{matrix}1&2\\1\end{matrix}\right\}}\dfrac{\partial\alpha}{\partial u}+\overline{\left\{\begin{matrix}1&2\\2\end{matrix}\right\}}\dfrac{\partial\alpha}{\partial v}, \\ \dfrac{\partial^2\beta}{\partial u\partial v}+\left\{\begin{matrix}1&1\\2\end{matrix}\right\}\dfrac{\partial\alpha}{\partial u}\dfrac{\partial\alpha}{\partial v}+\left\{\begin{matrix}1&2\\2\end{matrix}\right\}\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial u}\dfrac{\partial\beta}{\partial v}+\dfrac{\partial\alpha}{\partial v}\dfrac{\partial\beta}{\partial u}\right)+\left\{\begin{matrix}2&2\\2\end{matrix}\right\}\dfrac{\partial\beta}{\partial u}\dfrac{\partial\beta}{\partial v}=\overline{\left\{\begin{matrix}1&2\\1\end{matrix}\right\}}\dfrac{\partial\beta}{\partial u}+\overline{\left\{\begin{matrix}1&2\\2\end{matrix}\right\}}\dfrac{\partial\beta}{\partial v}, \end{cases}$$

qu'on peut écrire aussi, à cause des équations (69) et (72) :

$$(73)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\alpha}{\partial u\partial v}+2\dfrac{\partial\log\mathcal{L}}{\partial\alpha}\dfrac{\partial\alpha}{\partial u}\dfrac{\partial\alpha}{\partial v}+\dfrac{\partial\log\mathcal{L}}{\partial\beta}\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial u}\dfrac{\partial\beta}{\partial v}+\dfrac{\partial\alpha}{\partial v}\dfrac{\partial\beta}{\partial u}\right)=\overline{\left\{\begin{matrix}1&2\\1\end{matrix}\right\}}\dfrac{\partial\alpha}{\partial u}+\overline{\left\{\begin{matrix}1&2\\2\end{matrix}\right\}}\dfrac{\partial\alpha}{\partial v}, \\ \dfrac{\partial^2\beta}{\partial u\partial v}+2\dfrac{\partial\log\mathcal{L}}{\partial\beta}\dfrac{\partial\beta}{\partial u}\dfrac{\partial\beta}{\partial v}+\dfrac{\partial\log\mathcal{L}}{\partial\alpha}\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial u}\dfrac{\partial\beta}{\partial v}+\dfrac{\partial\alpha}{\partial v}\dfrac{\partial\beta}{\partial u}\right)=\overline{\left\{\begin{matrix}1&2\\1\end{matrix}\right\}}\dfrac{\partial\beta}{\partial u}+\overline{\left\{\begin{matrix}1&2\\2\end{matrix}\right\}}\dfrac{\partial\beta}{\partial v}. \end{cases}$$

Multiplions la première par $\frac{\partial\alpha}{\partial u}$, la deuxième par $\frac{\partial\beta}{\partial u}$; en sommant on a, d'après la formule (72) :

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\beta}{\partial u}\right)^2\right]+\left(\frac{\partial\log\mathcal{L}}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial v}+\frac{\partial\log\mathcal{L}}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial v}\right)\cdot\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\beta}{\partial u}\right)^2\right]$$
$$=\overline{\left\{\begin{matrix}1&2\\1\end{matrix}\right\}}\cdot\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\beta}{\partial u}\right)^2\right],$$

ou encore :

$$(74)\qquad 2\overline{\left\{\begin{matrix}1&2\\1\end{matrix}\right\}}=\frac{\partial}{\partial v}\log\left\{\mathcal{L}^2\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\beta}{\partial u}\right)^2\right]\right\}.$$

D'une manière analogue on trouve :

$$(74^*)\qquad 2\overline{\left\{\begin{matrix}1&2\\2\end{matrix}\right\}}=\frac{\partial}{\partial u}\log\left\{\mathcal{L}^2\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial\beta}{\partial v}\right)^2\right]\right\}.$$

Cela posé, prenons les deux premières équations de Codazzi (4), § 1, relatives aux deux surfaces Q et (S) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Delta}{\partial v} = \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} \Delta - \left\{ \begin{matrix} 1\,1 \\ 2 \end{matrix} \right\} \Delta'', \\ \dfrac{\partial \overline{\Delta}}{\partial v} = \left\{ \begin{matrix} \overline{1\,2} \\ 1 \end{matrix} \right\} \overline{\Delta} - \left\{ \begin{matrix} \overline{1\,1} \\ 2 \end{matrix} \right\} \overline{\Delta}''. \end{cases}$$

Multipliant la première par Δ, la deuxième par $\overline{\Delta}$ et soustrayant, comme on a, d'après l'équation de Gauss :

$$\Delta \Delta'' = \overline{\Delta}\,\overline{\Delta}'',$$

il vient :

$$\frac{\partial (\overline{\Delta}^2 - \Delta^2)}{\partial v} = 2 \left\{ \begin{matrix} \overline{1\,2} \\ 1 \end{matrix} \right\} (\overline{\Delta}^2 - \Delta^2),$$

ou bien, d'après la formule (74) :

$$\frac{\partial (\overline{\Delta}^2 - \Delta^2)}{\partial v} = (\overline{\Delta}^2 - \Delta^2) \frac{\partial}{\partial v} \log \left\{ \rho^2 \left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial u} \right)^2 \right] \right\}. \tag{75}$$

Nous en déduisons, par intégration :

$$\overline{\Delta}^2 - \Delta^2 = \Psi(u) \cdot \rho^2 \left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial u} \right)^2 \right],$$

où $\psi(u)$ est une fonction de u seule. Nous écartons le cas $\psi(u) = 0$, car on aurait alors :

$$\overline{\Delta} = \pm \Delta, \qquad \overline{\Delta}'' = \pm \Delta'',$$

et la surface (S) serait congruente ou symétrique de Q, ce qui n'a aucun intérêt. Par un choix convenable du paramètre u, nous pouvons faire :

$$\psi(u) = \pm c^2,$$

et nous avons donc :

$$(76) \qquad \overline{\Delta}^2 = \Delta^2 + \varepsilon c^2 \rho^2 \left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial u} \right)^2 \right].$$

ε désignant l'unité, positive ou négative. D'une manière analogue, en disposant du paramètre v, on aura :

$$(76^*) \qquad \overline{\Delta''}^2 = \Delta''^2 + \varepsilon' c^2 \rho^2 \left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial v} \right)^2 \right]; \quad |\varepsilon'| = 1.$$

Posons maintenant :

$$(77) \qquad \begin{cases} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial u} \right)^2 = \lambda^2, \\ \left(\frac{\partial \alpha}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial v} \right)^2 = \mu^2, \end{cases}$$

et nous aurons, d'après les formules (71), (76) et (76*) :

$$(78) \qquad \Delta = \frac{c\rho}{\sqrt{H}} \cdot \lambda^2, \qquad \Delta'' = \frac{c\rho}{\sqrt{H}} \cdot \mu^2,$$

$$(79) \qquad \begin{cases} \overline{\Delta}^2 = c^2 \rho^2 \lambda^2 \left(\varepsilon + \frac{\lambda^2}{H} \right), \\ \overline{\Delta''}^2 = c^2 \rho^2 \mu^2 \left(\varepsilon' + \frac{\mu^2}{H} \right). \end{cases}$$

D'ailleurs, on doit avoir (équation de Gauss) :

$$\overline{\Delta}^2 \overline{\Delta''}^2 = \Delta^2 \Delta''^2 = \frac{c^4 \rho^4}{H^2} \lambda^4 \mu^4,$$

IMPRIMERIE NATIONALE.

et par suite :

$$\varepsilon'\lambda^2+\varepsilon\mu^2+\varepsilon\varepsilon' H=0.$$

Comme H est positive, ε, ε' ont nécessairement des signes contraires et nous pouvons supposer $\varepsilon=+1$, $\varepsilon'=-1$; autrement on échangerait u et v.

Il reste donc :

$$\mu^2-\lambda^2=H, \tag{80}$$

c'est-à-dire :

$$\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial\beta}{\partial v}\right)^2\right]-\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\beta}{\partial u}\right)^2\right]=H. \tag{80*}$$

Enfin, comme on doit avoir :

$$\overline{\Delta}\,\overline{\Delta''}=\Delta\Delta''=\frac{c^2\rho^2}{H}\lambda^2\mu^2,$$

on tire des équations (79) :

$$\overline{\Delta}=\overline{\Delta''}=\frac{c\rho\lambda\mu}{\sqrt{H}}. \tag{81}$$

Réciproquement on voit que, si les fonctions α, β de u, v satisfont aux équations (72) et (80*), les valeurs (81) de $\overline{\Delta}$, $\overline{\Delta''}$ ($\overline{\Delta'}=0$) remplissent les équations de Codazzi et de Gauss. Elles définissent donc *intrinsèquement* une déformée (S) de la quadrique Q, et les lignes (u, v) forment le système conjugué persistant.

§ 61.

SUITE. — THÉORÈMES DE MM. DARBOUX ET SERVANT.

L'analyse du paragraphe précédent nous a fait reconnaître que le problème de déformer la quadrique Q (dans tout espace à courbure constante) équivaut à la recherche de deux fonctions α, β de deux variables u, v, satisfaisant au système :

$$82) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial\alpha}{\partial u}\dfrac{\partial\alpha}{\partial v}+\dfrac{\partial\beta}{\partial u}\dfrac{\partial\beta}{\partial v}=0, \\ \left[\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial v}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\beta}{\partial v}\right)^2\right]-\left[\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial u}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\beta}{\partial u}\right)^2\right]=\mathrm{H}(\alpha,\beta), \end{cases}$$

où H est une fonction connue de α, β. Si l'on interprète α, β comme coordonnées cartésiennes orthogonales dans un plan, on peut donc dire :

Le problème de la déformation d'une quadrique, dans tout espace à courbure constante, équivaut à celui de donner au carré de l'élément linéaire du plan :

$$ds^2 = d\alpha^2 + d\beta^2$$

la forme orthogonale :

$$ds^2 = \lambda^2 du^2 + \mu^2 dv^2,$$

de telle manière que la différence $\mu^2 - \lambda^2$ des coefficients de dv^2, du^2 soit égale à une fonction donnée $\mathrm{H}(\alpha, \beta)$ des coordonnées rectangulaires α, β.

La fonction H (α, β) a une infinité de formes dépendant du système isotherme-conjugué (α, β) choisi sur la quadrique, et l'on

peut profiter de cette indétermination de H pour prendre, dans chaque cas, la forme plus convenable.

Par exemple, si l'on a :

$$H = f(\alpha) + \varphi(\beta),$$

on pourra satisfaire aux équations (82) en prenant pour α une fonction de u, pour β une fonction de v, déterminées par les quadratures :

$$\left(\frac{d\alpha}{du}\right)^2 = a - f(\alpha), \qquad \left(\frac{d\beta}{dv}\right)^2 = a + \varphi(\beta),$$

a désignant une constante arbitraire. Cela donne de nouveau les déformations de Peterson des quadriques (§ 59).

Passons à signaler d'autres conséquences importantes des formules établies dans le paragraphe précédent. Les formules finales (81) nous donnent le théorème de M. Darboux, généralisé aux espaces à courbure constante :

Sur toute déformée d'une quadrique le système conjugué persistant est isotherme-conjugué.

Un autre résultat intéressant dû à M. Servant (dans le cas euclidien) se rapporte à la détermination effective du système conjugué commun à la quadrique Q et à une déformée quelconque (S) de Q : *L'équation différentielle du système conjugué commun s'intègre par quadratures.*

Nous le déduirons d'un théorème général que nous allons établir. Appelons :

$$ds_1^2 = \mathcal{E}_1 du^2 + 2\mathcal{F}_1 du\,dv + \mathcal{G}_1 dv^2$$

le ds_1^2 commun à Q et (S) en coordonnées curvilignes quelconques u, v, et soient :

$$\mathfrak{D} du^2 + 2\mathfrak{D}' du\,dv + \mathfrak{D}'' dv^2,$$

$$\mathfrak{D}_1 du^2 + 2\mathfrak{D}_1' du\,dv + \mathfrak{D}_1'' dv^2,$$

leurs respectives deuxièmes formes fondamentales. L'équation différentielle du système conjugué commun s'obtient en égalant à zéro le Jacobien de ces deux formes. Divisant ce Jacobien par $\sqrt{\mathcal{E}_1\mathcal{G}_1 - \mathcal{F}_1^2}$, nous avons le *covariant :*

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}_1\mathcal{G}_1 - \mathcal{F}_1^2}} \begin{vmatrix} \mathfrak{D}du + \mathfrak{D}'dv & \mathfrak{D}'du + \mathfrak{D}''dv \\ \mathfrak{D}_1 du + \mathfrak{D}_1'dv & \mathfrak{D}_1'du + \mathfrak{D}_1''dv \end{vmatrix}$$

Or, nous démontrons le théorème suivant :

La forme quadratique que l'on obtient en divisant le covariant $\mathfrak{J}$ *par* $\sqrt[4]{K - K_0}$ *est à courbure nulle.*

D'après la nature invariantive de cette proposition, il suffira d'effectuer le calcul de $\mathfrak{J}$ dans un système particulier de coordonnées, pour lequel nous choisissons le système conjugué commun. Alors on a, d'après les formules (78) et (81) :

$$\mathfrak{J} = \frac{e^2\gamma'^2\lambda\mu}{H\sqrt{\mathcal{E}_1\mathcal{G}_1 - \mathcal{F}_1^2}}(\mu^2 - \lambda^2)\,du\,dv,$$

ou encore, à cause de l'équation (80) :

$$\mathfrak{J} = \frac{e^2\gamma'^2\lambda\mu}{\sqrt{\mathcal{E}_1\mathcal{G}_1 - \mathcal{F}_1^2}}\,du\,dv.$$

Or, comme :

$$\mathcal{E}_1 du^2 + 2\mathcal{F}_1 du dv + \mathcal{G}_1 dv^2 = \mathcal{E}\,d\alpha^2 + 2\mathcal{F}\,d\alpha\,d\beta + \mathcal{G}\,d\beta^2,$$

on a :

$$\mathcal{E}_1\mathcal{G}_1 - \mathcal{F}_1^2 = (\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2)\begin{vmatrix} \frac{\partial\alpha}{\partial u} & \frac{\partial\beta}{\partial u} \\ \frac{\partial\alpha}{\partial v} & \frac{\partial\beta}{\partial v} \end{vmatrix}^2 = (\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2)\,\lambda^2\mu^2,$$

et, par suite :

$$\mathfrak{I} = \frac{c^2 \rho^2}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}}\, du\, dv,$$

ou bien, d'après la formule (67) :

$$\mathfrak{I} = \frac{c^2}{\rho \sqrt{\mathrm{H}}}\, du\, dv.$$

Enfin, la formule (70*) donne :

$$\sqrt[4]{\mathrm{K} - \mathrm{K}_0} = \frac{\sqrt{c}}{\rho \sqrt{\mathrm{H}}},$$

et, par suite :

$$\frac{\mathfrak{I}}{\sqrt[4]{\mathrm{K} - \mathrm{K}_0}} = c \sqrt{c}\, du\, dv,$$

ce qui démontre le théorème.

Le résultat de M. Servant est maintenant immédiat, puisque, pour décomposer la forme quadratique à courbure nulle $\frac{\mathfrak{I}}{\sqrt[4]{\mathrm{K} - \mathrm{K}^0}}$ dans ses deux facteurs linéaires, il suffit d'effectuer des quadratures.

§ 62.

NOUVELLE TRANSFORMATION DU PROBLÈME.

La recherche des systèmes conjugués persistants sur les quadriques a été réduite à l'intégration du système (82). Donnons au

problème un autre aspect, en introduisant une inconnue auxiliaire ω par les formules :

$$(83)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\alpha}{\partial u} = -\lambda\sin\omega, & \dfrac{\partial\beta}{\partial u} = \lambda\cos\omega, \\ \dfrac{\partial\alpha}{\partial v} = \mu\cos\omega, & \dfrac{\partial\beta}{\partial v} = \mu\sin\omega. \end{cases}$$

Remarquons que, sur le plan d'élément linéaire :

$$ds^2 = d\alpha^2 + d\beta^2 = \lambda^2 du^2 + \mu^2 dv^2,$$

la fonction auxiliaire ω signifie l'angle d'inclinaison des lignes (v) sur les droites $\alpha = \text{const}$. Des conditions d'intégrabilité :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial v}(\lambda\sin\omega) + \dfrac{\partial}{\partial u}(\mu\cos\omega) = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial v}(\lambda\cos\omega) - \dfrac{\partial}{\partial u}(\mu\sin\omega) = 0, \end{cases}$$

on tire :

$$(84)\qquad \frac{\partial\lambda}{\partial v} = \frac{\partial\omega}{\partial u}\mu, \qquad \frac{\partial\mu}{\partial u} = -\frac{\partial\omega}{\partial v}\lambda.$$

Prenons maintenant l'équation en termes finis :

$$\mu^2 - \lambda^2 = \mathrm{H},$$

et dérivons-la par rapport à u et v, en posant :

$$\mathrm{H}_1 = \frac{\partial\mathrm{H}}{\partial\alpha}, \qquad \mathrm{H}_2 = \frac{\partial\mathrm{H}}{\partial\beta};$$

nous avons :

$$\begin{cases} \mu\dfrac{\partial\mu}{\partial u}-\lambda\dfrac{\partial\lambda}{\partial u}=-\dfrac{H_1}{2}\lambda\sin\omega+\dfrac{H_2}{2}\lambda\cos\omega, \\ \mu\dfrac{\partial\mu}{\partial v}-\lambda\dfrac{\partial\lambda}{\partial v}=\dfrac{H_1}{2}\mu\cos\omega+\dfrac{H_2}{2}\mu\sin\omega. \end{cases}$$

Celles-ci, combinées avec les équations (84), donnent le système suivant :

$$(85)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\alpha}{\partial u}=-\lambda\sin\omega, \qquad \dfrac{\partial\alpha}{\partial v}=\mu\cos\omega, \\ \dfrac{\partial\beta}{\partial u}=\lambda\cos\omega, \qquad \dfrac{\partial\beta}{\partial v}=\mu\sin\omega, \\ \dfrac{\partial\lambda}{\partial u}=\dfrac{H_1}{2}\sin\omega-\dfrac{H_2}{2}\cos\omega-\dfrac{\partial\omega}{\partial v}\mu, \qquad \dfrac{\partial\lambda}{\partial v}=\dfrac{\partial\omega}{\partial u}\mu, \\ \dfrac{\partial\mu}{\partial u}=-\dfrac{\partial\omega}{\partial v}\lambda, \qquad \dfrac{\partial\mu}{\partial v}=\dfrac{H_1}{2}\cos\omega+\dfrac{H_2}{2}\sin\omega+\dfrac{\partial\omega}{\partial u}\lambda. \end{cases}$$

Lorsque les fonctions $\alpha, \beta, \lambda, \mu, \omega$ de u, v satisfont à ces équations, on en tire :

$$\frac{\partial}{\partial u}(\mu^2-\lambda^2-H)=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial v}(\mu^2-\lambda^2-H)=0,$$

c'est-à-dire que le système (85) possède l'intégrale :

$$\mu^2-\lambda^2-H=\text{const.}$$

Il suffit donc que l'équation en termes finis :

$$(85')\qquad \mu^2-\lambda^2=H$$

soit satisfaite pour un système particulier de valeurs (u_0, v_0) des variables u, v et elle le sera pour toutes les valeurs de u, v.

Remarquons maintenant que, si l'on forme des équations (85) les quatre conditions d'intégrabilité :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\partial \alpha}{\partial u}\right) - \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial \alpha}{\partial v}\right) = 0, & \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\partial \beta}{\partial u}\right) - \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial \beta}{\partial v}\right) = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\partial \lambda}{\partial u}\right) - \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial \lambda}{\partial v}\right) = 0, & \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\partial \mu}{\partial u}\right) - \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial \mu}{\partial v}\right) = 0, \end{cases}$$

les deux premières sont identiques, en vertu même des équations (85), et les deux autres donnent :

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} = \frac{H_{11} - H_{22}}{2} \sin \omega \cos \omega - \frac{H_{12}}{2} \cos 2\omega, \tag{86}$$

ayant posé :

$$H_{11} = \frac{\partial^2 H}{\partial \alpha^2}, \qquad H_{12} = \frac{\partial^2 H}{\partial \alpha \, \partial \beta}, \qquad H_{22} = \frac{\partial^2 H}{\partial \beta^2}.$$

Nous ne poursuivons pas ici ultérieurement le cas général : il suffit à notre but de considérer le cas, qui se présente pour les paraboloïdes (dans l'espace euclidien), où la fonction H est un polynôme du deuxième degré en α, β.

Alors, comme H_{11}, H_{12}, H_{22} sont des constantes, l'équation (86) est une équation pure en ω, de forme bien connue. La recherche des systèmes conjugués persistants sur les quadriques est réduite, dans ce cas, à l'intégration de cette équation en ω, et successivement à celle du système *linéaire* complètement intégrable (85) en α, β, λ, μ, dont il suffira de chercher les solutions qui satisfont par leurs valeurs initiales à l'équation (85').

IMPRIMERIE NATIONALE.

§ 63.

APPLICATION AUX DÉFORMÉES DU PARABOLOÏDE ELLIPTIQUE.

Prenons le paraboloïde elliptique :

$$\frac{x_0^2}{p}+\frac{y_0^2}{q}=2z_0,$$

et posons :

$$x_0=\sqrt{p}\cdot\alpha, \qquad y_0=\sqrt{q}\cdot\beta, \qquad z_0=\frac{\alpha^2+\beta^2}{2},$$

d'où :

$$ds^2=(\alpha^2+p)\,d\alpha^2+2\alpha\beta\,d\alpha\,d\beta+(\beta^2+q)\,d\beta^2,$$

$$\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2=q\alpha^2+p\beta^2+pq,$$

$$\mathfrak{D}=\mathfrak{D}''=\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}}, \qquad \mathfrak{D}'=0,$$

$$\left\{\begin{matrix}1&1\\1\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}2&2\\1\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}\frac{\partial\log\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}}{\partial\alpha}, \qquad \left\{\begin{matrix}2&2\\2\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}1&1\\2\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}\frac{\partial\log\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}}{\partial\beta},$$

$$\left\{\begin{matrix}1&2\\1\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}1&2\\2\end{matrix}\right\}=0.$$

On voit que si l'on pose :

$$\mathfrak{L}=1, \qquad \mathrm{H}=\frac{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}{pq}=\frac{\alpha^2}{p}+\frac{\beta^2}{q}+1, \qquad c=1,$$

on a les formules (69) et (70), § 60, et la fonction H a la forme $f(\alpha)+\varphi(\beta)$.

Écartons le cas du paraboloïde de révolution et supposons par exemple $p < q$.

Disposant des dimensions du paraboloïde, faisons pour simplifier :

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = 1.$$

Alors la détermination des systèmes conjugués persistants du paraboloïde s'effectuera, d'après le paragraphe précédent, de la manière suivante.

Prenons pour ω une solution quelconque de l'équation :

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial v^2} = \sin\omega\cos\omega. \tag{87}$$

et intégrons le système linéaire en $\alpha, \beta, \lambda, \mu$:

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial\alpha}{\partial u} = -\lambda\sin\omega, & \dfrac{\partial\alpha}{\partial v} = \mu\cos\omega, \\ \dfrac{\partial\beta}{\partial u} = \lambda\cos\omega, & \dfrac{\partial\beta}{\partial v} = \mu\sin\omega, \\ \dfrac{\partial\lambda}{\partial u} = \dfrac{\alpha}{p}\sin\omega - \dfrac{\beta}{q}\cos\omega - \dfrac{\partial\omega}{\partial v}\mu, & \dfrac{\partial\lambda}{\partial v} = \dfrac{\partial\omega}{\partial u}\mu, \\ \dfrac{\partial\mu}{\partial u} = -\dfrac{\partial\omega}{\partial v}\lambda, & \dfrac{\partial\mu}{\partial v} = \dfrac{\alpha}{p}\cos\omega + \dfrac{\beta}{q}\sin\omega + \dfrac{\partial\omega}{\partial u}\lambda, \end{array}\right. \tag{88}$$

disposant des valeurs initiales arbitraires de $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ de telle manière que l'on ait :

$$\mu^2 - \lambda^2 = \frac{\alpha^2}{p} + \frac{\beta^2}{q} + 1. \tag{89}$$

Le système (uv) sera un système conjugué persistant sur le paraboloïde, et la surface déformée correspondante (S) sera intrinsè-

quement définie par les valeurs suivantes de $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$, en coordonnées u, v :

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}'' = \frac{\lambda\mu}{\sqrt{H}}, \qquad \mathfrak{D}' = 0.$$

Associons maintenant à ces surfaces (S), applicables *réellement* sur le paraboloïde, les autres surfaces (S_1) d'élément linéaire (a_1), § 44 :

$$ds_1^2 = (\alpha_1^2 + q)\, d\alpha_1^2 - 2\alpha_1\beta_1 d\alpha_1 d\beta_1 + (\beta_1^2 - p)\, d\beta_1^2,$$

qui sont applicables *idéalement* sur le même paraboloïde. Par une analyse parfaitement semblable à celle du paragraphe 62, qu'on trouvera exposée en détail dans le mémoire B, on trouve que la détermination des surfaces réelles (S_1) s'obtient de la manière suivante. On part d'une solution θ de l'équation :

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = \sinh\theta\cosh\theta \tag{90}$$

et l'on intègre le système linéaire :

$$(91)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\alpha_1}{\partial u} = \lambda_1\cosh\theta, \qquad \dfrac{\partial\alpha_1}{\partial v} = \mu_1\sinh\theta, \\ \dfrac{\partial\beta_1}{\partial u} = \mu_1\sinh\theta, \qquad \dfrac{\partial\beta_1}{\partial v} = \mu_1\cosh\theta, \\ \dfrac{\partial\lambda_1}{\partial u} = -\dfrac{\alpha_1}{q}\cosh\theta + \dfrac{\beta_1}{p}\sinh\theta - \dfrac{\partial\theta}{\partial v}\mu_1, \qquad \dfrac{\partial\lambda_1}{\partial v} = \dfrac{\partial\theta}{\partial u}\mu, \\ \dfrac{\partial\mu_1}{\partial u} = \dfrac{\partial\theta}{\partial v}\lambda_1, \qquad \dfrac{\partial\mu_1}{\partial v} = -\dfrac{\alpha_1}{q}\sinh\theta + \dfrac{\beta_1}{p}\cosh\theta - \dfrac{\partial\theta}{\partial u}\lambda_1, \end{cases}$$

en disposant des valeurs initiales de α_1, β_1, λ_1, μ_1 de manière que dans l'intégrale quadratique :

$$\lambda_1^2 + \mu_1^2 = \frac{\beta_1^2}{p} - \frac{\alpha_1^2}{q} - 1 + \text{const.},$$

la constante du second membre s'annule et que l'on ait par suite :

$$\lambda_1^2+\mu_1^2=\frac{\beta_1^2}{p}-\frac{\alpha_1^2}{q}-1. \tag{92}$$

Il en reste définie intrinsèquement une surface (S_1), applicable idéalement sur le paraboloïde par les formules :

$$\mathfrak{D}_1=\mathfrak{D}_1''=\frac{\lambda_1\mu_1}{\sqrt{H_1}},\qquad \mathfrak{D}_1'=0,\qquad H_1=\frac{\beta_1^2}{p}-\frac{\alpha_1^2}{q}-1.$$

§ 64.

AUTRE FORME DES TRANSFORMATIONS B_k POUR LE PARABOLOÏDE ELLIPTIQUE.

Nous avons démontré (§§ 43-45) que l'on passe, à l'aide de nos transformations B_k, des surfaces (S) applicables réellement sur le paraboloïde elliptique aux surfaces (S_1) applicables idéalement sur le même paraboloïde, et réciproquement. Reproduisons maintenant du mémoire B les formules relatives à ces transformations B_k du point de vue actuel des systèmes conjugués persistants.

On peut lier les solutions ω, θ des équations aux dérivées partielles (87) et (90) par les formules de la transformation de Bäcklund :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\omega}{\partial u}-\dfrac{\partial\theta}{\partial v}=\cos\sigma\cos\omega\sinh\theta-\sin\sigma\sin\omega\cosh\theta,\\[2ex] \dfrac{\partial\omega}{\partial v}+\dfrac{\partial\theta}{\partial u}=\sin\sigma\cos\omega\sinh\theta+\cos\sigma\sin\omega\cosh\theta,\end{cases} \tag{93}$$

où σ désigne un angle constant arbitraire. En substituant pour ω dans ces équations une solution de l'équation (87), elles forment pour θ un système complètement intégrable et sa solution générale θ (contenant une constante arbitraire d'intégration) est alors une solution de l'équation (90). Les mêmes propriétés ont lieu en échangeant le rôle de ω et θ.

Soient (ω, θ) une couple de telles solutions des équations (87), (90), liées entre elles par les équations (93); posons :

$$(94)\quad \begin{cases} A = \cos\sigma\cos\omega\sinh\theta - \sin\sigma\sin\omega\cosh\theta, \\ B = \cos\sigma\sin\omega\cosh\theta + \sin\sigma\cos\omega\sinh\theta, \\ C = \cos\sigma\cos\omega\cosh\theta - \sin\sigma\sin\omega\sinh\theta, \\ D = \cos\sigma\sin\omega\sinh\theta + \sin\sigma\cos\omega\cosh\theta. \end{cases}$$

Les systèmes linéaires (88) et (91) jouissent alors de la remarquable propriété suivante :

De tout groupe $(\alpha, \beta, \lambda, \mu)$ *de solutions du système* (88), *on passe à un groupe correspondant de solutions* $(\alpha_1, \beta_1, \lambda_1, \mu_1)$ *du système* (91) *à l'aide de la substitution linéaire :*

$$(95)\quad \begin{cases} a\alpha_1 = -\sin\sigma\cdot\beta - \cosh\theta\cdot\lambda + \sinh\theta\cdot\mu, \\ a\beta_1 = -\cos\sigma\cdot\alpha - \sinh\theta\cdot\lambda + \cosh\theta\cdot\mu, \\ a\lambda_1 = -\sin\omega\cdot\frac{\alpha}{p} + \cos\omega\cdot\frac{\beta}{q} - D\lambda + B\mu, \\ a\mu_1 = \cos\omega\cdot\frac{\alpha}{p} + \sin\omega\cdot\frac{\beta}{q} + A\lambda - C\mu, \end{cases}$$

a désignant la constante :

$$(96) \qquad a = \sqrt{\frac{1}{q} + \sin^2\sigma} = \sqrt{\frac{1}{p} - \cos^2\sigma}.$$

Réciproquement, on passe du second groupe au premier par la substitution inverse :

$$(95') \quad \begin{cases} a\alpha = \cos\sigma\cdot\beta_1 - \sin\omega\cdot\lambda_1 + \cos\omega\cdot\mu_1, \\ a\beta = -\sin\sigma\cdot\alpha_1 + \cos\omega\cdot\lambda_1 + \sin\omega\cdot\mu_1, \\ a\lambda = -\operatorname{cosh}\theta\cdot\frac{\alpha_1}{q} + \sinh\theta\cdot\frac{\beta_1}{p} - D\lambda_1 + A\mu_1, \\ a\mu = -\sinh\theta\cdot\frac{\alpha_1}{q} + \cosh\theta\cdot\frac{\beta_1}{p} - B\lambda_1 + C\mu_1. \end{cases}$$

On a, en outre, identiquement :

$$\frac{\alpha_1^2}{q} - \frac{\beta_1^2}{p} + \lambda_1^2 + \mu_1^2 = \frac{\alpha^2}{p} + \frac{\beta^2}{q} + \lambda^2 - \mu^2,$$

d'où il suit que, lorsque l'équation (89) est satisfaite, l'équation (92) l'est aussi.

Cela posé, supposons qu'une surface (S), applicable réellement sur le paraboloïde, soit connue. Nous aurons par quadrature (§ 61) le système conjugué persistant (u, v) et nous pourrons calculer les fonctions ω, α, β, λ, μ de u, v. Prenons maintenant une solution θ des équations (93) [qui dans l'inconnue $\operatorname{tangh}\frac{\theta}{2}$ ont la forme de Riccati] et calculons, à l'aide des formules linéaires (95), α_1, β_1, λ_1, μ_1. Il en résultera définie une surface (S_1) applicable idéalement sur le paraboloïde. Or j'ai démontré, dans le mémoire B,

que cette surface (S_1), définie d'abord intrinsèquement, peut être disposée dans l'espace de telle manière, par rapport à (S), que les droites qui joignent leurs points correspondants (correspondant aux mêmes valeurs de u, v) touchent les deux surfaces en ces points.

Les formules effectives qui fixent la position relative des deux surfaces (S), (S_1), sont les suivantes (Mém. B, § 17) :

$$(96^*) \qquad x_1 = x - \frac{1}{a}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\mu_1}{\mu}\frac{\partial x}{\partial v}\right), \text{ etc.}$$

Renvoyant le lecteur, pour les démonstrations des résultats énoncés dans ce paragraphe, au mémoire B, je vais seulement vérifier ici que les transformations des surfaces (S), (S_1), définies par ces formules, coïncident précisément avec nos transformations B_k.

§ 65.

IDENTITÉ DES DEUX ESPÈCES DE TRANSFORMATIONS.

D'après les propriétés caractéristiques des transformations B_k, nous prouverons l'identité des transformations du paragraphe précédent avec les transformations B_k, en démontrant que pour chaque couple (S), (S_1) de surfaces dans les relations du paragraphe 64, les propriétés suivantes ont lieu :

1° *Lorsque la surface* (S) *s'applique sur le paraboloïde, entraînant les segments focaux* FF_1, *les extrêmes* F_1 *se disposent sur un paraboloïde (hyperbolique) homofocal;*

2° *La loi d'applicabilité (idéale) entre* (S) *et* (S_1) *correspond à l'affinité d'Ivory entre les deux paraboloïdes.*

Commençons par écrire les formules (96') sous la forme :

$$x_1 = x + l\frac{\partial x}{\partial \alpha} + m\frac{\partial x}{\partial \beta}; \tag{97}$$

où l'on aura, à cause des équations (88) :

$$\begin{cases} l = \frac{1}{a}(\lambda_1 \sin\omega - \mu_1 \cos\omega), \\ m = -\frac{1}{a}(\lambda_1 \cos\omega + \mu_1 \sin\omega), \end{cases}$$

ou encore, d'après les formules (95) :

$$\begin{cases} l = \frac{1}{a^2}\left(\mathfrak{L}\cos\sigma - \frac{\alpha}{p}\right), \\ m = \frac{1}{a^2}\left(\mathfrak{M}\sin\sigma - \frac{\beta}{q}\right), \end{cases} \tag{98}$$

ayant posé :

$$\begin{cases} \mathfrak{L} = \cosh\theta\,.\,\mu - \sinh\theta\,.\,\lambda, \\ \mathfrak{M} = \cosh\theta\,.\,\lambda - \sinh\theta\,.\,\mu. \end{cases} \tag{99}$$

Or, lorsque (S) devient le paraboloïde même, on a :

$$x = \sqrt{p}\,\alpha, \qquad y = \sqrt{q}\,\beta, \qquad z = \tfrac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2);$$

et comme

$$a^2 = \frac{1}{q} + \sin^2\sigma = \frac{1}{p} - \cos^2\sigma,$$

on tire des équations (97) :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{p}\cos\sigma}{a^2}(\mathfrak{L} - \alpha\cos\sigma), \\ y_1 = \frac{\sqrt{q}\sin\sigma}{a^2}(\mathfrak{M} + \beta\sin\sigma), \\ z_1 = \frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2) + \frac{1}{a^2}(\alpha\mathfrak{L}\cos\sigma + \beta\mathfrak{M}\sin\sigma) - \frac{1}{a^2}\left(\frac{\alpha^2}{p} + \frac{\beta^2}{q}\right). \end{cases} \tag{99'}$$

IMPRIMERIE NATIONALE.

Formons d'ici l'expression :

$$\frac{a^4 x_1^2}{p\cos^2\sigma} - \frac{a^4 y_1^2}{q\sin^2\sigma} + 2a^2 z_1,$$

en remarquant que l'on a, d'après les formules (99) :

$$\mathfrak{L}^2 - \mathfrak{M}^2 = \mu^2 - \lambda^2 = \frac{\alpha^2}{p} + \frac{\beta^2}{q} + 1.$$

Il vient alors simplement :

$$\frac{a^4 x_1^2}{p\cos^2\sigma} - \frac{a^4 y_1^2}{q\sin^2\sigma} + 2a^2 z_1 = 1,$$

que l'on peut écrire :

$$\frac{\frac{x_1^2}{p\cos^2\sigma}}{a^2} - \frac{\frac{y_1^2}{q\sin^2\sigma}}{a^2} + 2z_1 - \frac{1}{a^2} = 0.$$

Si l'on pose :

$$k = \frac{1}{a^2} = \frac{q}{1 + q\sin^2\sigma} = \frac{p}{1 - p\cos^2\sigma},$$

on a donc :

$$\frac{x_1^2}{k-p} - \frac{y_1^2}{q-k} + 2z_1 - k = 0.$$

C'est bien l'équation d'un paraboloïde hyperbolique P_k homofocal au paraboloïde elliptique fondamental, dont le paramètre k est donné par

(100) $$k = \frac{q}{1 + q\sin^2\sigma} = \frac{p}{1 - p\cos^2\sigma}.$$

En disposant de σ, on peut évidemment donner à k une valeur quelconque dans l'intervalle $(p \ldots q)$. Les valeurs extrêmes $k=p$, $k=q$ (transformations singulières) correspondent aux valeurs

$$\sigma=\frac{\pi}{2}, \qquad \sigma=0$$

de l'angle σ.

La première propriété est ainsi établie; passons à la seconde. L'affinité d'Ivory entre les deux paraboloïdes homofocaux P_0 et P_k est donnée par les formules :

$$x_1=ix\sqrt{\frac{k-p}{p}}, \qquad y_1=y\sqrt{\frac{q-k}{q}}.$$

Or on a :

$$x=\sqrt{p}\cdot\alpha, \quad y=-\sqrt{q}\cdot\beta,$$

et les deux premières équations (99*), à cause des valeurs (95) de α_1, β_1, s'écrivent :

$$x_1=\frac{\cos\sigma\sqrt{p}}{a}\cdot\beta_1, \qquad y_1=-\frac{\sin\sigma\sqrt{q}}{a}\cdot\alpha_1.$$

Donc les formules de l'affinité d'Ivory donnent :

$$\beta_1=i\alpha, \qquad \alpha_1=-\beta;$$

ce sont précisément les formules d'applicabilité pour les surfaces (S), (S_1) [§ 44]. L'identité des deux espèces de transformations est donc démontrée.

§ 66.

LES SYSTÈMES CONJUGUÉS PERSISTANTS SUR LE PARABOLOÏDE HYPERBOLIQUE.

Passons maintenant au cas du paraboloïde hyperbolique

$$x=\sqrt{p}\cdot\alpha, \qquad y=\sqrt{q}\cdot\beta, \qquad z=\tfrac{1}{2}(\alpha^2-\beta^2),$$

où nous supposerons

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

La détermination de ses systèmes conjugués persistants réels s'obtient de la manière suivante (Mém. B). Prenons une solution θ quelconque de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}-\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}=\sinh\theta\cosh\theta. \tag{101}$$

Le système linéaire dans les quatre fonctions α, β, λ, μ,

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial\alpha}{\partial u}=\lambda\cosh\theta, \qquad \frac{\partial\alpha}{\partial v}=\mu\sinh\theta,\\
&\frac{\partial\beta}{\partial u}=\lambda\sinh\theta, \qquad \frac{\partial\beta}{\partial v}=\mu\cosh\theta,\\
&\frac{\partial\lambda}{\partial u}=-\cosh\theta\frac{\alpha}{p}-\sinh\theta\frac{\beta}{q}+\frac{\partial\theta}{\partial v}\mu, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial v}=\frac{\partial\theta}{\partial u}\mu,\\
&\frac{\partial\mu}{\partial u}=\frac{\partial\theta}{\partial v}\lambda, \qquad \frac{\partial\mu}{\partial v}=\sinh\theta\frac{\alpha}{p}+\cosh\theta\frac{\beta}{q}+\frac{\partial\theta}{\partial u}\lambda,
\end{aligned}\right. \tag{102}$$

est complètement intégrable et possède l'intégrale quadratique

$$\mu^2-\lambda^2=\frac{\alpha^2}{p}+\frac{\beta^2}{q}+\text{const.}$$

Choisissons les valeurs initiales de α, β, λ, μ de telle manière que l'on ait :

$$\mu^2 - \lambda^2 = \frac{\alpha^2}{p} + \frac{\beta^2}{q} + 1; \tag{103}$$

alors il en résultera défini un système conjugué persistant (u, v) du paraboloïde, et la correspondante surface (S) déformée sera donnée intrinsèquement par les formules

$$\mathfrak{D} = -\mathfrak{D}'' = \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{q\alpha^2 + p\beta^2 + pq}} \cdot \lambda\mu, \qquad \mathfrak{D}' = 0.$$

Passons maintenant aux transformations, qui se présentent ici sous l'aspect suivant (C. § 64). Désignant par σ une constante arbitraire, considérons le système simultané

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\theta_1}{\partial u} + \dfrac{\partial\theta}{\partial v} = -(\cosh\sigma \sinh\theta \cosh\theta_1 + \sinh\sigma \cosh\theta \sinh\theta_1), \\ \dfrac{\partial\theta_1}{\partial v} + \dfrac{\partial\theta}{\partial u} = \cosh\sigma \cosh\theta \sinh\theta_1 + \sinh\sigma \sinh\theta \cosh\theta_1, \end{cases} \tag{104}$$

qui lie deux solutions θ, θ_1 de l'équation (101) et jouit de propriétés parfaitement analogues à celles décrites au paragraphe 64 pour le système (93). Soient θ, θ_1 deux telles solutions de l'équation (101), et imaginons écrit le système (102) relatif à la solution θ_1 et aux fonctions α_1, β_1, λ_1, μ_1; posons en outre :

$$a = \sqrt{\sinh^2\sigma + \frac{1}{p}} = \sqrt{\cosh^2\sigma - \frac{1}{q}}. \tag{105}$$

$$\begin{cases} A = \cosh\sigma \sinh\theta \sinh\theta_1 + \sinh\sigma \cosh\theta \cosh\theta_1, \\ B = \cosh\sigma \sinh\theta \cosh\theta_1 + \sinh\sigma \cosh\theta \sinh\theta_1, \\ C = \cosh\sigma \cosh\theta \sinh\theta_1 + \sinh\sigma \sinh\theta \cosh\theta_1, \\ D = \cosh\sigma \cosh\theta \cosh\theta_1 + \sinh\sigma \sinh\theta \sinh\theta_1. \end{cases} \tag{106}$$

On passe alors de tout groupe $(\alpha, \beta, \lambda, \mu)$ de solutions du système (102) à un groupe correspondant $(\alpha_1, \beta_1, \lambda_1, \mu_1)$ de solutions du même système, construit par rapport à θ_1, à l'aide de la substitution linéaire :

$$(107)\qquad \begin{cases} a\alpha_1 = \cosh\theta_1 \cdot \lambda + \sinh\theta_1 \cdot \mu - \sinh\sigma \cdot \alpha, \\ a\beta_1 = \sinh\theta_1 \cdot \lambda + \cosh\theta_1 \cdot \mu + \cosh\sigma \cdot \beta, \\ a\lambda_1 = -A\lambda - B\mu - \cosh\theta \cdot \frac{\alpha}{p} + \sinh\theta \cdot \frac{\beta}{q}, \\ a\mu_1 = C\lambda + D\mu + \sinh\theta \frac{\alpha}{p} + \cosh\theta \cdot \frac{\beta}{q}. \end{cases}$$

Comme il en résulte identiquement :

$$\frac{\alpha_1^2}{p} + \frac{\beta_1^2}{q} + \lambda_1^2 - \mu_1^2 = \frac{\alpha^2}{p} + \frac{\beta^2}{q} + \lambda^2 - \mu^2,$$

on voit que, si le groupe $(\alpha, \beta, \lambda, \mu)$ satisfait à l'équation (103), la même chose arrivera pour l'autre groupe $(\alpha_1, \beta_1, \lambda_1, \mu_1)$. Supposons d'avoir deux tels groupes de solutions $(\alpha, \beta, \lambda, \mu)$, $(\alpha_1, \beta_1, \lambda_1, \mu_1)$. Les deux déformées (S), (S_1) du paraboloïde hyperbolique, qui en résultent déterminées, forment encore, convenablement situées dans l'espace, les deux nappes focales d'une congruence W. On passe de la première à la deuxième surface à l'aide des formules

$$(108)\qquad x_1 = x + \frac{1}{a}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\mu_1}{\mu}\frac{\partial x}{\partial v}\right), \quad \text{etc.}$$

En renvoyant pour les démonstrations des propriétés énoncées au mémoire B, nous ajoutons encore ici que les transformations ainsi définies coïncident avec les transformations B_k des déformées du paraboloïde hyperbolique. Cela se vérifie, à l'aide des formules précédentes, de la même manière que nous avons exposée au para-

graphe 65 pour le cas du paraboloïde elliptique. On trouve de la sorte pour l'équation du paraboloïde homofocal P_k :

$$\frac{x^2}{p-\frac{1}{a^2}}-\frac{y^2}{q+\frac{1}{a^2}}-2z+\frac{1}{a^2}=0,$$

d'où l'on voit que la valeur de k est ici

$$k=\frac{1}{a^2}=\frac{p}{1+p\sinh^2\sigma}.$$

Les formules précédentes donnent donc les seules transformations B_k avec une valeur positive de k. On obtiendrait les autres en échangeant p et q.

§ 67.

RETOUR AUX SURFACES PSEUDOSPHÉRIQUES. — SURFACES GAUCHES À COURBURE CONSTANTE.

L'exposition des parties principales de la théorie que je me proposais de développer est maintenant achevée. Nous nous sommes borné aux développements relatifs aux transformations des surfaces applicables sur les quadriques réelles. Mais il sera encore instructif, à la fin du travail, de sortir de ce cadre pour jeter un coup d'œil sur le point de départ de toute cette théorie : les transformations de Bäcklund des surfaces pseudosphériques, que nous allons considérer comme un cas particulier de nos transformations générales B_k.

Les surfaces pseudosphériques, dont nous ferons pour simplicité le rayon $R=1$, sont les surfaces applicables sur la sphère imaginaire (de rayon $=i$)

$$x^2+y^2+z^2+1=0.$$

Pour appliquer les formules générales du paragraphe 12 relatives aux quadriques à centre, il suffira de faire

$$a = b = i, \qquad c = 1,$$

ce qui donne :

$$\mathcal{E} = \mathcal{G} = 0, \qquad \mathcal{F} = \frac{2}{(u+v)^2}, \qquad \rho = 1,$$

$$\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} = 0, \qquad \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\} = -\frac{2}{u+v}.$$

Pour la transformation B_k nous avons :

$$a' = b' = i\sqrt{1-k}, \qquad c' = \sqrt{1-k},$$

et la quadrique homofocale Q_k devient la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = k - 1,$$

d'où il suit que : *tous les segments* FF_1 *des actuelles congruences* W *ont la longueur constante* $\sqrt{k}$.

Maintenant calculons les valeurs de U, V, W par les formules (66), § 12 (signes supérieurs); cela donne :

$$\begin{cases} U = \dfrac{1-\sqrt{1-k}}{1-k}\,\dfrac{[\cos\theta + u(1+\sin\theta)]^2}{1+\sin\theta}, \\ V = \dfrac{1+\sqrt{1-k}}{1-k}\,\dfrac{[\cos\theta - v(1+\sin\theta)]^2}{1+\sin\theta}, \\ W = \dfrac{2}{1-k}\,\dfrac{[\cos\theta + u(1+\sin\theta)]\cdot[\cos\theta - v(1+\sin\theta)]}{1+\sin\theta}. \end{cases}$$

Nous déduisons de là :

$$\begin{cases} l = \dfrac{1-\sqrt{1-k}}{2}(u+v)\cdot\dfrac{\cos\theta + u(1+\sin\theta)}{\cos\theta - v(1+\sin\theta)}, \\ m = \dfrac{1+\sqrt{1-k}}{2}(u+v)\cdot\dfrac{\cos\theta - v(1+\sin\theta)}{\cos\theta + u(1+\sin\theta)}, \end{cases}$$

et par suite :

$$lm = k\frac{(u+v)^2}{4}.$$

Comme

$$x_1 - x = l\frac{\partial x}{\partial u} + m\frac{\partial x}{\partial v},$$

on a pour la distance δ des foyers :

$$\delta^2 = \mathrm{S}(x_1 - x)^2 = \mathcal{E}l^2 + 2\mathcal{F}lm + \mathcal{G}m^2 = k,$$

ce qui démontre de nouveau la proposition supérieure.

Rappelons, en outre, que notre congruence est une congruence W et que les courbures K_1, K_2 des deux nappes sont égales à -1. Indiquant par Ω l'angle des plans focaux, on a la formule de Ribaucour :

$$\mathrm{K}_1\mathrm{K}_2 = \left(\frac{\sin\Omega}{\delta}\right)^4,$$

qui donne ici :

$$\sin^2\Omega = k, \qquad \cos\Omega = \sqrt{1-k};$$

donc : *l'angle* Ω *des plans focaux est constant et égal à*

$$\arccos\sqrt{1-k}.$$

Voilà les deux propriétés caractéristiques des congruences pseudosphériques.

IMPRIMERIE NATIONALE.

Considérons maintenant les surfaces *réglées* pseudosphériques (nécessairement imaginaires). Elles sont définies intrinsèquement, d'après les formules (67), § 13, par

$$\mathfrak{D} = 0, \qquad \mathfrak{D}' = \frac{2i}{(u+v)^2}, \qquad \mathfrak{D}'' = 2i\varphi(v).$$

Leurs rayons de courbure principaux sont constants $= i$, et leurs lignes de courbure coïncident dans les génératrices, qui sont des droites isotropes : ce sont les surfaces considérées la première fois par Serret[1]. Géométriquement : *on obtient les surfaces réglées à courbure constante en conduisant par chaque point d'une courbe à torsion constante, et dans le plan osculateur de la courbe, une des deux droites isotropes.*

Bien que ces surfaces soient forcément imaginaires, les transformations B_k sont évidemment applicables; elles donnent les transformations de Bäcklund pour ces surfaces gauches à courbure constante.

§ 68.

LES TRANSFORMATIONS RÉELLES DE BÄCKLUND DES SURFACES PSEUDOSPHÉRIQUES.

Plaçons-nous maintenant au point de vue réel et considérons une surface pseudosphérique réelle (S). Son élément linéaire s'obtient de la formule supérieure

$$ds^2 = \frac{2du\,dv}{(u+v)^2},$$

[1] *Journal de Liouville*, t. XIII, page 361 (1848).

en prenant les variables u, v imaginaires conjuguées. Si l'on pose

$$u=\alpha+i\beta, \qquad v=\alpha-i\beta,$$

on a la forme bien connue du ds^2 pseudosphérique :

$$ds^2=\frac{d\alpha^2+d\beta^2}{\alpha^2}.$$

Choisissons la constante k réelle, positive et <1, en posant :

$$k=\cos^2\sigma,$$

où l'angle σ est réel; nous aurons :

$$\begin{cases} l=\alpha(1-\sin\sigma)\cdot\dfrac{\cos\theta+u(1+\sin\theta)}{\cos\theta-v(1+\sin\theta)}, \\ m=\alpha(1+\sin\sigma)\cdot\dfrac{\cos\theta-v(1+\sin\theta)}{\cos\theta+u(1+\sin\theta)}. \end{cases}$$

Afin que la surface transformée (S_1), donnée par les formules

$$x_1=x+l\frac{\partial x}{\partial u}+m\frac{\partial x}{\partial v}, \quad \text{etc.} \tag{109}$$

soit réelle, il faut que l, m soient imaginaires conjuguées; et comme leur produit lm est égal à $\alpha^2\cos^2\sigma$, en indiquant par φ un angle *réel*, on devra avoir :

$$l=\alpha\cos\sigma\cdot e^{i\varphi}, \qquad m=\alpha\cos\sigma\cdot e^{-i\varphi}, \tag{110}$$

$$e^{i\varphi}=\frac{1-\sin\sigma}{\cos\sigma}\frac{\cos\theta+u(1+\sin\theta)}{\cos\theta-v(1-\sin\theta)}. \tag{111}$$

Posons pour un instant :

$$\begin{cases} \lambda = \cos\theta + u(1+\sin\theta), \\ \mu = \cos\theta - v(1+\sin\theta); \end{cases}$$

nous aurons :

$$\begin{cases} U = \dfrac{1-\sin\sigma}{\cos\sigma}\dfrac{\lambda^2}{1+\sin\theta}, \\ V = \dfrac{1+\sin\sigma}{\cos\sigma}\cdot\dfrac{\mu^2}{1+\sin\theta}. \end{cases}$$

La dérivation de la formule (111), par rapport à u et v, donne :

$$(112)\qquad \begin{cases} i\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} = \dfrac{1+\sin\theta}{\lambda} + \dfrac{(u+v)(1+\sin\theta)}{\lambda\mu}\dfrac{\partial\theta}{\partial u}, \\ i\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} = \dfrac{1+\sin\theta}{\mu} + \dfrac{(u+v)(1+\sin\theta)}{\lambda\mu}\dfrac{\partial\theta}{\partial v}. \end{cases}$$

Or les équations fondamentales (II), § 39, deviennent ici :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\theta}{\partial u} = -\dfrac{\sin^3\sigma}{(u+v)^2\cos^2\sigma}\cdot V + i\dfrac{\sin^3\sigma}{2\cos^2\sigma}(\mathfrak{D}U + \mathfrak{D}'V), \\ \dfrac{\partial\theta}{\partial v} = -\dfrac{\sin^3\sigma}{(u+v)^2\cos^2\sigma}\cdot U + i\dfrac{\sin^3\sigma}{2\cos^2\sigma}(\mathfrak{D}'U + \mathfrak{D}''V). \end{cases}$$

Substituant ces valeurs dans les équations (112), en remarquant que l'on a :

$$\begin{cases} \dfrac{1+\sin\theta}{\lambda} = \dfrac{1}{u+v}\left(1 - \dfrac{\cos\sigma}{1+\sin\sigma}e^{-i\varphi}\right), \\ \dfrac{1+\sin\theta}{\mu} = \dfrac{1}{u+v}\left(\dfrac{\cos\sigma}{1+\sin\sigma}e^{i\varphi} - 1\right), \end{cases}$$

on en déduit :

$$(113)\quad \begin{cases} i\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}=\dfrac{1}{u+v}\left(1-\dfrac{e^{-i\varphi}}{\cos\sigma}\right)+\dfrac{i\sin\sigma}{2\cos\sigma}(u+v)\left(e^{i\varphi}\mathfrak{D}+e^{-i\varphi}\mathfrak{D}'\right), \\ i\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}=\dfrac{1}{u+v}\left(\dfrac{e^{i\varphi}}{\cos\sigma}-1\right)+\dfrac{i\sin\sigma}{2\cos\sigma}(u+v)\left(e^{i\varphi}\mathfrak{D}'+e^{-i\varphi}\mathfrak{D}''\right), \end{cases}$$

Si l'on désigne maintenant par

$$\Delta d\alpha^2+2\Delta' d\alpha d\beta+\Delta'' d\beta^2$$

la deuxième forme fondamentale de la surface (S), en coordonnées réelles α, β, comme

$$\Delta d\alpha^2+2\Delta' d\alpha d\beta+\Delta'' d\beta^2=\mathfrak{D}du^2+2\mathfrak{D}'dudv+\mathfrak{D}''dv^2,$$

on a :

$$\Delta=2\mathfrak{D}'+\mathfrak{D}+\mathfrak{D}'',\quad \Delta'=i\left(\mathfrak{D}-\mathfrak{D}''\right),\quad \Delta''=2\mathfrak{D}'-\mathfrak{D}-\mathfrak{D}''.$$

Les équations (113) donnent alors, par addition et soustraction, les formules définitives :

$$(114)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial\alpha}=\dfrac{\sin\varphi}{\alpha\cos\sigma}+\alpha\operatorname{tang}\sigma\left(\Delta\cos\varphi+\Delta'\sin\varphi\right), \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\beta}=\dfrac{\cos\sigma-\cos\varphi}{\alpha\cos\sigma}+\alpha\operatorname{tang}\sigma\left(\Delta'\cos\varphi+\Delta''\sin\varphi\right), \end{cases}$$

d'où toute imaginaire a disparu. Pour la surface (S_1) transformée, nous aurons, d'après les équations (109) et (110) :

$$(115)\qquad x_1=x+\alpha\cos\sigma\left(\cos\varphi\frac{\partial x}{\partial\alpha}+\sin\varphi\frac{\partial x}{\partial\beta}\right).$$

Ces formules (114), (115) sont les formules de la transformation B_σ de Bäcklund pour les surfaces pseudosphériques. Seulement la surface initiale (S) est rapportée ici, non à ses lignes de courbure comme dans les formules usuelles, mais aux lignes géodésiques parallèles (β) et aux horicycles orthogonaux (α). L'angle φ dans ces formules signifie évidemment l'inclinaison du rayon de la congruence pseudosphérique sur les géodésiques parallèles (β).

§ 69.

COMPARAISON AVEC LES PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES TRANSFORMATIONS B_k.

Les transformations de Bäcklund des surfaces pseudosphériques sont ainsi obtenues de nouveau comme un cas bien particulier des transformations B_k. Toutes les propriétés que nous avons reconnues aux transformations B_k des déformées des quadriques générales appartiennent aussi, en particulier, aux transformations de Bäcklund. Arrêtons-nous seulement sur quelques-unes d'entre elles qui acquièrent pour les surfaces pseudosphériques une signification spéciale.

1° La loi d'applicabilité entre les deux nappes focales (S), (S_1) d'une de nos congruences W est donnée par l'affinité d'Ivory. Mais il est à remarquer que, dans le cas actuel, les deux nappes ayant la même courbure constante, elles ne sont plus applicables l'une sur l'autre d'une seule manière, comme dans le cas général, mais bien d'une *triple infinité de manières*. L'affinité d'Ivory entre les deux sphères concentriques (§ 67)

$$x^2+y^2+z^2+1=0,$$

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2+\sin^2\sigma=0,$$

donnera *une* de ces ∞^3 applicabilités de (S) sur (S_1). Les formules effectives de l'affinité sont ici simplement :

$$x_1 = x \cdot \sin\sigma, \qquad y_1 = y \cdot \sin\sigma, \qquad z_1 = z \cdot \sin\sigma;$$

elles font correspondre les points des deux sphères sur le même rayon. Si la surface pseudosphérique (S), entraînant les segments focaux FF_1, s'applique sur la première sphère, le segment

$$FF_1 = \cos\sigma$$

deviendra un segment MM_1 tangent en M à cette sphère et terminé en M_1 à la deuxième. Le point M′ de la première sphère, qui correspond à M_1, sera dans le plan OMM_1 (O étant le centre); et en appelant $\frac{\delta}{i}$ l'angle MOM′, nous aurons :

$$\cos\sigma = i \operatorname{tang}\left(\frac{\delta}{i}\right) = \operatorname{tangh}\delta.$$

Nous avons donc le résultat suivant :

Soient (S), (S_1) *les deux nappes, à courbure constante* $= -1$, *d'une congruence pseudosphérique, et soit* $FF_1 = \cos\sigma$ *un quelconque des segments focaux. Une des* ∞^3 *lois d'applicabilité entre* (S) *et* (S_1) *s'obtient en prolongeant géodésiquement sur la surface* (S) *le segment* FF_1 *d'une longueur géodésique* δ *telle que l'on ait :*

$$\operatorname{tangh}\delta = \cos\sigma. \tag{116}$$

Le point F′ *auquel on arrive sera le point de* (S) *qui correspond, dans l'applicabilité, à* F_1 *sur* (S_1).

Cette construction, que j'ai publiée en 1902 [1], se trouve établie par une tout autre voie au paragraphe 382 de mes *Lezioni* (vol. II, page 410). Elle apparaît ici comme une simple conséquence de la loi d'affinité d'Ivory, qui donne aussi raison de la formule (116).

Remarquons encore que, si l'on veut écrire les formules effectives de cette applicabilité entre les deux surfaces pseudosphériques (S), (S_1), il suffit d'avoir recours aux formules générales (87) du paragraphe 16, en y faisant

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{1}{\sin\sigma}.$$

Si l'on pose alors :

$$u_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \qquad v_1 = \alpha_1 - i\beta_1,$$

on trouve de suite pour les formules cherchées :

$$(117) \qquad \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{\alpha \cdot \sin\sigma}{1 - \cos\sigma\cos\varphi}, \\ \beta_1 = \beta + \dfrac{\alpha\cos\sigma\sin\varphi}{1 - \cos\sigma\cos\varphi}. \end{cases}$$

2° Que signifie, dans le cas actuel des congruences pseudosphériques, la conservation des systèmes conjugués persistants sur les deux nappes focales? Pour toute surface applicable sur la sphère le système conjugué persistant est donné par les lignes de courbure, car celles-ci se conservent orthogonales (conjuguées) sur la sphère. La propriété générale du paragraphe 37 se traduit donc ici dans cette autre bien connue : *Sur les deux nappes d'une congruence pseudosphérique, les lignes de courbure se correspondent.*

[1] Sur les systèmes cycliques dont les plans enveloppent une sphère (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. XIX).

3° Sur une surface à courbure constante, les géodésiques transformées des droites de la sphère sont les lignes de longueur nulle. Les surfaces réglées circonscrites aux surfaces pseudosphériques le long de leurs lignes asymptotiques, d'après le théorème de Chieffi, sont les réglées à courbure constante du paragraphe 67.

Il serait facile, en appliquant les formules de la transformation de Bäcklund soit sous la forme usuelle, soit sous la nouvelle forme (114), de vérifier que les deux réglées à courbure constante circonscrites aux deux nappes (S), (S_1) le long de deux asymptotiques correspondantes, sont à leur tour les deux nappes focales d'une congruence pseudosphérique.

§ 70.

GÉNÉRALISATION AUX DÉFORMÉES DE L'ELLIPSOÏDE IMAGINAIRE.

Si l'on remplace la sphère imaginaire par l'ellipsoïde imaginaire

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1=0,$$

on aura plusieurs types de surfaces *réelles* applicables sur cette quadrique (voir Peterson, m. c.), et pour chaque classe de ces surfaces il y aura lieu de chercher les transformations réelles B_k correspondantes. Nous nous bornerons ici à considérer un seul type, se réduisant pour $a=b=c$ aux surfaces pseudosphériques, et nous rechercherons celles de leurs transformations réelles B_k qui, dans le cas particulier de la sphère, donnent les transformations de Bäcklund.

Le ds^2 des surfaces que nous voulons considérer s'obtient du ds^2 de l'hyperboloïde à une nappe (§ 12) en y changeant a, b respec-

IMPRIMERIE NATIONALE.

tivement en ia, ib et prenant les variables u, v imaginaires conjuguées, ce que nous exprimons de nouveau en écrivant :

$$\bar{u} = v, \qquad \bar{v} = u.$$

Prenons, en outre, la constante k *réelle, positive* et plus petite que chacune des trois quantités a^2, b^2, c^2, de sorte qu'en posant :

$$a' = \sqrt{a^2 - k}, \qquad b' = \sqrt{b^2 - k}, \qquad c' = \sqrt{c^2 - k},$$

a' b' c' seront réelles (positives).

Soit (S) une surface réelle de notre classe, et cherchons à y appliquer une transformation B_k qui la change en une autre surface réelle (S_1) de la même classe. Nous aurons à changer dans toutes les formules relatives à l'hyperboloïde à une nappe (§ 12) a, b, a', b' respectivement en ia, ib, ia', ib'. En particulier, les formules (66), § 12, qui définissent U, V, W (signes supérieurs) conservent la même forme, et la même chose arrive pour les formules d'applicabilité (87), § 16.

Les conditions que nous avons à satisfaire se traduisent par les équations[1] :

$$\bar{v}_1 = u_1, \tag{118}$$

$$\frac{\bar{\mathrm{U}}}{\bar{\mathrm{W}}} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{W}}. \tag{119}$$

Par une analyse identique à celle développée au paragraphe 50, on démontre qu'il suffit de s'occuper de la première équation (118), car l'autre (119) en est une conséquence. Or l'équation (118), en posant encore :

$$l = \frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta},$$

[1] Ici, et dans la suite, les signes $\bar{v}_1$, $\bar{\mathrm{U}}$, $\bar{\mathrm{W}}$... reprennent leur signification (§ 43) de quantités conjuguées de v_1, U, W...

prend la forme bilinéaire en t, $\bar{t}$:

$$A t\bar{t} + Bt + \overline{B}\bar{t} + C = 0, \tag{120}$$

les coefficients A, B, $\overline{B}$, C ayant les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} A = \dfrac{b}{b'}\left[\dfrac{c}{c'}(1+uv) + \dfrac{a}{a'}(1-uv)\right], \quad C = \dfrac{b}{b'}\left[\dfrac{c}{c'}(1+uv) - \dfrac{a}{a'}(1-uv)\right], \\ B = -\dfrac{ac}{a'c'}\left[u - v + \dfrac{b}{b'}(u+v)\right], \qquad \overline{B} = \dfrac{ac}{a'c'}\left[u - v - \dfrac{b}{b'}(u+v)\right]. \end{cases}$$

On voit que A, C sont réels, et B, $\overline{B}$ imaginaires conjugués (puisque $\bar{u} = v$, $\bar{v} = u$); on a en outre :

$$B\overline{B} - AC = \frac{k}{a'^2 b'^2 c'^2}\left[a^2c^2(u-v)^2 + b^2c^2(1+uv)^2 - a^2b^2(1-uv)^2\right].$$

Et comme $k > 0$ et que la quantité

$$a^2c^2(u-v)^2 + b^2c^2(1+uv)^2 - a^2b^2(1-uv)^2$$

est aussi positive, on a encore $B\overline{B} - AC > 0$, et l'équation (120) représente, dans le plan complexe t, un cercle réel. Maintenant, comme la quantité

$$\rho = \frac{a^2c^2(u-v)^2 + b^2c^2(1+uv)^2 - a^2b^2(1-uv)^2}{abc(u+v)^2}$$

est réelle positive, nous posons :

$$\rho = R^2,$$

après quoi les équations différentielles pour t, $\bar{t}$ prennent la forme même (40) et (40*) du paragraphe 50. On vérifie alors, de la même

manière, que les équations obtenues par dérivation de l'équation (120) sont identiquement satisfaites. On peut donc conclure : *Toute surface réelle* (S), *applicable sur l'ellipsoïde imaginaire, de la classe considérée, admet* ∞^2 *transformations réelles* B_k *qui la changent en d'autres surfaces de la même classe.*

Remarquons que si l'on suppose $a = b < c$, notre ds^2 appartient à la surface de révolution dont le méridien est une *chaînette raccourcie.* Les transformations réelles B_k des déformées de cette surface se lient bien étroitement aux transformations mêmes de Bäcklund pour les surfaces pseudosphériques, ainsi que j'ai montré dans mes *Lezioni,* etc. (vol. II, p. 429).

Enfin, si l'on fait $a = b = c$, l'ellipsoïde devient la sphère imaginaire et les transformations B_k se réduisent aux transformations réelles de Bäcklund des surfaces pseudosphériques.

§ 71.

TRANSFORMATIONS B_k POUR LES DÉFORMÉES RÉELLES DU PARABOLOÏDE À PARAMÈTRES IMAGINAIRES.

Dans les trois paragraphes précédents nous avons montré, dans l'exemple de la sphère et de l'ellipsoïde imaginaires, que nos formules générales se prêtent aussi bien à la recherche des déformées réelles des quadriques imaginaires. Ces quadriques étaient toutefois représentées par des équations à coefficients réels. Nous terminerons en donnant au moins un exemple de déformées réelles des quadriques à équation imaginaire.

Choisissons à cet effet le paraboloïde imaginaire

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2iz,$$

à paramètres ip, iq purement imaginaires, p et q ayant en outre

même signe, par exemple le signe positif[1]. En désignant par α, β deux variables réelles, les formules

$$(121) \qquad x=\sqrt{p}\cdot\alpha, \qquad y=\sqrt{q}\cdot\beta, \qquad z=-i\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}$$

définissent une région de notre paraboloïde dont le ds^2

$$(122) \qquad ds^2=(p-\alpha^2)\,d\alpha^2-2\alpha\beta\,d\alpha\,d\beta+(q-\beta^2)\,d\beta^2$$

revèt une forme définie positive, pourvu que les variables α, β satisfassent à l'inégalité

$$(123) \qquad pq-p\beta^2-q\alpha^2>0.$$

Considérons les surfaces *réelles* (S) d'élément linéaire (122) et cherchons leurs transformations réelles B_k. Il suffira d'appliquer nos formules générales relatives au paraboloïde hyperbolique de la manière suivante. Précisons le sens des racines carrées $\sqrt{i}, \sqrt{-i}$ en prenant

$$\sqrt{i}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \qquad \sqrt{-i}=\frac{1-i}{\sqrt{2}},$$

et changeons les variables α, β dans les nouvelles variables u, v à l'aide des formules

$$(124) \qquad u+v=\sqrt{-i}\cdot\alpha, \qquad u-v=\sqrt{i}\cdot\beta,$$

[1] J'ai traité ce cas par une tout autre voie dans le mémoire C, où j'ai établi aussi les transformations B_k pour les déformées des quadriques (imaginaires) de M. Darboux, tangentes au cercle de l'infini. On pourrait traiter ce dernier cas par la méthode générale actuelle, ce que nous omettons ici.

ce qui réduit les équations (121) aux suivantes :

$$x=\sqrt{ip}\cdot(u+v),\qquad y=\sqrt{-iq}\cdot(u-v),\qquad z=2uv.$$

Ce sont les formules fondamentales (12), § 2, où l'on a changé respectivement p, q en ip, $-iq$. Les variables u, v sont ici assujetties, d'après les formules (124), à satisfaire aux équations

$$\bar{u}=iv,\qquad \bar{v}=iu; \tag{125}$$

et inversement, lorsque u, v satisfont à ces conditions, les variables α, β, définies par les formules (124), sont réelles.

Prenons maintenant la constante k purement imaginaire

$$k=ik'$$

et, choisissant k' positive et plus petite que chacune des deux quantités p, q, posons :

$$p'=p-k',\qquad q'=q-k';$$

p', q' seront aussi positifs. Soit (S) une surface *réelle* applicable sur notre paraboloïde imaginaire [d'élément linéaire (122)], et cherchons à la changer par une transformation $B_{ik'}$ en une autre surface (S_1) qui satisfasse aux conditions suivantes :

α. que (S_1) soit réelle;

β. que (S_1) soit applicable réellement sur (S).

Il suffira d'appliquer nos formules générales relatives aux transformations B_k des déformées du paraboloïde hyperbolique en y changeant

$$p,\ q,\ p',\ q',\ k$$

respectivement en

$$ip,\ -iq,\ ip',\ -iq',\ ik'.$$

Par ce changement, les formules (22), § 2, qui définissent U, V, W deviennent :

$$(126)\quad \begin{cases} U = 2\left(\sqrt{qp'}-\sqrt{pq'}\right)\lambda^2u^2 - 2\left(\sqrt{pq}-\sqrt{p'q'}\right)\lambda u \\ \qquad\qquad -\frac{ik'}{2}\left(\sqrt{qp'}+\sqrt{pq'}\right)\lambda^2+\frac{1}{2}\left(\sqrt{qp'}-\sqrt{pq'}\right), \\ V = 2\left(\sqrt{qp'}+\sqrt{pq'}\right)\lambda^2v^2 - 2\left(\sqrt{pq}+\sqrt{p'q'}\right)\lambda v \\ \qquad\qquad -\frac{ik'}{2}\left(\sqrt{qp'}-\sqrt{pq'}\right)\lambda^2+\frac{1}{2}\left(\sqrt{qp'}+\sqrt{pq'}\right), \\ W = 2\lambda\left[\sqrt{pq}-\sqrt{qp'}\,(u+v)\,\lambda+\sqrt{pq'}\,(u-v)\,\lambda\right], \end{cases}$$

et les formules d'applicabilité de (S_1) sur (S), données par les équations (56), § 9, s'écrivent :

$$(127)\quad \begin{cases} u_1 = \dfrac{\sqrt{qp'}\,(u+v)+\sqrt{pq'}\,(u-v)-\sqrt{pq}\,(4uv+ik')\,\lambda}{2\left[\sqrt{pq'}\,(u+v)\,\lambda-\sqrt{qp'}\,(u-v)\,\lambda+\sqrt{pq}\right]}, \\ v_1 = \dfrac{1}{2\lambda}. \end{cases}$$

Comme (S_1) est donnée par les formules

$$x_1 = x + l\frac{\partial x}{\partial u} + m\frac{\partial x}{\partial v},$$

on voit, d'après les équations (125), que notre première condition α se traduit par les relations

$$\bar{l} = im, \qquad \bar{m} = il,$$

ou bien par l'équation

$$(\alpha) \qquad \frac{\overline{U}}{\overline{W}} = i\frac{V}{W}.$$

Pour que la condition β soit aussi satisfaite, il faut et il suffit que les nouvelles variables u_1, v_1 satisfassent aux mêmes équations (125), ou

$$(\beta) \qquad \bar{v}_1 = iu_1.$$

Une analyse toute semblable à celle du paragraphe 50 montre que la condition (α) est une conséquence de (β) qui donne, d'après les équations (127) :

$$\bar{\lambda} = \frac{[\sqrt{pq'}\,(u-v) - \sqrt{qp'}\,(u+v)]\,\lambda + \sqrt{pq}}{i\,[\sqrt{qp'}\,(u+v) + \sqrt{pq'}\,(u-v)] + \sqrt{pq}\,(k' - 4iuv)\,\lambda}.$$

Écrivons celle-ci sous la forme bilinéaire en λ et $\bar{\lambda}$:

$$(128) \qquad A\lambda\bar{\lambda} + B\lambda + \overline{B}\bar{\lambda} + C = 0,$$

où l'on a posé :

$$\begin{cases} A = \sqrt{pq}\,(k' - 4iuv), & C = -\sqrt{pq}, \\ B = \sqrt{qp'}\,(u+v) - \sqrt{pq'}\,(u-v), & \overline{B} = i\sqrt{qp'}\,(u+v) + i\sqrt{pq'}\,(u-v). \end{cases}$$

On voit bien, d'après les équations (125), que les coefficients A, C sont réels et B, $\overline{B}$ imaginaires conjugués. En outre, le déterminant

$$B\overline{B} - AC = ik'\,[p\,(u-v)^2 - q\,(u+v)^2 - ipq] = k'[pq - p\beta^2 - q\alpha^2]$$

est positif, car $k'>0$, $pq-p\beta^2-q\alpha^2>0$, et l'équation (128) représente donc dans le plan complexe λ, et pour toute couple (α,β) satisfaisant à l'inégalité (123), un cercle *réel*.

Maintenant les équations différentielles (I), § 32, de la transformation $B_{ik'}$ donnent :

$$(129)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\lambda}{\partial u}=-i\dfrac{\sqrt{pq}}{k'\mathrm{H}}\mathrm{V}-\dfrac{i}{2k'\sqrt{\mathrm{H}}}\left(\mathfrak{D}\mathrm{U}+\mathfrak{D}'\mathrm{V}\right), \\ \dfrac{\partial\lambda}{\partial v}=-i\dfrac{\sqrt{pq}}{k'\mathrm{H}}\mathrm{U}-\dfrac{i}{2k'\sqrt{\mathrm{H}}}\left(\mathfrak{D}'\mathrm{U}+\mathfrak{D}''\mathrm{V}\right), \end{cases}$$

et nous remarquons que la quantité

$$\mathrm{H}=ip\,(u-v)+iq\,(u+v)^2+pq$$

est ici réelle positive. En outre, comme la surface (S) est réelle et $\bar u=iv$, $\bar v=iu$, on a :

$$\overline{\mathfrak{D}}=-\mathfrak{D}'', \qquad \overline{\mathfrak{D}'}=-\mathfrak{D}', \qquad \overline{\mathfrak{D}''}=-\mathfrak{D}.$$

Après cela, le changement de i en $-i$ dans les équations (129) donne :

$$(130)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\bar\lambda}{\partial u}=-\dfrac{\sqrt{pq}}{k'\mathrm{H}}\overline{\mathrm{U}}+\dfrac{1}{2k'\sqrt{\mathrm{H}}}\left(\mathfrak{D}'\overline{\mathrm{U}}+\mathfrak{D}\overline{\mathrm{V}}\right), \\ \dfrac{\partial\bar\lambda}{\partial v}=-\dfrac{\sqrt{pq}}{k'\mathrm{H}}\overline{\mathrm{V}}+\dfrac{1}{2k'\sqrt{\mathrm{H}}}\left(\mathfrak{D}''\overline{\mathrm{U}}+\mathfrak{D}'\overline{\mathrm{V}}\right). \end{cases}$$

La même méthode que nous avons appliquée plusieurs fois démontre encore ici qu'il suffit de satisfaire l'équation bilinéaire (128) pour un système initial de valeurs de u, v. En effet, si l'on forme les dérivées de cette équation par rapport à u et v, on trouve qu'elles sont identiquement nulles, en vertu même de l'équa-

IMPRIMERIE NATIONALE.

tion (128) et des équations différentielles (129) et (130). Il suffit dans le calcul effectif d'utiliser les identités

$$\frac{\overline{U}}{\overline{V}} = \frac{\overline{V}}{\overline{U}} = i\frac{\overline{W}}{W} = i\frac{A\bar{\lambda}+B}{A\lambda+\bar{B}}.$$

Nous arrivons de la sorte à la proposition finale en vue :

Toute surface réelle (S) *applicable sur le paraboloïde imaginaire* [*d'élément linéaire* (125)] *appartient, comme première nappe focale, à* ∞^2 *congruences rectilignes réelles* W, *dont les deuxièmes nappes sont des surfaces* (S_1) *de la même classe.*

Remarquons enfin qu'ici les ∞^2 transformations réelles se conservent encore dans le cas du paraboloïde de révolution $p = q$. Les surfaces (S) sont alors les surfaces des centres de courbure des surfaces W caractérisées par la relation

$$r_1 - r_2 = a \sin\frac{1}{a}(r_1 + r_2)$$

(a constante) entre les rayons principaux de courbure. C'est la première classe complète de surfaces applicables déterminée par M. Weingarten, pour laquelle M. Darboux a donné l'élégante construction géométrique bien connue (Darboux, *Leçons*, etc., t. III, page 372).

CONCLUSION.

Je termine ici ce mémoire dans lequel, malgré sa longueur, j'ai dû laisser de côté plusieurs questions et me borner à en effleurer d'autres qui s'y rattachent. J'espère y revenir plus tard pour compléter ma théorie dans les diverses directions indiquées dans l'aperçu.

Mais les développements donnés suffiront, je pense, pour faire reconnaître l'importance fondamentale, dans la théorie de la déformation des quadriques, de l'élément géométrique nouveau que j'y ai introduit, je veux dire : *des congruences rectilignes* W *dont les deux nappes de la surface focale sont applicables sur une même quadrique.*

Ces congruences donnent une généralisation directe des congruences pseudosphériques ; elles existent au même degré de généralité et jouissent des mêmes propriétés essentielles par rapport aux transformations. Leur étude permet de construire une théorie des transformations des surfaces applicables sur les quadriques générales, tout à fait semblable et aussi simple que la théorie des transformations des surfaces à courbure constante, qu'elle embrasse d'ailleurs comme un cas très particulier. Au surplus, dans le cas général, la théorie présente un aspect plus complet : c'est qu'en effet pour toute espèce de quadriques générales il y a toujours une classe de transformations B_k réelles, tandis que, lorsque la quadrique devient de révolution ou se particularise davantage dans une sphère, plusieurs des transformations B_k disparaissent.

Il ne semble pas inutile de rappeler ici les deux propriétés géométriques plus remarquables de nos transformations B_k, dont la connaissance, puisée d'abord dans l'examen de cas particuliers, nous a permis de diriger les calculs et d'atteindre notre but final.

La première consiste dans le lien qui unit individuellement les transformations B_k aux quadriques du *système homofocal*, déterminé par la quadrique fondamentale. L'autre propriété à laquelle je fais allusion se rapporte à la *loi d'applicabilité* des deux nappes de la surface focale d'une quelconque de nos congruences W, qui se trouve simplement donnée par l'*affinité d'Ivory* entre les deux quadriques homofocales.

C'est en nous laissant guider par ces notions géométriques que nous avons pu former les équations différentielles [(I), § 32, et (II), § 39] qui régissent nos transformations B_k, après quoi tout s'est réduit à effectuer des calculs de vérification. Ces calculs présentent, il est vrai, quelque longueur, ainsi qu'on devait s'y attendre, vu la généralité même de notre problème. Mais ils ont été effectués ici une fois pour toutes, et il n'y aura plus à y revenir dans la suite.

Quant aux équations différentielles elles-mêmes, elles sont aussi simples pour les transformations B_k générales que les formules de la transformation de Bäcklund pour les surfaces à courbure constante, et les méthodes de transformation qui en dérivent, simplifiées encore par le *théorème de permutabilité*, procèdent exactement comme les anciennes pour les surfaces pseudosphériques.

Nous pouvons enfin considérer nos résultats au point de vue analytique de l'intégration de l'*équation du deuxième ordre de l'applicabilité* pour un ds^2 appartenant à une quadrique. Il en résulte alors que d'une solution connue de cette équation on peut déduire une nouvelle solution, dépendant de deux constantes arbitraires, et cela en intégrant d'abord une équation différentielle du premier ordre du type de Riccati. Cette première intégration une fois effectuée, on peut trouver de nouvelles solutions toujours plus amples, avec tel nombre que l'on veut de constantes arbitraires, *par de simples calculs algébriques sans aucune quadrature*.

Ce sont là évidemment des propriétés de l'équation de l'applicabilité qui doivent tenir à la nature même de cette équation lorsque

le ds^2 fondamental appartient à une quadrique ; ce sont les mêmes propriétés dont jouit l'équation :

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial v} = \sin\theta$$

dans la théorie des surfaces pseudosphériques.

Il est probable que lorsque la théorie générale des transformations des équations aux dérivées partielles aura reçu un développement plus complet, nos résultats actuels n'en feront, au point de vue analytique, qu'un très petit chapitre d'application.

En attendant, il n'est pas moins remarquable que la géométrie, devançant encore ici l'analyse, lui ait indiqué de nouveaux champs de recherche qui promettent d'être intéressants et féconds.

Cascio (Garfagnana), septembre 1907.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

INTRODUCTION HISTORIQUE. 1

APERÇU DE LA THÉORIE DES TRANSFORMATIONS. 7

PREMIÈRE PARTIE.

TRANSFORMATIONS DES SURFACES RÉGLÉES APPLICABLES SUR LES QUADRIQUES.

§ 1. Rappel de quelques formules fondamentales. 21

2. Premières formules relatives au paraboloïde hyperbolique. 26

3. Surfaces gauches applicables sur le paraboloïde et congruences Γ. 30

4. Équation de Riccati pour la fonction inconnue $\lambda(v)$. 34

5. Les surfaces transformées R_1. 37

6. Les transformations singulières B_{-q}, B_p et B_0. 40

7. Calcul de l'élément linéaire des surfaces transformées R_1. 42

8. Formules d'applicabilité déduites de l'affinité d'Ivory. 48

9. Applicabilité des surfaces R_1 sur le paraboloïde. 50

10. Relation réciproque entre R et R_1. 55

11. Expression effective du mouvement invariable et conclusion. 58

12. Formules relatives à l'hyperboloïde à une nappe. 62

13. Surfaces gauches applicables sur l'hyperboloïde. — Équation différentielle en $\theta(v)$. 66

14. Les transformations des déformées gauches de l'hyperboloïde 71

15. Calcul de l'élément linéaire des surfaces transformées R_1. 73

16. Formules d'applicabilité des surfaces R_1 sur l'hyperboloïde. 77

17. Démonstration de l'identité (94). 81

§ 18. Démonstration de l'identité (95)..... 85
19. Relation réciproque entre R et R_1..... 88
20. Cas particulier de l'hyperboloïde de révolution..... 91
21. Propriétés nouvelles de l'affinité d'Ivory..... 94
22. Suite. — Équations pour déterminer λ'..... 97
23. Détermination de λ' et vérifications..... 100
24. Préparatifs pour le théorème de permutabilité..... 103
25. Première forme du théorème de permutabilité..... 106
26. Rapport anharmonique constant des quatre droites r_1, r_2, r, r'..... 108
27. Forme définitive du théorème de permutabilité..... 113
28. Applications du théorème de permutabilité..... 114

DEUXIÈME PARTIE.

TRANSFORMATIONS DES DÉFORMÉES GÉNÉRALES DES QUADRIQUES.

§ 29. Le théorème de M. Chieffi..... 117
30. Description de la méthode pour la recherche des transformations.... 120
31. Calcul de l'élément linéaire de la surface R_1 dans le cas du paraboloïde. 122
32. Formation des équations différentielles fondamentales pour la fonction $\lambda(u, v)$..... 125
33. Complète intégrabilité du système différentiel (I)..... 129
34. Les transformations B_k des déformées du paraboloïde hyperbolique... 132
35. Correspondance des lignes asymptotiques sur les deux nappes (S) et (S_1). 134
36. Propriétés ultérieures des transformations B_k..... 138
37. Correspondance des systèmes conjugués persistants sur (S) et (S_1).... 141
38. Surfaces déformées de l'hyperboloïde à une nappe..... 143
39. Les équations différentielles pour la fonction $\theta(u, v)$..... 147
40. Conditions d'intégrabilité du système différentiel (II)..... 150
41. Les transformations B_k pour les déformées de l'hyperboloïde à une nappe..... 152
42. Le théorème de permutabilité en général..... 155

§ 43. Les transformations B_k pour les déformées du paraboloïde elliptique.. 158

44. Applicabilité idéale des surfaces transformées (S_1) sur le paraboloïde.. 162

45. Transformations B_k des surfaces applicables idéalement sur le paraboloïde elliptique..... 164

46. Les transformations B_k pour les déformées de l'hyperboloïde à deux nappes..... 169

47. Cas de l'ellipsoïde. — Changement de notations..... 172

48. Transformations B_k des déformées de l'ellipsoïde..... 175

49. Transformations B_k des surfaces applicables idéalement sur le paraboloïde hyperbolique..... 180

50. Transformations B_k des surfaces applicables idéalement sur l'hyperboloïde à une nappe..... 185

51. Les quadriques conjuguées en déformation..... 192

52. La transformation H et ses premières propriétés..... 197

53. Hyperboloïdes à une nappe conjugués en déformation..... 199

54. La surface $(\overline{S_1})$ comme transformée de $(\overline{S})$ par une $B_{\overline{k}}$..... 203

55. Permutabilité de la transformation H avec les B_k..... 208

56. Indications relatives aux espaces à courbure constante..... 210

57. Les systèmes isothermes-conjugués sur les quadriques..... 212

58. Extension aux quadriques dans les espaces à courbure constante..... 215

59. Propriétés des systèmes isothermes-conjugués (α, β) sur les quadriques. 217

60. Les systèmes conjugués persistants sur les déformées des quadriques... 221

61. Suite. — Théorèmes de MM. Darboux et Servant..... 227

62. Nouvelle transformation du problème..... 230

63. Application aux déformées du paraboloïde elliptique..... 234

64. Autre forme des transformations B_k pour le paraboloïde elliptique.... 237

65. Identité des deux espèces de transformations..... 240

66. Les systèmes conjugués persistants sur le paraboloïde hyperbolique... 244

67. Retour aux surfaces pseudosphériques. — Surfaces gauches à courbure constante..... 247

68. Les transformations réelles de Bäcklund des surfaces pseudosphériques. 250

IMPRIMERIE NATIONALE.

§ 69. Comparaison avec les propriétés générales des transformations B_k.... 254

70. Généralisation aux déformées de l'ellipsoïde imaginaire..... 257

71. Transformations B_k pour les déformées réelles du paraboloïde à paramètres imaginaires..... 260

Conclusion..... 267

MÉMOIRES

PRÉSENTÉS PAR DIVERS SAVANTS

À L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT NATIONAL DE FRANCE.

TOME XXXIV. — N° 2.

MÉMOIRE

SUR

LA DÉFORMATION DES QUADRIQUES,

PAR

M. C. GUICHARD,

CORRESPONDANT DE L'INSTITUT, PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT.

INTRODUCTION.

La théorie de la déformation des quadriques est un cas particulier de la théorie générale des réseaux O applicables. Dès le début de ce mémoire, je montre que la déformation des quadriques revient à trouver deux réseaux O applicables situés l'un dans l'espace à trois, l'autre dans l'espace à cinq dimensions et tels que deux des coordonnées du premier réseau ne diffèrent que par un facteur constant de deux coordonnées du second. On peut, d'une manière générale, considérer deux réseaux O applicables, l'un A $(X_1, \ldots, X_n)$, situé dans l'espace à n dimensions; l'autre B $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$, situé

IMPRIMERIE NATIONALE.

dans un espace à m dimensions, et tels qu'entre les coordonnées de ces réseaux existent les relations :

$$X_1 = a_1 Y_1, \quad X_2 = a_2 Y_2, \quad X_p = a_p Y_p$$

$a_1, a_2, \ldots a_p$ étant des constantes.

La plupart des méthodes analytiques appliquées au problème spécial de la déformation des quadriques s'appliquent sans changement au problème plus général. C'est pourquoi j'ai tenu à présenter d'abord [chap. IV] les transformations du problème posé sous une forme purement analytique. Ces transformations peuvent se répartir en deux groupes :

1° Celles dont la mise en train n'exige que la résolution préalable d'une équation de Riccati; cette équation étant résolue, on peut poursuivre indéfiniment les transformations en effectuant des quadratures;

2° Celles dont la mise en train exige, au contraire, une opération analytique plus compliquée que la solution d'une équation de Riccati, opération que j'ai appelée d'ordre 2 et qui au fond revient à former un déterminant du quatrième ordre connaissant ses rotations. Ici encore, quand cette opération préalable est effectuée, on peut poursuivre la transformation à l'aide de quadratures.

J'étudie ensuite les propriétés géométriques de ces transformations. Dans le premier groupe figurent d'abord une transformation que j'ai indiquée en 1897 [Sur la déformation des quadriques, *C. R.*, 1897, 2e semestre] et une autre transformation où j'introduis ce que j'appelle les congruences K, 2O. Voici, en particulier, une propriété géométrique de cette transformation :

Soit M *un point qui décrit une surface applicable sur la quadrique; rapportons la surface et la quadrique à leur système conjugué commun; aux réseaux* (M) *est conjuguée une simple infinité de congruences* K, 2O. *Celles de ces congruences qui correspondent au point* M *engendrent un cône du second ordre; sur chacune de ces congruences il y a une simple infinité de points* X *qui décrivent des surfaces applicables sur la qua-*

drique. Les plans tangents à toutes les surfaces N *qui correspondent à une même droite de la congruence enveloppent un cône du second ordre; le sommet de ce cône décrit aussi une surface applicable sur la quadrique.*

L'étude des systèmes de cercles et de sphères m'a permis de mettre en évidence le rôle que joue la développable circonscrite au cercle à l'infini et à la quadrique dans la déformation de cette surface. Je me borne à indiquer le théorème suivant que j'ai déjà établi dans une note présentée aux *Comptes rendus :*

Soient G *et* G′ *deux génératrices parallèles de cette développable,* A *et* A′ *les points où ces génératrices coupent un plan tangent à la quadrique. A ces points correspondent sur les déformées des points* A_1 *et* A_1'; *les points* A_1 *et* A_1' *décrivent ce que j'ai appelé* [Systèmes orthogonaux et cycliques, n° 94] *des surfaces associées.*

A ces surfaces associées on peut faire correspondre des surfaces isothermiques [*loc. cit.*]; il était naturel d'étudier ces surfaces. J'ai été amené ainsi à introduire la notion de *système isothermique singulier,* sur laquelle je me permets d'appeler l'attention de l'Académie.

On sait que la recherche des surfaces isothermiques revient à trouver cinq solutions d'une équation de M. Moutard dont la somme des carrés est nulle. L'équation possède alors une infinité de groupes analogues qui dépendent d'un paramètre numérique λ.

Cela posé, prenons p de ces groupes et imaginons qu'il soit possible de choisir dans chacun d'eux une combinaison linéaire des solutions du groupe, de telle sorte qu'entre les p combinaisons choisies existe une relation linéaire et homogène; on pourra alors dans chaque groupe distinguer une combinaison des solutions de telle sorte qu'entre p quelconques des combinaisons distinguées existe une relation linéaire.

La même propriété existe pour les équations que j'ai appelées E_n [*loc. cit.*, n° 64].

Je dis alors que le système isothermique est un système singulier d'ordre $p-1$.

Il y a alors une équation d'ordre $2p-2$ qui donne les valeurs de λ pour lesquelles la combinaison distinguée du groupe est une combinaison isotrope. Cette équation est l'*équation caractéristique* du système singulier.

Les systèmes isothermiques qui se présentent dans la déformation des quadriques sont des systèmes singuliers d'ordre 2.

J'indique ensuite un certain nombre de transformations des systèmes isothermiques. Ces transformations comprennent toutes les transformations connues. J'étudie l'effet produit par ces transformations sur un système singulier, ce qui me permet de mettre en évidence l'importance de l'équation caractéristique.

En particulier, je montre qu'il est possible de résoudre les trois problèmes suivants :

Étant donnée une surface isothermique, reconnaître si l'on peut par n transformations au plus ramener cette surface :

1° *À une surface minima;*

2° *À une surface à courbure moyenne constante;*

3° *À une surface étudiée dans la déformation des quadriques.*

CHAPITRE PREMIER.

PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES.

1. *Propriétés des réseaux d'une quadrique.* — Considérons la quadrique dont l'équation est :

$$(1) \qquad (1+p^2)\,x_1^2+(1+q^2)\,x_2^2+x_3^2=1.$$

Soit M (x_1, x_2, x_3) un point de cette quadrique qui décrit un réseau; x_1, x_2, x_3 sont fonction de deux variables u et v et ces fonctions sont solutions d'une même équation de Laplace :

$$(2) \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial v}=\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial\theta}{\partial u}+\frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v}.$$

L'équation (2) admet évidemment les deux solutions

$$(3) \qquad z_1=px_1, \qquad z_2=qx_2,$$

et comme l'on a alors

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+z_1^2+z_2^2=1,$$

Il en résulte que le point M_1 $(x_1, x_2, x_3, z_1, z_2)$ décrit dans l'espace à cinq dimensions un réseau O; autrement dit le réseau (M) est 3O; les deux coordonnées complémentaires qui le rendent 3O sont px_1, qx_2.

Tout réseau parallèle à un réseau de la quadrique possède la même propriété.

En effet soit N (X_1, X_2, X_3) un point qui décrit un réseau parallèle au réseau (M). On aura :

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial X_i}{\partial u} = H\dfrac{\partial x_i}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial X_i}{\partial v} = L\dfrac{\partial x_i}{\partial v}, \end{cases}$$

H et L étant des fonctions de u et v convenablement choisies.

Posons :

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial Z_i}{\partial u} = H\dfrac{\partial z_i}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial Z_i}{\partial v} = L\dfrac{\partial z_i}{\partial v}. \end{cases}$$

Le point $N_1(X_1, X_2, X_3, Z_1, Z_2)$ décrit dans l'espace à cinq dimensions un réseau O; autrement dit, le point N décrit un réseau 3O avec les coordonnées complémentaires Z_1 et Z_2 où

$$(6)\qquad Z_1 = pX_1, \qquad Z_2 = qX_2.$$

Réciproquement, tout réseau (N) *possédant la propriété précédente est parallèle à un réseau de la quadrique.*

En effet, posons :

$$(7)\qquad X_1' = X_1\sqrt{1+p^2}, \quad X_2' = X_2\sqrt{1+q^2}, \quad X_3' = X_3.$$

Le point H (X_1', X_2', X_3') décrit un réseau O; soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ les cosinus directeurs de la normale à ce réseau. On sait que l'on a des relations de la forme

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \alpha_i}{\partial u} = h_1\dfrac{\partial X_i'}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial \alpha_i}{\partial v} = l_1\dfrac{\partial X_i'}{\partial v}. \end{cases}$$

Si l'on pose maintenant :

$$(9)\qquad x_1=\frac{\alpha_1}{\sqrt{1+p^2}},\qquad x_2=\frac{\alpha_2}{\sqrt{1+q^2}},\qquad x_3=\alpha_3,$$

on aura :

$$(10)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x_i}{\partial u}=h_1\dfrac{\partial X_i}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial x_i}{\partial v}=l_1\dfrac{\partial X_i}{\partial v}. \end{cases}$$

Il en résulte que le point M (x_1, x_2, x_3) décrit un réseau parallèle au réseau (N). De plus, les formules (9) montrent que l'on a :

$$(11)\qquad (1+p^2)x_1^2+(1+q^2)x_2^2+x_3^2=1;$$

par conséquent, le réseau (M) est tracé sur la quadrique.

2. *Déformation de la quadrique.* — Supposons qu'on ait trouvé une surface S applicable sur la quadrique. Rapportons les deux surfaces à leur système conjugué commun; ces systèmes conjugués forment sur les deux surfaces des réseaux C. Au point M (x_1, x_2, x_3) de la quadrique correspond sur la surface S un point N (y_1, y_2, y_3); tout réseau (M_1) parallèle au réseau M est aussi un réseau C, et en tenant compte des résultats du paragraphe précédent, on peut énoncer le résultat suivant :

La déformation de la quadrique revient à trouver un réseau $M_1(X_1, X_2, X_3)$ *qui est à la fois* C *et* 3O, *les coordonnées complémentaires qui le rendent* 3O *étant* pX_1 *et* qX_2.

Si le réseau M_1 seul est connu, on peut en déduire le réseau M (§ 1), mais il faudra résoudre une équation de Riccati pour trouver le réseau N, c'est-à-dire la déformée de la quadrique.

Si on connaît en outre le réseau N_1 (Y_1, Y_2, Y_3) qui est applicable sur le réseau M_1, on pourra déterminer le réseau N à l'aide de qua-

dratures seulement. En effet, entre les coordonnées des réseaux M et M_1 existent les relations

$$(12)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x_i}{\partial u} = h\dfrac{\partial X_i}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial x_i}{\partial v} = l\dfrac{\partial X_i}{\partial v}. \end{cases}$$

On obtiendra les coordonnées du réseau N en effectuant les quadratures définies par les équations

$$(13)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial y_i}{\partial u} = k\dfrac{\partial Y_i}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial y_i}{\partial v} = l\dfrac{\partial Y_i}{\partial v}. \end{cases}$$

3. Le réseau M_1 étant 3O avec les coordonnées complémentaires pX_1, qX_2, le point de l'espace à cinq dimensions qui a pour coordonnées X_1, X_2, X_3, pX_1, qX_2 décrit un réseau O qui est applicable sur le réseau décrit par le point qui a pour coordonnées Y_1, Y_2, Y_3, pX_1, qX_2; si donc on pose :

$$(14)\qquad \begin{cases} X'_1 = \sqrt{1+p^2}\,X_1, \qquad X'_2 = \sqrt{1+q^2}\,X_2, \qquad X'_3 = X_3, \\ Y'_1 = pX_1 = \dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}X'_1, \qquad Y'_2 = qX_2 = \dfrac{q}{\sqrt{1+q^2}}X'_2, \\ Y'_3 = Y_1, \qquad Y'_4 = Y_2, \qquad Y'_5 = Y_3, \end{cases}$$

les points $M'(X'_1X'_2X'_3)$ et $N'(Y'_1Y'_2Y'_3Y'_4Y'_5)$ décrivent des réseaux O applicables; donc :

La déformation de la quadrique revient à trouver un réseau $M'(X'_1X'_2X'_3)$ *de l'espace à trois, applicable sur un réseau* $N'(Y'_1Y'_2Y'_3Y'_4Y'_5)$,

les réseaux étant O *et tels qu'entre leurs coordonnées existent les relations*

$$(15)\qquad Y'_1=\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}X'_1,\qquad Y'_2=\frac{q}{\sqrt{1+q^2}}X'_2.$$

Il résulte d'ailleurs de ce qui précède, que si les réseaux M′ et N′ sont connus, on pourra obtenir la déformée à l'aide de quadratures; si le réseau M′ seul était connu, il faudrait résoudre une équation de Riccati pour trouver cette déformée.

4. Remarque. — En écrivant l'équation de la quadrique sous la forme (1) on fait jouer un rôle spécial à l'axe x_3; on a évidemment des propriétés analogues pour les autres axes. Ainsi un réseau de la quadrique est 3O de trois façons différentes; les deux coordonnées complémentaires qui le rendent 3O ne diffèrent que par un facteur constant de deux des coordonnées du réseau. On voit de même que le réseau M′ [§ 3] est applicable, non sur un seul, mais sur trois réseaux de l'espace à cinq dimensions. Dans chacune de ces applications deux des coordonnées de M′ ne diffèrent que par un facteur constant de deux des coordonnées du réseau applicable.

5. *Congruences orthogonales aux réseaux de la quadrique.* — Soit G une congruence qui est orthogonale à un réseau $M(x_1,x_2,x_3)$ tracé sur la quadrique [Systèmes orthogonaux et systèmes cycliques, chap. II]. Les paramètres directeurs de la droite G sont ceux de la normale au réseau M. Ces paramètres sont donc :

$$(16)\qquad X_1=x_1(1+p^2),\quad X_2=x_1(1+q^2),\quad X_3=x_3.$$

On a alors :

$$(17)\qquad X_1^2+X_2^2+X_3^2=1+p^2(1+p^2)x_1^2+q^2(1+q^2)x_2^2.$$

IMPRIMERIE NATIONALE.

Si donc on pose :

$$(18) \qquad Y_1 = ip\sqrt{1+p^2}x_1 \qquad Y_2 = iq\sqrt{1+q^2}x_2 \qquad Y_3 = i,$$

les fonctions Y satisfont à la même équation de Laplace que les fonctions X et l'on a :

$$(19) \qquad X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 = 0;$$

par conséquent la congruence G est 3O, les trois coordonnées complémentaires sont Y_1, Y_2, Y_3 et l'on a :

$$(20) \qquad Y_1 = \frac{ip}{\sqrt{1+p^2}}X_1, \qquad Y_2 = \frac{iq}{\sqrt{1+q^2}}X_2.$$

Réciproquement, toute congruence $G(X_1, X_2, X_3)$, qui est 3O, et dont deux des coordonnées complémentaires Y_1, Y_2 sont données par les formules (20) est orthogonale à un réseau de la quadrique.

En effet, des relations (19) et (20) on déduit :

$$\frac{X_1^2}{1+p^2} + \frac{X_2^2}{1+q^2} + X_3^2 + Y_3^2 = 0;$$

par conséquent le plan P dont l'équation est

$$X_1x_1 + X_2x_2 + X_3x_3 + iY_3 = 0$$

enveloppe la quadrique; on a donc mis en évidence sur la quadrique un réseau orthogonal à la congruence G.

Considérons maintenant une congruence (G_1) décrite par une droite G_1 ayant pour paramètres directeurs Y_1, Y_2, Y_3. Cette con-

gruence possède les mêmes propriétés que la congruence G. D'autre part des relations (19) et (20) on déduit :

$$-\frac{Y_1^2}{p^2}-\frac{Y_2^2}{q^2}+Y_3^2+X_3^2=0,$$

ce qui montre que la congruence (G_1) est orthogonale à un réseau de la quadrique Q_1, dont l'équation est :

$$-p^2x_1^2-q^2x_2^2+x_3^2=1.$$

6. Si le réseau décrit par le point M est un réseau C, la congruence décrite par la droite G sera aussi C et inversement; d'où le résultat suivant :

La déformation de la quadrique revient à trouver des congruences (G) $[X_1, X_2, X_3]$ *qui sont* C *et* 3O, *les coordonnées complémentaires* Y_1, Y_2, Y_3 *qui rendent cette congruence* 3O *étant telles que :*

$$Y_1=\frac{ip}{\sqrt{1+p^2}}X_1, \qquad Y_2=\frac{iq}{\sqrt{1+q^2}}X_2.$$

Si l'on connaît seulement X_1, X_2, X_3, il faudra résoudre une équation de Riccati pour trouver les paramètres Z_1, Z_2, Z_3 de la congruence orthogonale au réseau (N) applicable sur le réseau M. Quand on aura déterminé Z_1, Z_2, Z_3, on pourra trouver le réseau (N) à l'aide de quadratures seulement.

Soit alors

$$(20\,bis) \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial v}=\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial\theta}{\partial u}+\frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v}$$

l'équation de Laplace à laquelle satisfont les fonctions X_1, X_2, X_3 [cette équation est la même que celle à laquelle satisfont x_1, x_2, x_3

quand on prend pour X_1, X_2, X_3 les valeurs données par les formules (16)]. Pour que la congruence (G) soit C, il faut et il suffit que

$$X_1^2+X_2^2+X_3^2=h^2U^2+l^2V^2, \tag{21}$$

U et V étant respectivement des fonctions de u seul et de v seul; on aura ainsi :

$$Y_1^2+Y_2^2+Y_3^2=-h^2U^2-l^2V^2;$$

par conséquent la congruence (G_1) est aussi C; donc :

On peut, par la résolution d'une équation de Riccati, déduire de toute déformée de la quadrique

$$(1+p^2)x_1^2+(1+q^2x_2^2)+x_3^2=1$$

une déformée de la quadrique

$$-p^2x_1^2-q^2x_2^2+x_3^2-1.$$

Ce résultat a été obtenu, par une autre méthode, par M. Servant. [*C. R.*, 1903.]

7. Supposons que le point M décrive un réseau C; posons :

$$\begin{cases} X_1'=\dfrac{X_1}{\sqrt{1+p^2}}=x_1\sqrt{1+p^2}, \quad X_2'=\dfrac{X_2}{\sqrt{1+q^2}}=x_2\sqrt{1+q^2}, \\ X_3'=X_3=x_3. \end{cases} \tag{22}$$

X_1', X_2', X_3' sont les fonctions α_1, α_2, α_3 du paragraphe 1. Toute congruence (H) décrite par une droite H ayant pour paramètres directeurs $X_1'X_2'X_3'$ est une congruence O puisque

$$X_1'^2+X_2'^2+X_3'^2=1;$$

de plus cette congruence est 3C, car l'on a :

$$(23)\quad h^2U^2+l^2V^2=X_1^2+X_2^2+X_3^2=(1+p^2)X_1'^2+(1+q^2)X_2'^2+X_3'^2.$$

Cette relation montre que la congruence (H) est 3C; les deux coordonnées complémentaires qui la rendent 3C sont pX_1' et qX_2'; donc :

La déformation de la quadrique revient à trouver des congruences H$(X_1'X_2'X_3')$ *qui sont* O *et* 3C, *les deux coordonnées complémentaires qui la rendent* 3C *étant* pX_1' *et* qX_2'.

8. On peut généraliser les résultats précédents. Écrivons l'équation de la quadrique sous la forme

$$(24)\qquad ax_1^2+bx_2^2+cx_3^2=1;$$

posons :

$$(25)\quad z_1=\sqrt{\frac{a}{\rho}-1}\,x_1,\quad z_2=\sqrt{\frac{b}{\rho}-1}\,x_2,\quad z_3=\sqrt{\frac{c}{\rho}-1}\,x_3,$$

ρ étant une constante arbitraire. On aura :

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+z_1^2+z_2^2+z_3^2=\frac{1}{\rho};$$

donc :

Tout réseau de la quadrique est 4O *d'une infinité de manières; les coordonnées complémentaires sont* z_1, z_2, z_3.

La déformation de la quadrique revient à trouver des réseaux $H(X_1, X_2, X_3)$ *qui sont* C *et* 4O, *les coordonnées complémentaires* Z_1, Z_2, Z_3 *ayant les valeurs :*

$$(26)\quad Z_1=\sqrt{\frac{a}{\rho}-1}\,X_1,\quad Z_2=\sqrt{\frac{b}{\rho}-1}\,X_2,\quad Z_3=\sqrt{\frac{c}{\rho}-1}\,X_3.$$

Soient (Y_1, Y_2, Y_3) les coordonnées du réseau H′ applicable sur le réseau H. Le point $K(Z_1, Z_2, Z_3, Y_1, Y_2, Y_3)$ décrit dans l'espace à six dimensions un réseau, applicable sur le réseau de l'espace à trois qui a pour coordonnées :

$$X_1'=\sqrt{\frac{a}{\rho}}X_1,\qquad X_2'=\sqrt{\frac{b}{\rho}}X_2,\qquad X_3'=\sqrt{\frac{c}{\rho}}X_3;$$

donc :

La déformation de la quadrique revient à trouver dans l'espace à trois dimensions un point $M(X_1', X_2', X_3')$ qui décrit un réseau O applicable sur le réseau $(Z_1, Z_2, Z_3, Y_1, Y_2, Y_3)$ et de telle sorte qu'entre les coordonnées de ces réseaux existent les relations :

$$Z_1=\sqrt{\frac{a-\rho}{a}}X_1',\qquad Z_2=\sqrt{\frac{b-\rho}{b}}X_2',\qquad Z_3=\sqrt{\frac{c-\rho}{c}}X_3'.$$

9. Prenons encore l'équation de la quadrique sous la forme (24); les paramètres directeurs X_1, X_2, X_3 de la normale à la quadrique sont :

$$X_1=ax_1,\qquad X_2=bx_2,\qquad X_3=cx_3,$$

et par conséquent on a :

$$X_1^2+X_2^2+X_3^2+(a\rho-a^2)x_1^2+(b\rho-b^2)x_2^2+(c\rho-c^2)x_3^2-\rho=0.$$

En posant :

$$Z_1=\sqrt{a\rho-a^2}\,x_1,\quad Z_2=\sqrt{b\rho-b^2}\,x_2,\quad Z_3=\sqrt{c\rho-c^2}\,x_3,\quad Z_4=i\rho,$$

on aura, quelle que soit la constante ρ :

$$X_1^2+X_2^2+X_3^2+Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2=0;$$

donc :

Toute congruence G (X_1, X_2, X_3) *orthogonale à un réseau de la quadrique est* 4O *d'une infinité de manières, les coordonnées complémentaires* Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 *étant telles que :*

$$(27)\quad Z_1=\sqrt{\frac{\rho-a}{a}}\,X_1,\qquad Z_2=\sqrt{\frac{\rho-b}{b}}\,X_2,\qquad Z_3=\sqrt{\frac{\rho-c}{c}}\,X_3.$$

La déformation de la quadrique revient à trouver des congruences C, 4O *dont les coordonnées complémentaires satisfont aux relations* (27).

CHAPITRE II.

DÉTERMINANTS O QUI SERVENT À FORMER LES ÉLÉMENTS INTRODUITS DANS LE PRÉCÉDENT CHAPITRE.

10. Considérons les deux réseaux O applicables $M'(X_1', X_1', X_3')$ et $N'(Y_1', Y_2', Y_3', Y_4', Y_5')$ du paragraphe 3. Au premier de ces réseaux correspond un déterminant orthogonal δ [Sur les systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques, chap. IV] :

$$(1) \qquad \delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

dont je désigne les rotations par a, b, m, n. On aura :

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial v} = bm, \qquad \dfrac{\partial b}{\partial u} = an, \\ ab + \dfrac{\partial m}{\partial v} + \dfrac{\partial n}{\partial u} = 0. \end{cases}$$

Au second de ces réseaux correspond [Systèmes orthogonaux et systèmes cycliques, chap. VI] un déterminant O, Δ :

$$(3) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} x_1, & x_2, \ldots, x_5 \\ y_1, & y_2, \ldots, y_5 \\ z_1, & z_2, \ldots, z_5 \\ \xi_1, & \xi_2, \ldots, \xi_5 \\ \eta_1, & \eta_2, \ldots, \eta_5 \end{vmatrix}$$

Les deux réseaux M′ et N′ étant applicables, les rotations m et n sont les mêmes pour les déterminants δ et Δ; je désigne les autres rotations de Δ par A, B; E, F; G, K, de sorte que l'on a :

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial v}=Bm, \quad \dfrac{\partial E}{\partial v}=Fm, \quad \dfrac{\partial G}{\partial v}=Km, \\ \dfrac{\partial B}{\partial u}=An, \quad \dfrac{\partial F}{\partial u}=En, \quad \dfrac{\partial K}{\partial u}=Gn, \\ AB+EF+GK+\dfrac{\partial m}{\partial v}+\dfrac{\partial n}{\partial u}=0. \end{cases}$$

Des formules (2) et (4) on déduit :

$$(5)\qquad AB+EF+GK-ab=0,$$

et par suite :

$$\frac{\partial}{\partial v}[A^2+E^2+G^2-a^2]=0.$$

$A^2+E^2+G^2-a^2$ est donc fonction de u seul; par un choix convenable de la variable indépendante, on peut réduire cette expression à l'unité; il en est de même de l'expression : $B^2+F^2+K^2-b^2$. On aura donc :

$$(6)\qquad \begin{cases} A^2+E^2+G^2-a^2=1, \\ B^2+F^2+K^2-b^2=1. \end{cases}$$

On aura ensuite :

$$\frac{\partial X_k'}{\partial u}=H\beta_k, \qquad \frac{\partial Y_k'}{\partial u}=H\xi_k,$$

$$\frac{\partial X_k'}{\partial v}=L\gamma_k, \qquad \frac{\partial Y_k'}{\partial v}=L\eta_k,$$

IMPRIMERIE NATIONALE.

et par conséquent les formules 15 (§ 3) montrent que

$$(7)\qquad \begin{cases} \xi_1 = P\beta_1, & \xi_2 = Q\beta_2, & P = \dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}, \\ \eta_1 = P\gamma_1, & \eta_2 = Q\gamma_2, & Q = \dfrac{q}{\sqrt{1+q^2}}. \end{cases}$$

11. Posons :

$$(8)\qquad \begin{cases} \beta'_1 = A, & \beta'_2 = E, & \beta'_3 = G, & \beta'_4 = ia, \\ \gamma'_1 = B, & \gamma'_2 = F, & \gamma'_3 = K, & \gamma'_4 = ib. \end{cases}$$

Les formules (5) et (6) donnent :

$$\sum \beta'^2_k = 1, \qquad \sum \gamma'^2_k = 1, \qquad \sum \beta'_k \gamma'_k = 0.$$

Des formules (2) et (4) on déduit :

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \beta'_k}{\partial v} = m\gamma'_k, \\ \dfrac{\partial \gamma'_k}{\partial u} = n\beta'_k. \end{cases}$$

Il en résulte que les quantités (8) forment les deux dernières lignes d'un déterminant O de l'espace à quatre dimensions. Soit θ ce déterminant.

$$(10)\qquad \theta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 \\ \beta'_1 & \beta'_2 & \beta'_3 & \beta'_4 \\ \gamma'_1 & \gamma'_2 & \gamma'_3 & \gamma'_4 \end{vmatrix}$$

Nous allons former les deux premières lignes de ce déterminant. Dans le déterminant Δ on a, en tenant compte des relations (7) :

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2+P^2(\beta_1^2+\gamma_1^2)=1.$$

D'autre part :

$$\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2=1.$$

De ces deux équations on déduit .

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2-P^2\alpha_1^2=1-P^2,$$

On trouverait de même :

$$x_2^2+y_2^2+z_2^2-Q^2\alpha_2^2=1-Q^2,$$

$$x_1x_1+y_1y_2+z_1z_2-PQ\alpha_1\alpha_2=0.$$

On voit que l'on peut poser :

$$(11)\begin{cases}\lambda_1=\dfrac{x_1}{\sqrt{1-P^2}}, & \lambda_2=\dfrac{y_1}{\sqrt{1-P^2}}, & \lambda_3=\dfrac{z_1}{\sqrt{1-P^2}}, & \lambda_4=\dfrac{iP\alpha_1}{\sqrt{1-P^2}},\\ \mu_1=\dfrac{x_2}{\sqrt{1-Q^2}}, & \mu_2=\dfrac{y_2}{\sqrt{1-Q^2}}, & \mu_3=\dfrac{z_2}{\sqrt{1-Q^2}}, & \mu_4=\dfrac{iQ\alpha_2}{\sqrt{1-Q^2}}.\end{cases}$$

Nous désignerons les rotations de ce déterminant par :

$$\mathfrak{A} \quad \mathfrak{E} \quad m_1$$

$$\mathfrak{B} \quad \mathfrak{F} \quad n_1.$$

On voit que l'on aura :

$$(12)\qquad \begin{cases} \mathcal{A}=\dfrac{\xi_1}{\sqrt{1-P^2}}, & \mathcal{E}=\dfrac{\xi_2}{\sqrt{1-Q^2}}, & m_1=n, \\ \mathcal{B}=\dfrac{\eta_1}{\sqrt{1-P^2}}, & \mathcal{F}=\dfrac{\eta_2}{\sqrt{1-Q^2}}, & n_1=m. \end{cases}$$

12. On peut former maintenant toute une série de déterminants O à six lignes ayant pour rotations :

$$(13)\qquad \begin{cases} A\cos\theta, & E\cos\theta, & G\cos\theta, & a\sin\theta, & m, \\ B\cos\theta, & F\cos\theta, & K\cos\theta, & b\sin\theta, & n, \end{cases}$$

où θ est un angle constant. On voit facilement que toutes les relations qui doivent exister entre les rotations d'un déterminant O sont satisfaites. Soit :

$$(14)\qquad \Delta'=\begin{vmatrix} x'_1, & x'_2, \ldots, x'_6 \\ y'_1, & y'_2, \ldots, y'_6 \\ z'_1, & z'_2, \ldots, z'_6 \\ t'_1, & t'_2, \ldots, t'_6 \\ \xi'_1, & \xi'_2, \ldots, \xi'_6 \\ \eta'_1, & \eta'_2, \ldots, \eta'_6 \end{vmatrix}$$

ce déterminant; je vais montrer comment on peut former deux des colonnes de ce déterminant. Nous savons que l'on a :

$$(15)\qquad \begin{cases} x_1^2+y_1^2+z_1^2+\xi_1^2+\eta_1^2=1, \\ \alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2=1. \end{cases}$$

Posons :

$$(16)\quad \begin{cases} x_1' = x_1\cos\varphi, \quad y_1' = y_1\cos\varphi, \quad z_1' = z_1\cos\varphi, \quad t_1' = \alpha_1\sin\varphi, \\ \xi_1' = \sqrt{\xi_1^2\cos^2\varphi + \beta_1^2\sin^2\varphi} = \beta_1\sqrt{P^2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}, \\ \eta_1' = \sqrt{\eta_1^2\cos^2\varphi + \gamma_1^2\sin^2\varphi} = \gamma_1\sqrt{P^2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}, \end{cases}$$

où φ est un angle constant que nous allons déterminer; on a bien déjà :

$$x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2 + t_1'^2 + \xi_1'^2 + \eta_1'^2 = 1.$$

En différentiant les formules (16) on trouve :

$$(17)\qquad \frac{\partial x_1'}{\partial u} = A\cos\varphi\,\xi_1, \qquad \frac{\partial t_1'}{\partial u} = a\sin\varphi\,\beta_1.$$

D'autre part Δ' étant un déterminant O ayant les rotations données par les formules (13), on devra avoir :

$$(18)\qquad \frac{\partial x_1'}{\partial u} = A\cos\theta\,\xi_1', \qquad \frac{\partial t_1'}{\partial u} = a\sin\theta\,\xi_1'.$$

En comparant et en tenant compte des formules (16), on trouve entre θ et φ les deux relations équivalentes :

$$(19)\qquad \cos\theta = \frac{P\cos\varphi}{\sqrt{P^2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}}, \qquad \sin\theta = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{P^2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}},$$

d'où l'on tire :

$$(20)\qquad \cos\varphi = \frac{\cos\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + P^2\sin^2\theta}}, \qquad \sin\varphi = \frac{P\sin\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + P^2\sin^2\theta}}.$$

On voit de même que si l'on détermine un angle ψ par les équations :

$$(21)\qquad \cos\psi=\frac{\cos\theta}{\sqrt{\cos^2\theta+Q^2\sin^2\theta}},\qquad \sin\psi=\frac{Q\sin\theta}{\sqrt{\cos^2\theta+Q^2\sin^2\theta}},$$

on pourra prendre :

$$(22)\begin{cases} x_2'=x_2\cos\psi,\quad y_2'=y_2\cos\psi,\quad z_2'=z_2\cos\psi,\quad t_2'=\alpha_2\sin\psi,\\ \xi_2'=\beta_2\sqrt{Q^2\cos^2\psi+\sin^2\psi},\qquad \eta_2'=\gamma_2\sqrt{Q^2\cos^2\psi+\sin^2\psi}. \end{cases}$$

Pour justifier ce fait, il faut en outre vérifier que l'on a :

$$x_1'x_2'+y_1'y_2'+z_1'z_2'+t_1't_2'+\xi_1'\xi_2'+\eta_1'\eta_2'=0.$$

C'est ce que l'on voit facilement en partant des deux équations :

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2+PQ(\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2)=0,$$

$$\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2=0.$$

On multiplie la première par $\cos\varphi\cos\psi$, la seconde par $\sin\varphi\sin\psi$, on ajoute les résultats et l'on obtient l'identité qu'il s'agit d'établir.

13. Remarque. — La méthode précédente est en défaut pour deux valeurs particulières de θ; ce sont celles pour lesquelles une des quantités

$$\cos^2\theta+P^2\sin^2\theta\quad\text{ou}\quad\cos^2\theta+Q^2\sin\theta$$

est nulle. Supposons que la première de ces quantités soit nulle,

il n'y a rien à changer aux valeurs de x'_2, y'_2, z'_2, t'_2, ξ'_2, η'_2. Dans ce cas on a :

$$(23)\qquad \cos\theta = \frac{-iP}{\sqrt{1-P^2}}, \qquad \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{1-P^2}}.$$

On pourra poser alors :

$$(24)\quad \begin{cases} x'_1 + ix'_3 = x_1, \quad y'_1 + iy'_3 = y_1, \quad z'_1 + iz'_3 = z_1, \quad t'_1 + it'_3 = i\alpha_1, \\ \xi'_1 + i\xi'_3 = i\sqrt{1-P^2}\,\beta_1, \quad \eta'_1 + i\eta'_3 = i\sqrt{1-P^2}\,\gamma_1. \end{cases}$$

On vérifie d'abord que la somme des carrés de ces six fonctions est nulle, que la somme

$$x'_2(x'_1+ix'_3)+y'_2(y'_1+iy'_3)+z'_2(z'_1+iz'_3)+t'_2(t'_1+it'_3) \\ +\xi'_2(\xi'_1+i\xi'_3)+\eta'_2(\eta'_1+\eta'_3)$$

est aussi nulle, et enfin que l'on a :

$$\frac{\partial(x'_1+ix'_3)}{\partial u} = A\cos\theta\,(\xi'_1+i\xi'_3),$$

$$\frac{\partial(t'_1+it'_3)}{\partial u} = a\sin\theta\,(\xi'_1+i\xi'_3).$$

On peut dire que dans ce cas on a une colonne de Δ' et une combinaison isotrope des autres colonnes.

14. On peut former une autre série de déterminants O du sixième ordre. Considérons en effet les deux équations :

$$(25)\quad \begin{cases} \xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2+\xi_4^2+\xi_5^2 = 1, \\ \beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2 = 1. \end{cases}$$

Multiplions les deux membres de la première par $\cos^2\omega$, ceux de la seconde par $\sin^2\omega$ et ajoutons les résultats; on aura au premier membre une somme égale à l'unité. Si donc on pose :

$$(26)\quad \begin{cases} \xi_1'' = \sqrt{\xi_1^2\cos^2\omega + \beta_1^2\sin^2\omega} = \beta_1\sqrt{\mathrm{P}^2\cos^2\omega + \sin^2\omega}, \\ \xi_2'' = \sqrt{\xi_2^2\cos^2\omega + \beta_2^2\sin^2\omega} = \beta_2\sqrt{\mathrm{Q}^2\cos^2\omega + \sin^2\omega}, \\ \xi_3'' = \beta_3\sin\omega, \quad \xi_4'' = \xi_3\cos\omega, \quad \xi_5'' = \xi_4\cos\omega, \quad \xi_6'' = \xi_5\cos\omega, \end{cases}$$

et de même :

$$(27)\quad \begin{cases} \eta_1'' = \gamma_1\sqrt{\mathrm{P}^2\cos^2\omega + \sin^2\omega}, \\ \eta_2'' = \gamma_2\sqrt{\mathrm{Q}^2\cos^2\omega + \sin^2\omega}, \\ \eta_3'' = \gamma_3\sin\omega, \quad \eta_4'' = \eta_3\cos\omega, \quad \eta_5'' = \eta_4\cos\omega, \quad \eta_6'' = \eta_5\cos\omega, \end{cases}$$

où ω est constant, on aura bien :

$$(28)\quad \begin{cases} \sum(\xi_k'')^2 = 1, \qquad \sum(\eta_k'')^2 = 1, \\ \dfrac{\partial}{\partial v}\xi_k'' = n\eta_k'', \qquad \dfrac{\partial}{\partial u}\eta_k'' = m\xi_k''. \end{cases}$$

Il en résulte que les fonctions ξ'', η'' forment les deux dernières lignes d'un déterminant O d'ordre 6. Soit

$$(29)\quad \Delta'' = \begin{vmatrix} x_1'', & \ldots, & x_6'' \\ y_1'', & \ldots, & y_6'' \\ z_1'', & \ldots, & z_6'' \\ t_1'', & \ldots, & t_6'' \\ \xi_1'', & \ldots, & \xi_6'' \\ \eta_1'', & \ldots, & \eta_6'' \end{vmatrix}$$

ce déterminant; ses rotations m et n sont les mêmes que celles des déterminants δ et Δ.

15. Il est facile de former des réseaux O applicables situés dans des espaces à trois, cinq et six dimensions. Déterminons h et l par les équations :

$$\frac{\partial h}{\partial v} = lm, \qquad \frac{\partial l}{\partial u} = hn. \tag{30}$$

Nous aurons dans l'espace à trois un réseau R (X_1, X_2, X_3) en effectuant les quadratures compatibles :

$$\frac{\partial X_k}{\partial u} = h\beta_k, \qquad \frac{\partial X_k}{\partial v} = l\gamma_k. \tag{31}$$

Nous déterminerons ensuite des réseaux R′ $(Y_1, \ldots, Y_5)$ et R″ $(Z_1, Z_2, Z_3, \ldots, Z_6)$ par les quadratures :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Y_k}{\partial u} = h\xi_k, & \dfrac{\partial Z_k}{\partial u} = h\xi''_k, \\ \dfrac{\partial Y_k}{\partial v} = l\eta_k, & \dfrac{\partial Z_k}{\partial v} = h\eta''_k. \end{cases} \tag{32}$$

On aura :

$$Y_1 = PX_1, \qquad Y_2 = QX_2.$$

Les réseaux R et R′ possèdent la propriété indiquée au paragraphe (3).

On aura ensuite :

$$Z_1 = \sqrt{P^2\cos^2\omega + \sin^2\omega}\, X_1, \quad Z_2 = \sqrt{Q^2\cos^2\omega + \sin^2\omega}\, X_2; \quad Z_3 = \sin\omega X_3,$$

$$Z_4 = \cos\omega Y_3, \qquad Z_5 = \cos\omega Y_4, \qquad Z_6 = \cos\omega Y_6.$$

IMPRIMERIE NATIONALE.

Les réseaux R et R″ possèdent la propriété indiquée au paragraphe 8.

Si en particulier on suppose :

$$h = a, \qquad l = b,$$

on aura :

$$X_1 = \alpha_1, \qquad X_2 = \alpha_2, \qquad X_3 = \alpha_3,$$

et

$$Y_1 = P\alpha_1, \qquad Y_2 = Q\alpha_2.$$

Il en résulte que le réseau Y_3, Y_4, Y_5 est applicable sur le réseau dont les coordonnées sont :

$$X'_1 = \alpha_1\sqrt{1 - P^2}, \qquad X'_2 = \alpha_2\sqrt{1 - Q^2}, \qquad X'_3 = \alpha_3.$$

Le réseau Y_3, Y_4, Y_5 est donc applicable sur la quadrique.

16. Remarque. — Si l'on connaît le réseau conjugué commun à la quadrique et à une de ses déformées, on a tout de suite le déterminant δ, puisque α_1, α_2, α_3 se déduisent des coordonnées de la quadrique par une homographie; dans le déterminant Δ on connaît les deux dernières lignes; pour achever de le déterminer, il faut résoudre une équation de Riccati. Dans le déterminant Δ'' on connaît aussi les deux dernières lignes; il reste à trouver les quatre premières. On y arrive par la résolution de systèmes complets dont la solution comporte deux constantes arbitraires; c'est une opération analogue à la résolution d'une équation de Riccati, mais plus complexe. Nous dirons que c'est une opération d'ordre 2.

Si le déterminant Δ est connu, on a deux colonnes du déterminant Δ'; la détermination de Δ' est aussi une opération d'ordre 2. Il y a d'ailleurs une corrélation entre la détermination des Δ' et celle des Δ'', mais je n'insiste pas sur ce point.

CHAPITRE III.

TRANSFORMATIONS D'UN DÉTERMINANT O.

17. Le but de ce chapitre est d'indiquer des transformations qui transforment un déterminant O en un autre de même ordre. Ces diverses transformations nous seront utiles pour étudier les transformations que comporte le problème de la déformation des quadriques. Nous raisonnerons sur un déterminant du 5e ordre :

$$(1)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} x_1, \ldots, x_5 \\ y_1, \ldots, y_5 \\ z_1, \ldots, z_5 \\ \xi_1, \ldots, \xi_5 \\ \eta_1, \ldots, \eta_5 \end{vmatrix}$$

ayant pour rotations :

$$\begin{matrix} A, & E, & G, & m, \\ B, & F, & K, & n. \end{matrix}$$

Soit M $(X_1, \ldots, X_5)$ un réseau O qui correspond à ce déterminant; on aura :

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial X_k}{\partial u} = h\xi_k, & \dfrac{\partial X_k}{\partial v} = l y_k, \\ \dfrac{\partial h}{\partial v} = lm, & \dfrac{\partial l}{\partial u} = hn. \end{cases}$$

Posons :

$$(3)\qquad X_k = p_1 x_k + p_2 y_k + p_3 z_k + q\xi_k + r\eta_k.$$

Différentions la formule (3) par rapport à u et par rapport à v et identifions les résultats obtenus avec les formules (2). On aura :

$$\frac{\partial q}{\partial v} = nr, \qquad \frac{\partial r}{\partial u} = mq, \tag{4}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p_1}{\partial u} = \mathrm{A}q, & \dfrac{\partial p_2}{\partial u} = \mathrm{E}q, & \dfrac{\partial p_3}{\partial u} = \mathrm{G}q, \\ \dfrac{\partial p_1}{\partial v} = \mathrm{B}r, & \dfrac{\partial p_2}{\partial v} = \mathrm{F}r, & \dfrac{\partial p_3}{\partial v} = \mathrm{K}r. \end{cases} \tag{5}$$

Les quadratures (5) sont compatibles, en vertu des équations (4). On aura ensuite :

$$\begin{cases} h = \mathrm{A}p_1 + \mathrm{E}p_2 + \mathrm{G}p_3 + \dfrac{\partial q}{\partial u} + mr, \\ l = \mathrm{B}p_1 + \mathrm{F}p_2 + \mathrm{K}p_3 + \dfrac{\partial r}{\partial v} + nq, \\ \Sigma (\mathrm{X}_k)^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + q^2 + r^2. \end{cases} \tag{6}$$

18. *Transformations par inversion.* — Posons :

$$2\theta = \Sigma (\mathrm{X}_k)^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + q^2 + r^2. \tag{7}$$

On aura :

$$\frac{\partial \theta}{\partial u} = hq, \qquad \frac{\partial \theta}{\partial v} = lr. \tag{8}$$

Cela posé, le point M_1 qui a pour coordonnées $\frac{\mathrm{X}_1}{\theta}, \ldots, \frac{\mathrm{X}_5}{\theta}$, décrit le réseau inverse du réseau M. Chaque élément du réseau M_1 sera

désigné par la même lettre que l'élément correspondant de M; seulement on mettra entre crochets la lettre qui représente l'élément de M_1. On aura donc déjà :

$$[X_k]=\frac{X_k}{\theta}, \tag{9}$$

d'où l'on déduit, en tenant compte de l'équation (7) :

$$\Sigma(d[X_k])^2=\frac{\Sigma dX_k^2}{\theta^2},$$

et par conséquent :

$$[h]=\frac{h}{\theta}, \qquad [l]=\frac{l}{\theta}. \tag{10}$$

En différentiant l'équation (9) par rapport à u, on trouve :

$$\frac{\partial[X_k]}{\partial u}=\frac{h}{\theta}\xi_k-\frac{X_k}{\theta^2}hq=\frac{h}{\theta}\left[\xi_k-\frac{q}{\theta}X_k\right].$$

La nouvelle valeur de ξ_k est donc $\xi_k-\frac{q}{\theta}X_k$. On trouve de même les valeurs des autres éléments du déterminant O qui correspond à M_1. On aura :

$$\left\{\begin{aligned}
[x_k]&=x_k-\frac{p_1}{\theta}X_k,\\
[y_k]&=y_k-\frac{p_2}{\theta}X_k,\\
[z_k]&=z_k-\frac{p_3}{\theta}X_k,\\
[\xi_k]&=\xi_k-\frac{q}{\theta}X_k,\\
[\eta_k]&=\eta_k-\frac{r}{\theta}X_k.
\end{aligned}\right. \tag{11}$$

On en déduit facilement les nouvelles valeurs des rotations :

$$(12)\quad \begin{cases} [A]=A-\frac{h}{\theta}p_1, & [E]=E-\frac{h}{\theta}p_2, & [G]=G-\frac{h}{\theta}p_3, & [m]=m-\frac{h}{\theta}r, \\ [B]=B-\frac{l}{\theta}p_1, & [F]=F-\frac{l}{\theta}p_2, & [K]=K-\frac{l}{\theta}p_3, & [n]=n-\frac{l}{\theta}q. \end{cases}$$

19. *Généralisation.* — On peut généraliser la nation d'inversion. Posons en effet :

$$(13)\qquad X_6+iX_7=-\sum_1^5 X_k^2, \qquad X_6-iX_7=1,$$

de sorte que l'on a :

$$\sum_1^7 X_k^2=0, \qquad \sum_1^7 dX_k^2=h^2du^2+l^2dv^2.$$

Soit θ une combinaison linéaire isotrope des coordonnées X_1, $X_2,\ldots,X_7$. Le point dont les coordonnées sont $\frac{X_1}{\theta},\ldots,\frac{X_7}{\theta}$ décrit un réseau O; il y aura une combinaison linéaire isotrope des coordonnées du nouveau réseau qui se réduit à l'unité; on pourra donc supprimer deux de ces coordonnées; on aura donc encore un réseau O dans l'espace à cinq. Je vais former le déterminant orthogonal qui correspond à ce réseau.

On aura d'abord :

$$(14)\qquad \frac{\partial\theta}{\partial u}=hQ, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial v}=lR,$$

Q et R satisfaisant aux équations (4); on déterminera P_1, P_2, P_3 par les quadratures :

$$(15)\quad \begin{cases} \frac{\partial P_1}{\partial u}=AQ, & \frac{\partial P_2}{\partial u}=EQ, & \frac{\partial P_3}{\partial u}=GQ, \\ \frac{\partial P_1}{\partial v}=BR, & \frac{\partial P_2}{\partial v}=FR, & \frac{\partial P_3}{\partial v}=KR. \end{cases}$$

On posera ensuite :

$$(16)\quad \begin{cases} x_6 - ix_7 = 0, & x_6 + ix_7 = -2\sum_1^5 x_k X_k = -2p_1, \\ y_6 - iy_7 = 0, & y_6 + iy_7 = -2\sum_1^5 y_k X_k = -2p_2, \\ z_6 - iz_7 = 0, & z_6 + iz_7 = -2\sum_1^5 z_k X_k = -2p_3, \\ \xi_6 - i\xi_7 = 0, & \xi_6 + i\xi_7 = -2\sum_1^5 \xi_k X_k = -2q, \\ \eta_6 - i\eta_7 = 0, & \eta_6 + i\eta_7 = -2\sum_1^5 \eta_k X_k = -2r. \end{cases}$$

On voit facilement que l'on a :

$$(17)\quad \begin{cases} \sum_1^7 X_k x_k = 0, \quad \sum_1^7 X_k y_k = 0, \quad \sum_1^7 X_k z_k = 0, \quad \sum_1^7 X_k \xi_k = 0, \quad \sum_1^7 X_k \eta_k = 0; \\ \sum_1^7 X_k^2 = 0, \quad \sum_1^7 x_k^2 = 1, \quad \sum_1^7 y_k^2 = 1, \quad \sum_1^7 z_k^2 = 1, \quad \sum_1^7 \xi_k^2 = 1, \quad \sum_1^7 \eta_k^2 = 1; \\ \sum_1^7 x_k y_k = 0, \quad \sum_1^7 x_k z_k = 0, \quad \sum_1^7 x_k \xi_k = 0, \quad \sum_1^7 x_k \eta_k = 0, \\ \sum_1^7 y_k z_k = 0, \quad \sum_1^7 y_k \xi_k = 0, \quad \sum_1^7 y_k \eta_k = 0, \\ \sum_1^7 z_k \xi_k = 0, \quad \sum_1^7 z_k y_k = 0, \quad \sum_1^7 \xi_k \eta_k = 0, \end{cases}$$

Les nouvelles coordonnées du réseau sont :

$$[X_k] = \frac{X_k}{\theta}.$$

On a aussi :

$$[h] = \frac{h}{\theta}, \qquad [l] = \frac{l}{\theta}.$$

On en déduit comme précédemment :

$$(18)\qquad \begin{cases} [x_k] = x_k - \dfrac{P_1}{\theta} X_k, \\ [y_k] = y_k - \dfrac{P_2}{\theta} X_k, \\ [z_k] = z_k - \dfrac{P_3}{\theta} X_k, \qquad K = 1, 2, \ldots, 7. \\ [\xi_k] = \xi_k - \dfrac{Q}{\theta} X_k, \\ [\eta_k] = \eta_k - \dfrac{R}{\theta} X_k. \end{cases}$$

Entre les éléments de chaque ligne du nouveau déterminant, il y a une relation linéaire isotrope qui permet de supprimer deux colonnes. Ainsi si

$$\theta = X_1 + iX_2,$$

on aura :

$$Q = \xi_1 + i\xi_2, \qquad R = \eta + i\eta_2, \qquad P_1 = x_1 + ix_2,$$

On vérifie tout de suite que

$$[x_1] + i[x_2] = 0, \qquad [y_1] + i[y_2] = 0, \qquad \text{etc.}$$

20. *Deuxième transformation.* — Considérons une combinaison isotrope de x, y, z, par exemple la combinaison $x + iy$; les cinq fonctions $x_k + iy_k$ sont solutions de l'équation :

$$(19)\qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = \frac{\dfrac{\partial}{\partial v}(A + iE)}{A + iE} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{\dfrac{\partial}{\partial u}(B + iF)}{B + iF} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial v}.$$

Soit θ une solution quelconque de cette équation; le point N qui a pour coordonnées $\frac{x_k+iy_k}{\theta}$ décrit un réseau O dont la somme des carrés des coordonnées est nulle. Nous allons former le déterminant O qui correspond à ce réseau. Posons :

$$(20)\qquad \frac{\partial\theta}{\partial u}=(\mathrm{A}+i\mathrm{E})q, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial v}=(\mathrm{B}+i\mathrm{F})r.$$

θ étant une solution de l'équation (19), q et r sont solutions des équations (4). On aura d'abord :

$$(21)\qquad \begin{cases} |x_k+iy_k|=\dfrac{x_k+iy_k}{\theta}, \\ |\mathrm{A}+i\mathrm{E}|=\dfrac{\mathrm{A}+i\mathrm{E}}{\theta}, \qquad |\mathrm{B}+i\mathrm{F}|=\dfrac{\mathrm{B}+i\mathrm{F}}{\theta}. \end{cases}$$

D'où l'on déduit, en différentiant la première des équations (21) :

$$\frac{\partial}{\partial u}|x_k+iy_k|=\frac{(\mathrm{A}+i\mathrm{E})\xi_k}{\theta}-\frac{x_k+iy_k}{\theta^2}(\mathrm{A}+i\mathrm{E})q.$$

On voit donc que l'on aura :

$$(22)\qquad \begin{cases} |\xi_k|=\xi_k-\dfrac{q}{\theta}(x_k+iy_k), \\ |\eta_k|=\eta_k-\dfrac{r}{\theta}(x_k+iy_k). \end{cases}$$

Pour déterminer les éléments de la troisième ligne, je pose :

$$(23)\qquad \frac{\partial p_3}{\partial u}=\mathrm{G}q, \qquad \frac{\partial p_3}{\partial v}=\mathrm{K}r;$$

IMPRIMERIE NATIONALE.

on aura alors :

$$(24) \qquad |z_k| = z_k - \frac{p_3}{\theta}(x_k + iy_k).$$

Il reste à déterminer les quantités $|x_k - iy_k|$. On peut toujours supposer que ces quantités ont la forme suivante :

$$(25) \quad |x_k - iy_k| = \alpha(x_k + iy_k) + \beta(x_k - iy_k) + \gamma z_k + \lambda\xi_k + \mu\eta_k.$$

Pour déterminer les fonctions α, β, γ, λ, μ je m'appuie sur les identités :

$$\sum |x_k - iy_k|^2 = 0, \qquad \sum |x_k - iy_k| \times |x_k + iy_k| = 2,$$
$$\sum |x_k - iy_k|\,|z_k| = 0, \qquad \sum |x_k - iy_k|\,|\xi_k| = 0, \qquad \sum |x_k - iy_k|\,|y_k| = 0.$$

On trouve alors :

$$\beta = \theta, \qquad \gamma = 2p_3, \qquad \lambda = 2q, \qquad \mu = 2r,$$
$$\alpha = -\frac{p_3^2 + q^2 + r^2}{\theta}.$$

On a donc :

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} |x_k - iy_k| = -\dfrac{p_3^2 + q^2 + r^2}{\theta}(x_k + iy_k) + \theta(x_k - iy_k) \\ \qquad\qquad + 2p_3 z_k + 2q\xi_k + 2r\eta_k. \end{array} \right.$$

21. *Troisième transformation.* — Formons une combinaison linéaire isotrope de x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, par exemple la combinaison $x_1 + ix_2$; prenons les combinaisons analogues formées avec

les y et les z; nous obtenons ainsi les trois quantités x_1+ix_2, y_1+iy_2, z_1+iz_2; ces trois quantités sont solutions de l'équation :

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}=\frac{\frac{\partial}{\partial v}(\xi_1+i\xi_2)}{\xi_1+i\xi_2}\frac{\partial\theta}{\partial u}+\frac{\frac{\partial}{\partial u}(\eta_1+i\eta_2)}{\eta_1+i\eta_2}\frac{\partial\theta}{\partial v}. \tag{27}$$

Soit θ une solution quelconque de cette équation; les quantités $\frac{x_1+ix_2}{\theta}$, $\frac{y_1+iy_2}{\theta}$, $\frac{z_1+iz_2}{\theta}$ sont solutions d'une équation de la forme (27), dans laquelle il faudrait remplacer $\xi_1+i\xi_2$ par $\frac{\xi_1+i\xi_2}{\theta}$ et $\eta_1+i\eta_2$ par $\frac{\eta_1+i\eta_2}{\theta}$. Il en résulte que les cinq quantités :

$$\frac{x_1+ix_2}{\theta},\qquad \frac{y_1+iy_2}{\theta},\qquad \frac{z_1+iz_2}{\theta},\qquad \frac{\xi_1+i\xi_2}{\theta},\qquad \frac{\eta_1+i\eta_2}{\theta}$$

forment une combinaison isotrope des colonnes d'un déterminant O. Nous allons former ce déterminant.

Tout d'abord si l'on pose :

$$\frac{\partial\theta}{\partial u}=h(\xi_1+i\xi_2),\qquad \frac{\partial\theta}{\partial v}=l(\eta_1+i\eta_2), \tag{28}$$

on aura, puisque θ satisfait à l'équation (27) :

$$\frac{\partial h}{\partial v}=lm,\qquad \frac{\partial l}{\partial u}=hn. \tag{29}$$

Cela posé on aura d'abord :

$$\left\{\begin{array}{l} |x_1+ix_2|=\frac{x_1+ix_2}{\theta},\quad |y_1+iy_2|=\frac{y_1+iy_2}{\theta},\quad |z_1+iz_2|=\frac{z_1+iz_2}{\theta},\\ |\xi_1+i\xi_2|=\frac{\xi_1+i\xi_2}{\theta},\qquad |\eta_1+i\eta_2|=\frac{\eta_1+i\eta_2}{\theta}. \end{array}\right. \tag{30}$$

On en déduit les valeurs suivantes des rotations :

$$(31)\quad \begin{cases} |\mathrm{A}| = \mathrm{A} - \dfrac{h}{\theta}(x_1 + ix_2), & |\mathrm{B}| = \mathrm{B} - \dfrac{l}{\theta}(x_1 + ix_2), \\ |\mathrm{E}| = \mathrm{E} - \dfrac{h}{\theta}(y_1 + iy_2), & |\mathrm{F}| = \mathrm{F} - \dfrac{l}{\theta}(y_1 + iy_2), \\ |\mathrm{G}| = \mathrm{G} - \dfrac{h}{\theta}(z_1 + iz_2), & |\mathrm{K}| = \mathrm{K} - \dfrac{l}{\theta}(z_1 + iz_2), \\ |m| = m - \dfrac{h}{\theta}(\eta_1 + i\eta_2), & |n| = n - \dfrac{l}{\theta}(\xi_1 + i\xi_2). \end{cases}$$

Pour déterminer la colonne de rang k $(\mathrm{K} > 2)$ je détermine X par les quadratures :

$$(32)\qquad \frac{\partial \mathrm{X}_k}{\partial u} = h\xi_k, \qquad \frac{\partial \mathrm{X}_k}{\partial v} = l\eta_k.$$

On aura alors :

$$(33)\quad \begin{cases} |x_k| = x_k - \dfrac{x_1 + ix_2}{\theta}\mathrm{X}_k, & |\xi_k| = \xi_k - \dfrac{\xi_1 + i\xi_2}{\theta}\mathrm{X}_k, \\ |y_k| = y_k - \dfrac{y_1 + iy_2}{\theta}\mathrm{X}_k, & |\eta_k| = \eta_k - \dfrac{\eta_1 + i\eta_2}{\theta}\mathrm{X}_k. \\ |z_k| = z_k - \dfrac{z_1 + iz_2}{\theta}\mathrm{X}_k, & \end{cases}$$

Il reste à déterminer les éléments $|x_1 - ix_2|$, $|y_1 - iy_2|$, $|z_1 - iz_2|$, $|\xi_1 - i\xi_2|$, $|\eta_1 - i\eta_2|$. On peut poser :

$$(34)\quad \begin{cases} |x_1 - ix_2| = \alpha(x_1 + ix_2) + \beta(x_1 - ix_2) + \gamma x_3 + \delta x_4 + \varepsilon x_5, \\ |y_1 - iy_2| = \alpha(y_1 + iy_2) + \beta(y_1 - iy_2) + \gamma y_3 + \delta y_4 + \varepsilon y_5, \\ |z_1 - iz_2| = \alpha(z_1 + iz_2) + \beta(z_1 - iz_2) + \gamma z_3 + \delta z_4 + \varepsilon z_5, \\ |\xi_1 - i\xi_2| = \alpha(\xi_1 + i\xi_2) + \beta(\xi_1 - i\xi_2) + \gamma\xi_3 + \delta\xi_4 + \varepsilon\xi_5, \\ |\eta_1 - i\eta_2| = \alpha(\eta_1 + i\eta_2) + \beta(\eta_1 - i\eta_2) + \gamma\eta_3 + \delta\eta_4 + \varepsilon\eta_5. \end{cases}$$

En se servant d'identités analogues à celles employées dans le paragraphe précédent, on trouve :

$$(35)\qquad \begin{cases} \beta = \theta, \qquad \gamma = 2X_3, \qquad \delta = 2X_4, \qquad \varepsilon = 2X_5. \\ \alpha = -\dfrac{X_3^2 + X_4^2 + X_5^2}{\theta}. \end{cases}$$

CHAPITRE IV.

ÉTUDE ANALYTIQUE DES TRANSFORMATIONS DU PROBLÈME DE LA DÉFORMATION DES QUADRIQUES.

22. Formons d'abord des réseaux qui correspondent aux déterminants δ, Δ, Δ' [chap. II] en prenant les mêmes valeurs pour q et r (§ 17). On aura d'abord :

$$\frac{\partial q}{\partial v} = nr, \qquad \frac{\partial r}{\partial u} = mq. \tag{1}$$

On déterminera ensuite p, p_1, p_2, p_3 par les équations :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial u} = aq, & \dfrac{\partial p_1}{\partial u} = \mathrm{A}q, & \dfrac{\partial p_2}{\partial u} = \mathrm{E}q, & \dfrac{\partial p_3}{\partial u} = \mathrm{G}q, \\ \dfrac{\partial p}{\partial v} = br, & \dfrac{\partial p_1}{\partial v} = \mathrm{B}r, & \dfrac{\partial p_2}{\partial v} = \mathrm{F}r, & \dfrac{\partial p_3}{\partial v} = \mathrm{K}r. \end{cases} \tag{2}$$

On aura alors (17) pour le réseau $\mathrm{M}(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3)$ qui correspond à δ :

$$\mathrm{X}_k = p\alpha_k + q\beta_k + r\gamma_k. \tag{3}$$

Les valeurs h_1, l_1 de h et l sont :

$$\begin{cases} h_1 = ap + \dfrac{\partial q}{\partial u} + rm, \\ l_1 = bp + \dfrac{\partial r}{\partial v} + nq. \end{cases} \tag{4}$$

et l'on a :

$$2\rho_1 = \sum X_k^2 = p^2 + q^2 + r^2. \tag{5}$$

Pour le réseau $N(Y_1, \ldots, Y_5)$ qui correspond à Δ, on a :

$$Y_k = p_1 x_k + p_2 y_k + p_3 z_k + q\xi_k + r\eta_k. \tag{6}$$

Les valeurs h_2, l_2 de h et l sont :

$$\begin{cases} h_2 = Ap_1 + Ep_2 + Gp_3 + \dfrac{dq}{\partial v} + mr, \\ l_2 = Bp_1 + Fp_2 + Kp_3 + \dfrac{dr}{\partial v} + nq, \end{cases} \tag{7}$$

et l'on a :

$$2\rho_2 = \sum Y_k^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + q^2 + r^2. \tag{8}$$

Enfin pour le réseau $N'(Z_1, \ldots, Z_6)$ qui correspond à Δ', on a :

$$Z_k = \cos\theta\,[p_1 x'_k + p_2 y'_k + p_3 z'_k] + \sin\theta\,.\,pt'_k + q\xi'_k + r\eta'_k. \tag{9}$$

On a pour h et l les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} h = \cos^2\theta\,(Ap_1 + Ep_2 + Gp_3) + \sin^2\theta\cdot ap + \dfrac{\partial q}{\partial u} + mr \\ \quad = h_1 \sin^2\theta + h_2 \cos^2\theta, \\ l = \cos^2\theta\,(Bp_1 + Fp_2 + Kp_3) + h^2\theta\cdot bp + \dfrac{\partial r}{\partial v} + nq \\ \quad = l_1 \sin^2\theta + l_2 \cos^2\theta, \end{cases} \tag{10}$$

et

$$2\rho = \sum Z_k^2 = \cos^2\theta\,(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \sin^2\theta\cdot p^2 + q^2 + r^2.$$

On a donc :

$$\rho = \rho_1 \sin^2\theta + \rho_2 \cos^2\theta. \tag{11}$$

Des formules (3), (6), (9) on déduit facilement, en tenant compte des formules du paragraphe 12 :

$$\begin{cases} Z_1 = \cos\theta \cos\varphi\, Y_1 + \sin\theta \sin\varphi\, X_1, \\ Z_2 = \cos\theta \cos\psi\, Y_2 + \sin\theta \sin\psi\, X_2. \end{cases} \tag{12}$$

23. *Première transformation.* — Choisissons une combinaison linéaire isotrope des quantités x, y, z du déterminant Δ [chap. II]; pour fixer les idées, je prends la combinaison $x+iy$. Je détermine un réseau O (Y_1, Y_2, Y_3) par les quadratures :

$$\frac{\partial Y_k}{\partial u} = (A + iE)\beta_k, \qquad \frac{\partial Y_k}{\partial v} = (B + iF)\gamma_k; \tag{13}$$

je fixe la constante d'intégration, pour Y_1 et Y_2, en prenant :

$$Y_1 = \frac{1}{P}(x_1 + iy_1), \qquad Y_2 = \frac{1}{Q}(x_2 + iy_2). \tag{14}$$

Je pose ensuite :

$$Y_4 + iY_5 = -\sum_1^3 Y_k^2, \qquad Y_4 - iY_5 = 1. \tag{15}$$

Soit θ une combinaison linéaire isotrope de Y_3, Y_4, Y_5; j'effectuerai sur le déterminant δ la transformation du paragraphe 19 et sur Δ et Δ' la transformation du paragraphe 20.

Pour cela, je pose :

$$\frac{\partial\theta}{\partial u} = (A + iE)q, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial v} = (B + iF)r. \tag{16}$$

On aura, en particulier :

$$|\beta_1| = \beta_1 - \frac{q}{\theta} Y_1, \tag{17}$$

car dans les formules (18) [chap. III], il faut remplacer Q par q et X par Y.

On aura ensuite formules (22), § 20 :

$$|\xi_1| = \xi_1 - \frac{q}{\theta}(x_1 + iy_1). \tag{18}$$

En comparant (17) et (18), on trouve :

$$|\xi_1| = P|\beta_1|;$$

on voit de même que

$$|\xi_2| = Q|\beta_2|.$$

Les transformées de δ et Δ possèdent donc la propriété fondamentale des déterminants primitifs. On a donc une transformation du problème. Cette transformation introduit deux constantes arbitraires, une pour le choix de la combinaison isotrope de x, y, z, une autre pour le choix de la combinaison isotrope de Y_3, Y_4, Y_5.

On voit qu'on pourra, si l'on connaît δ et Δ, poursuivre indéfiniment l'opération en effectuant seulement des quadratures.

On voit aussi que si l'on connaît un déterminant Δ' du système primitif, on en déduira un déterminant analogue du système transformé.

24. Remarque. — Posons :

$$X_k = x_k + iy_k. \tag{19}$$

IMPRIMERIE NATIONALE.

Entre les quantités X et Y existent les relations :

$$(20)\qquad \begin{cases} \sum X_k^2 = \sum Y_k^2 = 0, \qquad \sum dX_k^2 = \sum dY_k^2, \\ X_1 = PY_1, \qquad\qquad X_2 = QY_2. \end{cases}$$

On peut donc permuter les X et les Y à la condition de remplacer P et Q respectivement par $\frac{1}{P}$ et $\frac{1}{Q}$. Cela posé, nous prenons pour θ une combinaison linéaire isotrope de X_3, X_4, X_5; les deux points $A\left(\frac{X_1}{\theta}, \frac{X_2}{\theta}, \ldots, \frac{X_5}{\theta}\right)$ et $B\left(\frac{Y_1}{\theta}, \ldots, \frac{Y_5}{\theta}\right)$ décrivent des réseaux applicables; on peut supprimer deux des coordonnées de A; on a donc un réseau O, (A) situé dans l'espace à trois applicable sur un réseau O, (B) de l'espace à cinq; deux des coordonnées de B sont liées à deux des coordonnées de A par les relations :

$$\frac{Y_1}{\theta} = \frac{1}{P}\frac{X_1}{\theta}, \qquad \frac{Y_2}{\theta} = \frac{1}{Q}\frac{X_2}{\theta}.$$

On a donc encore des réseaux qui correspondent à la déformation d'une quadrique; cette quadrique se déduit de la quadrique donnée en changeant respectivement P et Q en $\frac{1}{P}$ et $\frac{1}{Q}$. C'est sous une autre forme le résultat établi paragraphe 5, résultat dû à M. Servant.

Je vais montrer qu'on peut former les déterminants δ et Δ correspondant aux réseaux A et B. Pour le réseau A c'est évident; puisque l'on connaît les trois coordonnées du réseau, on en déduit tout de suite les neuf cosinus de la représentation sphérique.

Pour le réseau (B), les quantités $\frac{Y_k}{\theta}$ forment une combinaison isotrope des deux premières lignes de Δ; on obtient les lignes de rang 3, 4, 5 en appliquant les formules du paragraphe 19. Ici il n'y a plus de réduction, puisque θ n'est plus une combinaison

isotrope des coordonnées $Y_1, Y_2, \ldots, Y_5$. On a donc tous les éléments nécessaires pour déterminer les termes de Δ.

On peut aussi déterminer les déterminants Δ' qui correspondent au nouveau système. Il suffit d'appliquer la transformation du numéro 20. On peut donc énoncer le résultat suivant :

Si l'on connaît les déterminants δ et Δ qui correspondent à une déformée de la quadrique :

$$(1+p^2)x_1^2+(1+q^2)x_2^2+x_3^2=1,$$

on peut de ∞^1 manières trouver à l'aide de quadratures les systèmes analogues pour la quadrique :

$$-p^2x_1^2-q^2x_2^2+x_3^2=1.$$

25. *Deuxième transformation.* — Pour effectuer cette transformation, on forme les réseaux (M), (N), (N') du paragraphe 22 en prenant pour q une combinaison isotrope des éléments ξ_3, ξ_4, ξ_5 du déterminant Δ et pour r la même combinaison isotrope de η_3, η_4, η_5. On transforme les réseaux (M) et (N') par inversion et on applique au déterminant Δ la transformation du paragraphe 21. Nous allons montrer que les nouveaux déterminants O obtenus possèdent la même propriété que les anciens. Nous ferons le calcul en supposant :

$$(21) \qquad q=\xi_4+i\xi_5, \qquad r=\eta_4+i\eta_5.$$

On aura alors :

$$(22) \qquad p_1=x_4+ix_5, \qquad p_2=y_4+iy_5, \qquad p_3=z_4+iz_5.$$

On déterminera p par les quadratures :

$$(23)\qquad \frac{\partial p}{\partial u}=a(\xi_4+i\xi_5),\qquad \frac{\partial p}{\partial v}=b(\eta_4+i\eta_5).$$

En faisant la transformation par inversion, on aura [formule 11, § 18] :

$$(24)\qquad |\beta_1|=\beta_1-\frac{q}{\rho_1}X_1.$$

D'autre part, des formules (2), (4), (5) du paragraphe 22, on déduit :

$$(25)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\rho_1}{\partial u}-h_1 q=h_1(\xi_4+i\xi_5),\\ \dfrac{\partial\rho_1}{\partial v}=l_1 r=l_1(\eta_4+i\eta_5). \end{cases}$$

Il en résulte que ρ_1 est solution de l'équation :

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial v}=\frac{\dfrac{\partial}{\partial v}(\xi_4+i\xi_5)}{\xi_4+i\xi_5}\frac{\partial\rho_1}{\partial u}+\frac{\dfrac{\partial}{\partial u}(\eta_4+i\eta_5)}{\eta_4+i\eta_5}\frac{\partial\rho_1}{\partial v}.$$

On pourra donc appliquer la transformation du paragraphe 21 au déterminant Δ en prenant $\theta=\rho_1$; les fonctions désignées par h et l dans ce paragraphe ont pour valeur h_1 et l_1; enfin, la fonction désignée par X_1 dans ce paragraphe, que je désigne ici par X_1' pour éviter toute confusion, est donnée par les équations :

$$(26)\qquad \frac{\partial X_1'}{\partial u}=h_1\xi_1,\qquad \frac{\partial X_1'}{\partial v}=l_1\eta_1.$$

Comme

$$\xi_1=P\beta_1,\qquad \eta_1=P\gamma_1,$$

on peut, en choisissant convenablement la constante d'intégration, prendre :

$$X_1' = PX_1, \tag{27}$$

X_1 étant la quantité qui figure dans la formule (24).

On aura alors [formule 33, § 21] :

$$|\xi_1| = \xi_1 - \frac{\xi_4 + i\xi_5}{\rho_1} X_1'. \tag{28}$$

En comparant les formules (24) et (28), on a bien :

$$|\xi_1| = P|\beta_1|;$$

on trouverait de même :

$$|\xi_2| = Q|\beta_2|.$$

On voit que les nouveaux déterminants δ et Δ possèdent la même propriété que les anciens. On vérifie facilement qu'il en est de même des déterminants Δ'.

On voit que l'on obtient ainsi une transformation dépendant aussi de deux constantes arbitraires, savoir une qui intervient dans le choix de la combinaison isotrope de ξ_3, ξ_4, ξ_5 qui donne q et une autre qui provient des quadratures définies par les équations (23).

26. *Troisième transformation.* — Pour effectuer cette transformation, on forme les réseaux (M), (N), (N') du paragraphe 22 en prenant pour q une combinaison isotrope des quantités $\xi_3', \xi_4', \xi_5', \xi_6'$ des éléments d'un déterminant Δ'; nous supposerons que le déterminant Δ' ainsi choisi correspond à la valeur $\theta = \omega$; il faudra alors

prendre pour r la même combinaison isotrope de η'_3, η'_4, η'_5, η'_6. On transformera par inversion les réseaux (M), (N) et tous les réseaux (N′) qui correspondent à $\theta \neq \omega$; enfin, on applique au déterminant Δ' qui correspond à $\theta = \omega$ la transformation du paragraphe 21. On obtiendra un système de déterminants orthogonaux analogue au système primitif. Nous ferons la vérification pour les déterminants δ et Δ en supposant que l'on prenne :

$$(29) \qquad q = \xi'_5 + i\xi'_6, \qquad r = \eta'_5 + i\eta'_6.$$

On en déduit :

$$(30) \quad \begin{cases} p_1 = \frac{1}{\cos\omega}(x'_5 + ix'_6), \quad p_2 = \frac{1}{\cos\omega}(y'_5 + iy'_6), \quad p_3 = \frac{1}{\cos\omega}(z'_5 + iz'_6), \\ p = \frac{1}{\sin\omega}(t'_5 + it'_6). \end{cases}$$

Les quantités ρ, Z_1, Z_2 calculées pour le déterminant Δ' qui correspond à $\theta = \omega$ sont nulles; on a alors :

$$(31) \quad \begin{cases} \rho_1 \sin^2\omega + \rho_2 \cos^2\omega = 0, \\ \sin\omega \sin\varphi X_1 + \cos\omega \cos\varphi Y_1 = 0, \\ \sin\omega \sin\psi X_2 + \cos\omega \cos\psi Y_2 = 0, \end{cases}$$

φ et ψ étant donnés par les formules (20) et (21) du chapitre II dans lesquelles on a remplacé θ par ω. On a donc :

$$(32) \quad \begin{cases} \rho_2 = -\rho_1 \frac{\sin^2\omega}{\cos^2\omega}, \\ Y_1 = -X_1 \frac{\sin\omega \sin\varphi}{\cos\omega \cos\varphi} = -X_1 P \frac{\sin^2\omega}{\cos^2\omega}. \end{cases}$$

Cela posé, on aura [formules 11, chap. III] :

$$|\beta_1| = \beta_1 - \frac{q}{\rho_1} X_1,$$

$$|\xi_1| = \xi_1 - \frac{q}{\rho_2} Y_1.$$

On a donc bien encore :

$$|\xi_1| = P|\beta_1|,$$

ce qui démontre la propriété énoncée.

CHAPITRE V.

PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES DES DÉFORMÉES D'UNE QUADRIQUE OBTENUES EN CONSIDÉRANT LES RÉSEAUX DE CETTE QUADRIQUE COMME DES RÉSEAUX 3O.

27. Soit M (x_1, x_2, x_3) un point qui décrit un réseau C de la quadrique; ce réseau est applicable sur un réseau N (y_1, y_2, y_3); nous savons (§ 1) que les réseaux M et N sont 3O, les coordonnées complémentaires étant :

$$z_1 = px_1, \qquad z_2 = qx_2. \tag{1}$$

Soit alors θ une solution de l'équation de Laplace à laquelle satisfont les coordonnées x et y; on pourra former des congruences (L) et (L′) harmoniques aux réseaux (N) et (M); les foyers de la congruence (L) ont pour coordonnées :

$$y_i - \frac{\theta}{\frac{\partial\theta}{\partial u}}\frac{\partial y_i}{\partial u} \qquad \text{et} \qquad y_i - \frac{\theta}{\frac{\partial\theta}{\partial v}}\frac{\partial y_i}{\partial v};$$

celles des foyers de L′ sont :

$$x_i - \frac{\theta}{\frac{\partial\theta}{\partial u}}\frac{\partial x_i}{\partial u} \qquad \text{et} \qquad x_i - \frac{\theta}{\frac{\partial\theta}{\partial v}}\frac{\partial x_i}{\partial v}.$$

Les réseaux M et N étant C, 3O, les congruences L et L′ sont, en général, 3O et 3C. Nous allons prendre des cas particuliers :

1° Faisons :

$$\theta = z_1 \pm iz_2 = px_1 \pm iqx_2. \tag{2}$$

Les droites L′ sont à l'intersection du plan tangent et des plans de sections circulaires $px_1 \pm iqx_2$ menés par l'axe x_3; les droites L, que j'appelle G_1 et G_2, sont les droites qui leur correspondent quand on fait rouler la quadrique sur sa déformée; θ étant une combinaison isotrope de z_1 et z_2, les congruences (G_1 et G_2) sont C; d'autre part, θ étant une combinaison linéaire de x_1 et x_2, ces congruences seront 2O; ainsi les congruences (G_1) et (G_2) sont C, 2O.

On sait que les réseaux O tracés sur ces congruences ont même représentation sphérique de leurs lignes de courbure qu'une surface isothermique. On obtient ainsi une propriété géométrique que j'ai établie en 1897 [*C. R.*, Sur la déformation des quadriques, 2ᵉ semestre]. Nous retrouverons ce résultat sous une forme plus précise [chap. VII, § 47].

2° Faisons :

$$\theta = x_1 + ix_2 = \frac{z_1}{p} + i\frac{z_2}{q}. \tag{3}$$

Les droites L′ sont à l'intersection du plan tangent avec les plans isotropes menés par l'axe x_3; les droites L sont celles qui leur correspondent sur la déformée; je désigne ces droites par H_1 et H_2; θ étant une combinaison isotrope de x_1 et x_2 et une combinaison linéaire de z_1 et z_2, les congruences (H_1) et (H_2) sont O, 2C. Il en résulte que le point d'intersection du plan tangent avec une droite isotrope du plan principal x_1, x_2 de la quadrique correspond sur la déformée à un point qui décrit un réseau O, 2C. Nous retrouverons ce résultat [chap. VII, § 47].

28. Les droites G_1, G_2, H_1, H_2 se coupent en un point R du plan tangent au réseau (N); ce point R correspond au point d'intersection de l'axe x_3 avec le plan tangent à la quadrique. Ce point R décrit un réseau conjugué aux congruences (G_1), (G_2), (H_1), (H_2); ce réseau est donc K, 2O [Systèmes orthogonaux et cycliques,

IMPRIMERIE NATIONALE.

chap. IV]; c'est un réseau K, 2O qui possède cette propriété particulière, savoir que les *deux congruences* O *qui lui sont conjuguées sont des congruences* 2C.

29. Il est facile de trouver les paramètres directeurs de G_1 et de G_2 en partant du déterminant Δ [chap. II]. En effet, dans le cas général [§ 27], les paramètres directeurs de la droite L sont :

$$\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial y_i}{\partial u}-\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial y_i}{\partial v}. \tag{4}$$

Ici y_1, y_2, y_3 sont les quantités désignées par Y_3, Y_4, Y_5 [§ 15]; on a donc :

$$\frac{\partial y_i}{\partial u}=a\xi_i, \qquad \frac{\partial y_i}{\partial v}=b\eta_i, \qquad i=3,4,5. \tag{5}$$

x_1 et x_2 ont pour valeurs :

$$\frac{\alpha_1}{\sqrt{1+p^2}}, \qquad \frac{\alpha_2}{\sqrt{1+q^2}};$$

donc la valeur de θ qui correspond à G_1 est :

$$\frac{p\alpha_1}{\sqrt{1+p^2}}+i\frac{q\alpha_2}{\sqrt{1+q^2}};$$

donc :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\theta}{\partial u}=a\left(\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}\beta_1+i\dfrac{q}{\sqrt{1+q^2}}\beta_2\right)=a(\xi_1+i\xi_2), \\ \dfrac{\partial\theta}{\partial v}=b\left(\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}\gamma_1+i\dfrac{q}{\sqrt{1+q^2}}\gamma_2\right)=b(\eta_1+i\eta_2). \end{cases} \tag{6}$$

En portant les valeurs données par les formules (5) et (6) dans les formules (4), on trouve que les paramètres de G_1 sont :

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} \xi_1+i\xi_2, & \xi_3 \\ \eta_1+i\eta_2, & \eta_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \xi_1+i\xi_2, & \xi_4 \\ \eta_1+i\eta_2, & \eta_4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \xi_1+i\xi_2, & \xi_5 \\ \eta_1+i\eta_2, & \eta_5 \end{vmatrix}.$$

On sait que toute congruence C admet une congruence conjuguée qui est aussi C. [Ces deux congruences correspondent par orthogonalité des éléments à deux réseaux C applicables.] D'après la théorie générale des congruences C conjuguées, la congruence G_1' qui est conjuguée à G a pour paramètres directeurs les quantités :

$$(8)\qquad x_1+ix_2, \qquad y_1+iy_2, \qquad z_1+iz_2$$

du déterminant Δ [chap. II]. Cette congruence G_1' possède des propriétés analogues à la congruence G_1; elle joue le même rôle que G_1, non par rapport à la quadrique donnée, mais par rapport à la quadrique :

$$-p^2x_1^2-q^2x_2^2+x_3^2=1,$$

qui s'en déduit par la méthode de M. Servant [§ 6]. Cette propriété sera établie [§ 37].

30. Prenons maintenant pour θ une combinaison isotrope de y_1, y_2, y_3 [§ 27], par exemple :

$$(9)\qquad \theta=y_2+iy_3+\lambda.$$

λ étant une constante, la droite L est à l'intersection du plan tangent au réseau (N) et d'un plan isotrope; la droite L', que j'appelle (Q), est la droite qui lui correspond sur la quadrique. Quand λ varie, cette droite Q se déplace parallèlement à elle-même.

La congruence (Q) est une congruence O. Cela posé, menons par la droite Q le second plan tangent à la quadrique; soit M′ son point de contact; la droite MM′, étant la polaire réciproque de Q, décrit une congruence rapportée à ses développables; d'après un théorème de Ribaucour, les développables de cette congruence découpent en M′ un réseau conjugué sur la quadrique. Ce réseau (M′), étant harmonique à la congruence (Q) qui est O, sera un réseau C. En partant de (M′), on pourra donc trouver une déformée de la quadrique. Quand λ varie, le point M′ se déplace sur une section centrale de la quadrique.

On a ainsi une transformation qui dépend de deux constantes arbitraires : l'une qui fixe la combinaison isotrope de y_1, y_2, y_3; l'autre la constante additive λ. [*C. R.*, Sur la déformation des quadriques, 1897.]

Nous allons étudier analytiquement cette transformation.

31. Pour suivre cette transformation, faisons la transformation homographique du paragraphe 1 :

$$(10) \qquad \alpha_1 = x_1\sqrt{1+p^2}, \quad \alpha_2 = x_2\sqrt{1+q^2}, \quad \alpha_3 = x_3.$$

Aux points M et M′ correspondent sur la sphère des points M_1 et M_1' et à la droite Q une droite Q_1. Les foyers de Q_1 ont pour coordonnées :

$$\alpha_i - \frac{\theta}{\frac{\partial\theta}{\partial u}}\frac{\partial\alpha_i}{\partial u} \quad \text{et} \quad \alpha_i - \frac{\theta}{\frac{\partial\theta}{\partial v}}\frac{\partial\alpha_i}{\partial v}.$$

Or on a :

$$\frac{\partial\alpha_i}{\partial u} = a\beta_i, \qquad \frac{\partial\alpha_i}{\partial v} = b\gamma_i,$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial u} = a(\xi_4 + i\xi_5), \qquad \frac{\partial\theta}{\partial v} = b(\eta_4 + i\eta_5).$$

Les foyers de Q_1 ont donc pour coordonnées :

$$(10\ bis) \qquad \alpha_i - \frac{\theta}{\xi_4 + i\xi_5}\beta_i \qquad \text{et} \qquad \alpha_i - \frac{\theta}{\eta_4 + i\eta_5}\gamma_i.$$

Or, si l'on se reporte à la transformation du n° 25, on trouve :

$$(11) \qquad |\alpha_i| = \alpha_i - \frac{p}{\rho_1}X_i, \quad |\beta_i| = \beta_i - \frac{q}{\rho_1}X_i, \quad |\gamma_i| = \gamma_i - \frac{r}{\rho_1}X_i.$$

On en déduit :

$$|\alpha_i| - \frac{p}{q}|\beta_i| = \alpha_i - \frac{p}{q}\beta_i.$$

Or les quantités désignées par p, q, r [§ 25] ont ici pour valeurs :

$$p = \theta, \qquad q = \xi_4 + i\xi_5, \qquad r = \eta_4 + i\eta_5.$$

Si donc on désigne par (N_1) le point de la sphère qui a pour coordonnées $|\alpha_i|$, on voit que les tangentes au réseau (N_1) vont passer par les foyers de (Q_1), ce qui montre que N_1 coïncide avec M_1'.

On voit que si l'on connaît les déterminants δ et Δ [chap. II], on peut continuer cette transformation à l'aide de quadratures.

32. Le réseau M de la quadrique étant C et 3O, la congruence Q sera aussi 3C; les deux coordonnées complémentaires qui la rendent 3C proviennent des coordonnées Z_1 et Z_2 qui rendent le réseau (M), 3O. Si donc X_1, X_2, X_3 sont les paramètres de Q, les paramètres complémentaires qui rendent cette congruence 3C sont pX_1 et qX_2.

Cette congruence Q appartient donc au type étudié § 7.

On voit de même que la congruence Q_1 est C, 3O et qu'elle appartient au type étudié § 6. On pourrait avec la congruence (Q_1) trouver une déformée de la quadrique, mais il faudrait avoir la congruence conjuguée, ce qui exige la résolution d'une équation de Riccati.

Les paramètres directeurs de Q_1 sont :

$$(12)\qquad \begin{vmatrix} \beta_1,\ \xi_4+i\xi_5 \\ \gamma_1,\ \eta_4+i\eta_5 \end{vmatrix},\qquad \begin{vmatrix} \beta_2,\ \xi_4+i\xi_5 \\ \gamma_2,\ \eta_4+i\eta_5 \end{vmatrix},\qquad \begin{vmatrix} \beta_3,\ \xi_4+i\xi_5 \\ \gamma_3,\ \eta_4+i\eta_5 \end{vmatrix}.$$

On voit facilement que les paramètres complémentaires qui rendent cette congruence 3O sont :

$$(13)\qquad \begin{vmatrix} \xi_1,\ \xi_4+i\xi_5 \\ \eta_1,\ \eta_4+i\eta_5 \end{vmatrix},\qquad \begin{vmatrix} \xi_2,\ \xi_4+i\xi_5 \\ \eta_2,\ \eta_4+i\eta_5 \end{vmatrix},\qquad \begin{vmatrix} \xi_3,\ \xi_4+i\xi_5 \\ \eta_3,\ \eta_4+i\eta_5 \end{vmatrix}.$$

Soit (Q_2) la congruence qui a pour paramètres les quantités (13); c'est une congruence C, et d'après la théorie générale la congruence conjuguée a pour paramètres les quantités

$$x_4+ix_5,\qquad y_4+iy_5,\qquad z_4+iz_5$$

du déterminant Δ [chap. II]. La congruence (Q_2) étant orthogonale à un réseau de la quadrique :

$$-p^2x_1^2-q^2x_2^2+x_3^2=1,$$

on voit qu'on obtient ainsi, à l'aide de quadratures seulement, une déformée de cette quadrique.

33. Le réseau N [§ 27] étant C, toute congruence conjuguée

est K; d'autre part, N étant 3O, il y a ∞^1 congruences conjuguées qui sont 2O. Nous allons former ces congruences K, 2O.

Le point $N_1(y_1, y_2, y_3, z_1, z_2)$ décrit dans l'espace à cinq dimensions un réseau O; parmi les réseaux parallèles il y en a ∞^1 dont la somme des carrés des coordonnées est nulle; soient $(Y_1, Y_2, Y_3, Z_1, Z_2)$ les coordonnées d'un tel réseau; (X_1, X_2, X_3) les coordonnées d'un réseau parallèle au réseau M applicable sur le réseau (Y_1, Y_2, Y_3). On aura :

$$Z_1 = pX_1, \qquad Z_2 = qX_2; \tag{14}$$

$$Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 + Z_1^2 + Z_2^2 = 0; \tag{15}$$

$$dY_1^2 + dY_2^2 + dY_3^2 = dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2. \tag{16}$$

Posons :

$$X_4 + iX_5 = \sum_1^3 Y_k^2 - \sum_1^3 X_k^2, \qquad X_4 - iX_5 = 1. \tag{17}$$

X_4 et X_5 satisfont à l'équation de Laplace qui admet pour solutions $Y_1, Y_2, Y_3, X_1, X_2, X_3$. On aura alors :

$$\sum_1^3 Y_\kappa^2 = \sum_1^5 X_k^2, \qquad \sum_1^3 dY_k^2 = \sum_1^5 dX_k^2. \tag{18}$$

Il en résulte que la congruence $G(Y_1, Y_2, Y_3)$ est applicable sur la congruence $G_1(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ de l'espace à cinq dimensions. La congruence G est donc K; elle est en outre 2O, les coordonnées complémentaires étant pX_1 et qX_2.

Cela posé, soit χ une solution de l'équation de Laplace à laquelle satisfont les X et les Y; les points

$$R\left[\frac{X_1}{\chi}, \frac{X_2}{\chi}, \frac{X_3}{\chi}\right] \qquad \text{et} \qquad S\left[\frac{Y_1}{\chi}, \frac{Y_2}{\chi}, \frac{Y_3}{\chi}, \frac{Y_4}{\chi}, \frac{Y_5}{\chi}\right]$$

décrivent des réseaux applicables. Nous allons prendre des cas particuliers :

1° $$\chi = Z_1 \pm iZ_2 = pX_1 \pm iqX_2.$$

On obtient ainsi pour R deux positions que je désigne par A et A′; χ étant une combinaison isotrope de Z_1 et Z_2, les réseaux A et A′ sont O; χ étant une combinaison linéaire de X_1 et X_2, ces réseaux sont 2C. Ainsi les deux séries de réseaux O conjugués à la congruence G sont 2C.

Réciproquement, si les réseaux O, conjugués à une congruence K, 2O, sont des réseaux 2C, la congruence rentre dans le type précédent. En effet soit G (Y_1, Y_2, Y_3) une congruence K, 2O; elle est applicable sur une congruence G_1 $(X_1, \ldots, X_5)$; soient de plus Z_1 et Z_2 les coordonnées complémentaires qui rendent ces congruences 2O; on aura les réseaux O en prenant $\chi = Z_1 \pm iZ_2$; pour que ces réseaux soient 2C, il faut que chacune de ces valeurs de χ soit une combinaison linéaire de $X_1, X_2, \ldots, X_5$; Z_1 et Z_2 sont donc des combinaisons linéaires de $X_1, X_2, \ldots, X_5$; la congruence reste donc bien dans le type que nous étudions.

Il résulte de là que le réseau (R) [§ 28] correspond par orthogonalité des éléments à une congruence K, 2O analogue à celle que nous étudions.

2° $$\chi = X_1 \pm iX_2 = \frac{Z_1}{p} \pm \frac{iZ_2}{q}.$$

On obtient ainsi pour R deux positions que je désigne par B et B′; χ étant une combinaison isotrope de X_1 et X_2 et une combinaison linéaire de Z_1 et Z_2, ces réseaux sont C et 2O.

3° $$\chi = p_3X_3 + p_4X_4 + p_5X_5, \qquad p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 = 0.$$

Autrement dit, χ est une combinaison isotrope de X_3, X_4, X_5; prenons pour fixer les idées :

$$\chi = X_4 + iX_5.$$

Les points R et S viennent occuper des positions P et P'.

Dans le réseau P' on peut supprimer les deux dernières coordonnées, de sorte que les réseaux

$$P\left[\frac{Y_1}{\chi}, \frac{Y_2}{\chi}, \frac{Y_3}{\chi}\right] \qquad \text{et} \qquad P_1'\left[\frac{X_1}{\chi}, \frac{X_2}{\chi}, \frac{X_3}{\chi}\right]$$

sont applicables; ces réseaux sont 3O, les coordonnées complémentaires étant :

$$(19) \qquad \frac{Z_1}{\chi} = p\frac{X_1}{\chi}, \qquad \frac{Z_2}{\chi} = q\frac{X_2}{\chi}.$$

Le réseau P_1' possède donc la propriété caractéristique des réseaux du paragraphe 2; le réseau P est donc parallèle à un réseau tracé sur la déformée de la quadrique.

Les réseaux (P) et (B) correspondant aux valeurs $\chi = X_4 + iX_5$, $\chi = X_1 + iX_2$; la droite d'intersection de leurs plans tangents décrit une congruence harmonique à chacun d'eux; cette congruence, d'après la théorie générale des congruences applicables, est O; d'autre part, étant harmonique au réseau B, qui est 2O, cette congruence est 2C.

On voit de même que la droite d'intersection des plans tangents aux réseaux (P) et (A) est une congruence C, 2O.

On retrouve ainsi, comme congruences harmoniques au réseau (P), les congruences G_1, G_2, H_1, H_2, du paragraphe 27.

34. Il résulte de ce qui précède, qu'à chaque réseau (N) applicable sur une quadrique, on peut faire correspondre ∞^1

IMPRIMERIE NATIONALE.

congruences conjuguées qui sont K, 2O. Sur chacune de ces congruences, il y a ∞^1 réseaux (P) conjugués, qui sont parallèles à un réseau C de la déformée d'une quadrique. On a donc ainsi une transformation du problème posé, transformation que j'ai déjà étudiée [*C. R.*, Sur la déformation des quadriques, 1905, 2e semestre]. Je vais montrer qu'au point de vue analytique, cette transformation revient à celle du paragraphe 23. En effet, reprenons les notations de ce paragraphe. Nous avons vu que si l'on pose :

$$X_k = x_k + iy_k,$$

on a [formules 20, § 24] :

$$(20)\qquad \begin{cases} \sum X_k^2 = \sum Y_k^2 = 0, & \sum dX_k^2 = \sum dY_k^2, \\ X_1 = PY_1, & X_2 = QY_2; \end{cases}$$

et par conséquent si l'on pose :

$$(21)\qquad Y_1' = Y_1\sqrt{1-P^2}, \qquad Y_2' = Y_2\sqrt{1-Q^2},$$

on aura :

$$(22)\qquad \begin{cases} X_3^2 + X_3^2 + X_5^2 = Y_1'^2 + Y_2'^2 + Y_3^2 + Y_4^2 + Y_5^2, \\ dX_3^2 + dX_1^2 + dX_5^2 = dY_1'^2 + dY_2'^2 + dY_3^2 + dY_1^2 + dY_5^2; \end{cases}$$

et par conséquent, la congruence $G(X_3, X_4, X_5)$ est applicable sur la congruence $G_1(Y_1', Y_2', Y_3, Y_4, Y_5)$. La congruence G est 2O, les coordonnées complémentaires étant :

$$(23)\qquad \begin{cases} X_1 = PY_1 = \dfrac{P}{\sqrt{1-P^2}}Y_1' = pY_1', \\ X_2 = QY_2 = \dfrac{Q}{\sqrt{1-Q^2}}Y_2' = qY_2'. \end{cases}$$

La congruence G rentre bien dans le type étudié au paragraphe précédent. On voit tout de suite que la transformation du paragraphe 23 ne diffère de celle que nous étudions ici que par la transformation homographique qui permet de passer de la quadrique à la sphère.

Il en résulte que si l'on connaît les déterminants Δ et δ [chap. II], on peut, à l'aide de quadratures seulement, poursuivre indéfiniment cette transformation.

35. La transformation précédente a été étudiée en introduisant des réseaux parallèles à ceux qui sont tracés sur la déformée d'une quadrique; nous allons mettre en évidence ces réseaux eux-mêmes.

Déterminons dans l'espace à cinq dimensions un réseau M $(X_1, X_2, \ldots, X_5)$ qui correspond au déterminant Δ [chap. II] par les équations :

$$\frac{\partial X_k}{\partial u} = a\xi_k, \qquad \frac{\partial X_k}{\partial v} = b\eta_k, \tag{24}$$

de sorte que le point (X_3, X_4, X_5) décrit la déformée d'une quadrique. On aura ainsi :

$$X_1 = P\alpha_1, \qquad X_2 = P\alpha_2. \tag{25}$$

Formons une combinaison isotrope des quantités x, y, z du déterminant Δ; prenons par exemple la combinaison $x+iy$; menons par le point M la droite L qui a pour paramètres directeurs les quantités x_k+iy_k; un point quelconque R de cette droite a pour coordonnées :

$$Z_k = X_k + \rho(x_k + y_k). \tag{26}$$

Déterminons maintenant Y_1, Y_2, Y_3 par les équations :

$$\frac{\partial Y_k}{\partial u} = (A+iE)\,\xi_k, \qquad \frac{\partial Y_k}{\partial v} = (B+iF)\,\gamma_k, \tag{27}$$

puis posons :

$$(28)\quad \begin{cases} Y_4+iY_5=-\sum_1^3 Y_k^2, & Y_4-iY_5=1, \\ \alpha_4+i\alpha_5=-2\sum_1^3 \alpha_k Y_k, & \alpha_4-i\alpha_5=0, \\ \beta_4+i\beta_5=-2\sum_1^3 \beta_k Y_k, & \beta_4-i\beta_5=0, \\ \gamma_4+i\gamma_5=-2\sum_1^3 \gamma_k Y_k, & \gamma_4-i\gamma_5=0. \end{cases}$$

de sorte que l'on aura :

$$(29)\quad \begin{cases} \sum_1^5 Y_k^2=0, & \sum_1^5 \alpha_k Y_k=0, & \sum_1^5 \beta_k Y_k=0, & \sum_1^5 \gamma_k Y_k=0, \\ \sum_1^5 \alpha_k^2=1, & \sum_1^5 \beta_k^2=1, & \sum_1^5 \gamma_k^2=1, & \\ \sum_1^5 \alpha_k\beta_k=0, & \sum_1^5 \beta_k\gamma_k=0, & \sum_1^5 \gamma_k\alpha_k=0. & \end{cases}$$

Cela posé, considérons dans l'espace à cinq dimensions le point $R_1(T_1, T_2, \ldots, T_5)$ ayant pour coordonnées :

$$(30)\qquad T_k=\alpha_k+\rho Y_k.$$

Les points R et R_1, décrivent des réseaux applicables et l'on a en outre :

$$(31)\qquad Z_1=PT_1, \qquad Z_2=QT_2,$$

et :

$$\sum_1^5 T_k^2=1.$$

Si j'égale à zéro une combinaison isotrope de T_3, T_4, T_5, je pourrais supprimer deux des coordonnées de R_1; la somme des carrés des trois coordonnées qui restent sera égale à l'unité; si donc je détermine ρ par l'équation :

$$(32)\qquad \begin{cases} p_3\alpha_3+p_4\alpha_4+p_5\alpha_5+\rho\,(p_3Y_3+p_4Y_4+p_5Y_5)=0, \\ p_3^2+p_4^2+p_5^2=0, \end{cases}$$

le point (R) décrit un réseau analogue au point M; c'est-à-dire que les trois dernières coordonnées de R sont les coordonnées d'un point de la déformée de la quadrique.

Cherchons les tangentes au réseau R; on a :

$$(32\ bis)\qquad \frac{\partial Z_k}{\partial u}=[a+\rho\,(A+iE)]\,\xi_k+\frac{\partial\rho}{\partial u}(x_k+iy_k),$$

Des équations (26) et (32 *bis*) on déduit que la première tangente au réseau R rencontre la première tangente au réseau (M) en un point S qui a pour coordonnées :

$$(33)\qquad X_k-\frac{\rho}{\frac{\partial\rho}{\partial u}}\left[a+\rho\,(A+iE)\right]\xi_k.$$

Or, de la première des équations (32) on déduit :

$$(34)\quad [a+\rho\,(A+iE)][p_3\beta_3+p_4\beta_4+p_5\beta_5]+\frac{\partial\rho}{\partial u}[p_3Y_3+p_4Y_4+p_5Y_5]=0.$$

Des équations (32) et (34) on déduit :

$$\frac{\rho}{\frac{\partial\rho}{\partial u}}[a+\rho\,(A+iE)]=\frac{p_3\alpha_3+p_4\alpha_4+p_5\alpha_5}{p_3\beta_3+p_4\beta_4+p_5\beta_5}.$$

de sorte que les coordonnées du point S sont :

$$X_k - \frac{p_3\alpha_3 + p_4\alpha_4 + p_5\alpha_5}{p_3\beta_3 + p_4\beta_4 + p_5\beta_5}\xi_k. \tag{35}$$

On voit de même que la seconde tangente au réseau R rencontre la seconde tangente au réseau M en un point qui a pour coordonnées :

$$X_k - \frac{p_3\alpha_3 + p_4\alpha_4 + p_5\alpha_5}{p_3\gamma_3 + p_4\gamma_4 + p_5\gamma_5}\eta_k. \tag{36}$$

D'autre part, les coordonnées du point R sont :

$$X_k - \frac{p_3\alpha_3 + p_4\alpha_4 + p_5\alpha_5}{p_3\Upsilon_3 + p_4\Upsilon_4 + p_5\Upsilon_5}(x_k + iy_k). \tag{37}$$

Ces équations montrent que le plan RST passe par un point fixe et enveloppe un cône du 2^e ordre quand u et v sont fixes et que p_1, p_2, p_2 varient.

D'autre part, quand on prend toutes les combinaisons isotropes possibles de x, y, z, les droites L engendrent un cône du second ordre.

En projetant [c'est-à-dire en ne conservant que les trois dernières coordonnées], on a les résultats suivants :

Les ∞^1 congruences K, 2O *conjuguées à une déformée de la quadrique forment en chaque point un cône du 2^e ordre.*

Sur chacune de ces congruences il y a ∞^1 points qui décrivent des réseaux applicables sur la quadrique.

Les plans tangents à ces réseaux, qui correspondent à une droite de la congruence, enveloppent un cône du second ordre.

36. Par le point M [§ 35] menons la droite H qui a pour paramètres directeurs z_1, z_2, . . . , z_5. Le plan HML enveloppe [Systèmes orthogonaux et cycliques, chap. VI, § 40] un réseau I, que nous

allons étudier. Les coordonnées d'un point P du plan HML sont de la forme :

$$\theta_k = X_k + rZ_k + \rho(x_k + iy_k). \tag{38}$$

En déterminant r et ρ par les équations :

$$\begin{cases} a + rG + \rho(A + iE) = 0, \\ b + rK + \rho(B + iF) = 0, \end{cases} \tag{39}$$

on aura :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\theta_k}{\partial u} = Z_k \dfrac{\partial r}{\partial u} + (x_k + iy_k)\dfrac{\partial\rho}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial\theta_k}{\partial v} = Z_k \dfrac{\partial r}{\partial v} + (x_k + iy_k)\dfrac{\partial\rho}{\partial v}, \end{cases} \tag{40}$$

et par conséquent :

$$\sum d\theta_k^2 = dr^2.$$

Les points $(\theta_3, \theta_4, \theta_5)$ et $(i\theta_1, i\theta_2, r)$ décrivent donc des réseaux applicables; nous allons montrer que ce dernier est situé sur la quadrique. En effet, on a :

$$\theta_1 = X_1 + rz_1 + \rho(x_1 + iy_1) = P\alpha_1 + rz_1 + \rho(x_1 + iy_1),$$

et

$$\frac{\theta_1}{\sqrt{1-P^2}} = \frac{P}{\sqrt{1-P^2}}\alpha_1 + r\frac{Z_1}{\sqrt{1-P^2}} + \rho\frac{x_1+iy_1}{\sqrt{1-P^2}},$$

ou, en introduisant les éléments du déterminant θ [§ 11] :

$$\frac{\theta_1}{\sqrt{1-P^2}} = -i\lambda_4 + r\lambda_3 + \rho(\lambda_1 + i\lambda_2); \tag{41}$$

et de même :

$$\frac{\theta_2}{\sqrt{1-Q^2}} = -i\mu_4 + r\mu_3 + \rho(\mu_1 + i\mu_2). \tag{42}$$

D'autre part les équations (39) peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} 0 = -i\beta'_4 + r\beta'_3 + \rho(\beta'_1 + i\beta'_2), \\ 0 = -i\gamma'_4 + r\gamma'_3 + \rho(\gamma'_1 + i\gamma'_2). \end{cases} \tag{43}$$

Élevons au carré les deux membres des équations (41), (42), (43) et ajoutons. On a :

$$\frac{\theta_1^2}{1-P^2} + \frac{\theta_2^2}{1-Q^2} = -1 + r^2,$$

ce qui montre que le point $i\theta_1$, $i\theta_2$, r est sur la quadrique.

En somme, le réseau P se projette suivant une déformée de la quadrique. La droite L se projettera suivant une congruence harmonique qui est K, 2O; cette congruence correspond sur la déformée à l'intersection du plan $x_k = 0$ avec le plan tangent à la quadrique; en tenant compte, en outre, des résultats du paragraphe 28, on a le théorème suivant :

Si l'on coupe le plan tangent d'une quadrique par les trois plans principaux, on obtient un triangle; le triangle qui lui correspond sur une déformée possède les deux propriétés suivantes : 1° *Ses sommets décrivent des réseaux* K, 2O; 2° *Ses côtés engendrent des congruences* K, 2O.

37. Le réseau (M) [§ 35] est, O,3I; la congruence qui lui correspond par orthogonalité des éléments sera aussi O,3I.

Nous allons former cette congruence; au réseau M $(X_1, \ldots, X_5)$ associons un point A $(Y_1, \ldots, Y_5)$ ayant pour coordonnées :

$$Y_k = X_k + r_1 x_k + r_2 y_k + r_3 z_k. \tag{44}$$

Si l'on assujettit r_1, r_2, r_3 à vérifier les équations :

$$\begin{cases} a + Ar_1 + Er_2 + Gr_3 = 0, \\ b + Br_1 + Fr_2 + Kr_3 = 0, \end{cases} \tag{45}$$

on aura :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Y_k}{\partial u} = x_k \dfrac{\partial r_1}{\partial u} + y_k \dfrac{\partial r_2}{\partial u} + z_k \dfrac{\partial r_3}{\partial v}, \\ \dfrac{\partial Y_k}{\partial v} = x_k \dfrac{\partial r_1}{\partial v} + y_k \dfrac{\partial r_2}{\partial v} + z_k \dfrac{\partial r_3}{\partial v}, \end{cases} \tag{46}$$

de sorte que

$$\sum dY_k^2 = dr_1^2 + dr_2^2 + dr_3^2.$$

Si l'on considère u et v comme fixes et si l'on donne à r_1, r_2, r_3 toutes les valeurs qui satisfont aux équations (45), le point A décrit une droite (D); cette droite (D) décrit une congruence orthogonale au réseau (M).

Désignons, d'autre part, par A′ le point de l'espace à trois dimensions qui a pour coordonnées r_1, r_2, r_3; si u et v sont fixes, le point A′ décrit une droite D′, qui engendre une congruence (D′). Les deux congruences (D) et (D′) sont applicables l'une sur l'autre.

Un calcul analogue à celui du numéro précédent montre que l'on a :

$$\frac{Y_1^2}{1 - P^2} + \frac{Y_2^2}{1 - Q^2} = -1 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2.$$

IMPRIMERIE NATIONALE.

Si donc on désigne par $Z_1, Z_2, \ldots, Z_5$ les paramètres de D, par T_1, T_2, T_3 ceux de D′, on a :

$$T_1^2+T_2^2+T_3^2=Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2+Z_5^2=\frac{Z_1^2}{1-P^2}+\frac{Z_2^2}{1-Q^2}.$$

On en déduit facilement que la projection de la congruence D, c'est-à-dire la droite qui a pour paramètres directeurs Z_3, Z_4, Z_5, décrit une congruence K, 2O analogue à celles que nous avons déjà trouvées.

La droite D′ décrit aussi une congruence K, 2O, les coordonnées complémentaires étant $\frac{Z_1}{\sqrt{1-P^2}}$ et $\frac{Z_2}{\sqrt{1-Q^2}}$; cette congruence D′ correspond à la déformation de la quadrique :

$$-p^2x_1^2-q^2x_2^2+x_3^2=1.$$

Le réseau (R) qui correspond par orthogonalité des éléments à la congruence (D′) est aussi K, 2O. Les formules (45) montrent que les paramètres des tangentes à ce réseau R sont A, E, G pour la première et B, F, K pour la deuxième. Il suffit de considérer le déterminant θ [chap. II] pour reconnaître que ce réseau R est bien 2O.

D'autre part les formules :

$$\frac{\partial(x_4+ix_5)}{\partial u}=A(\xi_4+i\xi_5), \qquad \frac{\partial(x_4+ix_5)}{\partial v}=B(\eta_4+i\eta_5),$$

$$\frac{\partial(y_4+iy_5)}{\partial u}=E(\xi_4+i\xi_5), \qquad \frac{\partial(y_4+iy_5)}{\partial v}=F(\eta_4+i\eta_5),$$

$$\frac{\partial(z_4+iz_5)}{\partial u}=G(\xi_4+i\xi_5), \qquad \frac{\partial(z_4+iz_5)}{\partial v}=K(\eta_4+i\eta_5)$$

montrent que la congruence qui a pour paramètres directeurs x_4+ix_5, y_4+iy_5, z_4+iz_5 est conjuguée au réseau (R), ce qui donne le résultat établi au paragraphe 32.

CHAPITRE VI.

PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES DES DÉFORMÉES D'UNE QUADRIQUE OBTENUES EN CONSIDÉRANT LES RÉSEAUX DE CETTE QUADRIQUE COMME DES RÉSEAUX 4O.

38. Désignons toujours par M (x_1, x_2, x_3) un réseau C de la quadrique, par N (y_1, y_2, y_3) le réseau applicable. On sait (§ 8) que ces réseaux peuvent, d'une infinité de manières, être considérés comme des réseaux 4O. Les coordonnées complémentaires z_1, z_2, z_3 sont de la forme :

$$(1) \qquad z_1 = a_1 x_1, \qquad z_2 = a_2 x_2, \qquad z_3 = a_3 x_3;$$

a_1, a_2, a_3 ont les valeurs données par les formules (25) du paragraphe 8.

Formons comme au paragraphe 27 des congruences L et L′ harmoniques aux réseaux N et M en prenant pour θ la valeur suivante :

$$(2) \qquad \theta = p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3,$$

p_1, p_2, p_3 étant des constantes satisfaisant aux conditions :

$$(3) \qquad \begin{cases} p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 0, \\ \frac{p_1^2}{a_1^2} + \frac{p_2^2}{a_2^2} + \frac{p_3^2}{a_3^2} = 0; \end{cases}$$

θ est ainsi à la fois une combinaison isotrope de x_1, x_2, x_3 et une combinaison isotrope de z_1, z_2, z_3. Il en résulte que la congruence (L) est O, 2C.

Le système des équations (3) admet quatre solutions; de l'une d'elles on déduit les trois autres en changeant le signe d'une seule des quantités p_1, p_2, p_3; donc à chaque valeur de ρ [§ 8] correspondent, en général, quatre congruences harmoniques au réseau N, congruences qui sont O et 2C.

Le plan dont l'équation est :

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = 0$$

est un plan isotrope; on peut d'ailleurs, *en général*, choisir ρ de façon à avoir un plan isotrope quelconque; donc :

A la droite d'intersection du plan tangent à la quadrique avec un plan isotrope quelconque correspond sur la déformée une droite qui, en général, décrit une congruence O, 2C;

ou, ce qui revient au même :

Au point d'intersection du plan tangent à la quadrique avec une droite isotrope quelconque correspond sur la déformée un point qui, en général, décrit un réseau O, 2C.

Cette propriété sera complétée dans le chapitre suivant.

39. Le réseau N étant C, toute congruence conjuguée est K; d'autre part, le réseau N étant 4O, il y a, parmi les congruences conjuguées, une infinité de congruences qui sont 3O; nous allons étudier les propriétés de ces congruences K, 3 O.

Partons d'un déterminant Δ'' [chap. II]; désignons les rotations de ce déterminant par :

$$(4) \qquad \begin{cases} a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & m, \\ b_1, & b_2, & b_3, & b_4, & n, \end{cases}$$

et par μ_1, μ_2, μ_3 les constantes :

$$(5) \qquad \begin{cases} \mu_1 = \sqrt{\sin^2\omega + P^2\cos^2\omega}, \qquad \mu_2 = \sqrt{\sin^2\omega + Q^2\cos^2\omega}, \\ \mu_3 = \sin\omega, \end{cases}$$

de sorte que l'on a [§ 14] :

$$(6)\qquad \begin{cases} \xi''_1=\mu_1\beta_1, & \xi''_2=\mu_2\beta_2, & \xi''_3=\mu_3\beta_3, \\ \eta''_1=\mu_1\gamma_1, & \eta''_2=\mu_2\gamma_2, & \eta''_3=\mu_3\gamma_3. \end{cases}$$

Cela posé, formons une combinaison isotrope des quantités x'', y'', z'', t'' de ce déterminant Δ''; prenons par exemple la combinaison $x''+iy''$ et posons :

$$(7)\qquad Z_k=x''_k+iy''_k.$$

Déterminons ensuite Y_1, Y_2, Y_3 par les quadratures :

$$(8)\qquad \frac{dY_k}{\partial u}=(a_1+ia_2)\beta_k, \qquad \frac{dY_k}{\partial v}=(b_1+ib_2)\gamma_k,$$

et posons :

$$(9)\qquad Y_4+iY_5=-\sum_1^3 Y_k^2, \qquad Y_4-iY_5=1.$$

On aura alors :

$$(10)\qquad \begin{cases} \sum_1^6 Z_k^2=\sum_1^5 Y_k^2=0, \qquad \sum dZ_k^2=\sum dY_k^2, \\ Z_1=\mu_1 Y_1, \qquad Z_2=\mu_2 Y_2, \qquad Z_3=\mu_3 Y_3. \end{cases}$$

Cela posé, on voit que la congruence (G) qui a pour paramètres Z_4, Z_5, Z_6 est applicable sur la congruence G′ qui a pour paramètres directeurs Y'_1, Y'_2, Y'_3, Y'_4, Y'_5, où :

$$(11)\qquad \begin{cases} Y'_1=\sqrt{1-\mu_1^2}\,Y_1, \qquad Y'_2=\sqrt{1-\mu_2^2}\,Y_2, \qquad Y'_3\sqrt{1-\mu_3^2}\,Y'_3, \\ Y'_4=Y_4, \qquad Y'_5=Y_5. \end{cases}$$

Cette congruence est 3O, les trois coordonnées complémentaires étant :

$$(12)\qquad Z_1=\frac{\mu_1}{\sqrt{1-\mu_1^2}}Y'_1,\qquad Z_2=\frac{\mu_2}{\sqrt{1-\mu_2^2}}Y'_2,\qquad Z_3=\frac{\mu_3}{\sqrt{1-\mu_3^2}}Y_3.$$

La congruence G est donc bien K, 3O; elle possède cette propriété spéciale, que chacun des paramètres complémentaires qui la rendent 3O ne diffère que par un facteur constant d'un paramètre de la congruence de l'espace à cinq sur laquelle elle est applicable.

Soit maintenant χ une solution de l'équation de Laplace à laquelle satisfont les fonctions X et Y. Les points $R\left[\frac{X_4}{\chi}, \frac{X_5}{\chi}, \frac{X_6}{\chi}\right]$ et $S\left[\frac{Y'_1}{\chi}, \frac{Y'_2}{\chi}, \ldots, \frac{Y'_5}{\chi}\right]$ décrivent des réseaux applicables. Nous allons prendre des cas particuliers :

1°
$$\chi=p_1Y'_1+p_2Y'_2+p_3Y'_3,$$

p_2, p_2, p_3 étant des constantes satisfaisant aux conditions :

$$(13)\qquad \begin{cases} p_1^2+p_2^2+p_3^2=0, \\ \frac{p_1^2}{\mu_1^2}+\frac{p_2^2}{\mu_2^2}+\frac{p_3^2}{\mu_3^2}=0; \end{cases}$$

χ est ainsi à la fois une combinaison isotrope de Y'_1, Y'_2, Y'_3 et de Z_1, Z_2, Z_3; le réseau R correspondant est donc C, 2O. On obtient ainsi quatre réseaux de cette espèce; je les désigne par (A_1), (A_2), (A_3), (A_4).

2°
$$\chi=Y'_4\pm iY'_5.$$

Les deux réseaux correspondants (P) et (P′) sont des réseaux C. Ces réseaux sont 4O, les coordonnées complémentaires $\frac{Z_1}{\chi}, \frac{Z_2}{\chi}, \frac{Z_3}{\chi}$ ne diffèrent respectivement que par un facteur constant des coor-

données du réseau applicable $\frac{Y_1'}{\chi}, \frac{Y_2'}{\chi}, \frac{Y_3'}{\chi}$. Les réseaux (P) et (P') sont les réseaux du paragraphe 8 ; ils sont parallèles à des réseaux tracés sur la déformée de la quadrique.

La droite d'intersection des réseaux (A) et (P) décrit une congruence harmonique à chacun d'eux; d'après la théorie générale cette congruence est O; étant harmonique à A, elle est en outre 2C; on trouve ainsi les quatre congruences O, 2C [§ 38] harmoniques au réseau (P).

40. Les combinaisons isotropes de x'', y'', z'', t'' forment un système doublement infini; il en résulte qu'à chaque déterminant Δ'' (ou à chaque valeur de ω) on fait correspondre ∞^2 congruences K, 3O conjuguées au réseau (N); sur chacune de ces congruences se trouve un autre réseau (N') analogue au réseau N. On a donc ainsi une transformation du problème posé. Au point de vue analytique, cette transformation revient à celle du paragraphe 26.

41. Conservons les notations du paragraphe 39 et formons un réseau O $(X_1, \ldots, X_6)$ correspondant au déterminant Δ'' et applicable sur la sphère de rayon 1. On aura :

$$\frac{\partial X_k}{\partial u} = a\xi_k'', \qquad \frac{\partial X_k}{\partial v} = b\eta_k''. \tag{14}$$

Le point (X_4, X_5, X_6) décrit une déformée de la quadrique et l'on a :

$$X_1 = \mu_1 \alpha_1, \qquad X_2 = \mu_2 \alpha_2, \qquad X_3 = \mu_3 \alpha_3 ; \tag{15}$$

posons en outre :

$$\begin{cases} Y_4 + iY_5 = -2\sum_1^3 Y_k^2, & Y_4 - iY_5 = 1 ; \\ \alpha_4 + i\alpha_5 = -\sum_1^3 \alpha_k Y_k, & \alpha_4 - i\alpha_5 = 0. \end{cases} \tag{16}$$

On voit comme au paragraphe 35 que les points $R(T_1, \ldots, T_6)$, et $S(\theta_1, \ldots, \theta_5)$, où l'on pose :

$$(17) \qquad T_k = X_k + \rho Z_k, \qquad \theta_k = \alpha_k + \rho Y_k,$$

ont le même ds^2; si l'on détermine ρ de telle sorte que $\theta_4 + i\theta_5$ soit nul, R et S décrivent des réseaux O; on peut supprimer les deux dernières coordonnées de S; le point $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ est sur la sphère de rayon 1; il décrit un réseau applicable sur le réseau R et l'on a :

$$T_1 = \mu_1 \theta_1, \qquad T_2 = \mu_2 \theta_2, \qquad T_3 = \mu_3 \theta_3.$$

Le réseau $N'(T_4, T_5, T_6)$ est donc applicable sur la quadrique.

CHAPITRE VII.

SUR LES SYSTÈMES DE CERCLES ET DE SPHÈRES QUI INTERVIENNENT DANS LA DÉFORMATION DES QUADRIQUES.

42. Soient (M) un réseau C de la quadrique, (N) le réseau applicable, $\mathfrak{I}$ un point fixe, (S) la sphère de centre N et de rayon M$\mathfrak{I}$; cette sphère décrit une congruence que j'ai appelée congruence O. D'après un théorème plus général de Beltrami, la sphère (S) touche son enveloppe au point qui, sur la déformée, correspond à $\mathfrak{I}$ et à son symétrique $\mathfrak{I}'$ par rapport au plan tangent du réseau N.

Les systèmes de cercles conjugués (Systèmes orthogonaux et cycliques, chapitre VII) passent par $\mathfrak{I}$ et $\mathfrak{I}'$.

Nous allons étudier ces systèmes de cercles et de sphères en donnant des positions particulières au point $\mathfrak{I}$. Nous mettrons ainsi en évidence le rôle des focales dans la déformation des quadriques.

La plupart des résultats géométriques qui figurent dans ce chapitre ont été établis dans une note que j'ai publiée en 1906 (*C. R.*, Sur la déformation des quadriques).

43. Soit

$$(1+p^2)x_1^2+(1+q^2)x_2^2+x_3^2=1$$

l'équation de la quadrique; transportons l'origine des axes de coordonnées en un point $\mathfrak{I}$ de coordonnées ξ_1, ξ_2, 0. L'équation de la quadrique devient :

$$\begin{aligned}O=f(X_1,X_2,X_3)=X_1^2+X_2^2+X_3^2+p^2X_1^2+q^2X_2^2+2(1+p^2)\xi_1X_1\\+2(1+q^2)\xi_2X_2+(1+p^2)\xi_1^2+(1+q^2)\xi_2^2-1.\end{aligned}$$

IMPRIMERIE NATIONALE.

Ce qui s'écrira :

$$(1)\qquad 0 = f = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + \left(pX_1 + \frac{1+p^2}{p}\xi_1\right)^2 + \left(qX_2 + \frac{1+q^2}{q}\xi_2\right),$$

en supposant que l'on ait :

$$(2)\qquad \frac{1+p^2}{p^2}\xi_1^2 + \frac{1+q^2}{q^2}\xi_2^2 + 1 = 0,$$

ce qui revient à prendre le point $\mathfrak{I}$ sur la focale du plan x_1, x_2.

On a de même :

$$\begin{aligned}\lambda f(X_1, X_2, X_3) = {} & X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + [\lambda(1+p^2) - 1]X_1^2 \\ & + [\lambda(1+q^2) - 1]X_2^2 + (\lambda - 1)X_3^2 \\ & + 2\lambda(1+p^2)\xi_1 X_1 + 2\lambda(1+q^2)\xi_2 X_2 \\ & + \lambda(1+p^2)\xi_1^2 + \lambda(1+q^2)\xi_2^2 - \lambda.\end{aligned}$$

Ce qui peut s'écrire :

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned}\lambda f = {} & X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + \left[\sqrt{\lambda(1+p^2) - 1}\, X_1 + \frac{\lambda(1+p^2)\xi_1}{\sqrt{\lambda(1+p^2) - 1}}\right]^2 \\ & + \left[\sqrt{\lambda(1+q^2) - 1}\, X_2 + \frac{\lambda(1+q^2)\xi_2}{\sqrt{\lambda(1+q^2) - 1}}\right]^2 + \left[\sqrt{\lambda - 1}\, X_3\right]^2,\end{aligned}\right.$$

en supposant que :

$$(4)\qquad \frac{1+p^2}{\lambda(1+p^2) - 1}\xi_1^2 + \frac{1+q^2}{\lambda(1+q^2) - 1}\xi_2^2 + 1 = 0.$$

L'équation (4) est du second degré en λ; si, comme nous le supposerons toujours, $\mathfrak{I}$ est placé sur la focale, une des racines est égale à l'unité, l'autre est, en général, différente de 0 ou de 1.

44. Soient alors X_1, X_2, X_3 les nouvelles coordonnées du point M, y_1, y_2, y_3 celles du point N. Les coordonnées $(Y_1, \ldots, Y_5)$ de la sphère (S) sont :

$$(5)\qquad \begin{cases} Y_1 = y_1,\ Y_2 = y_2,\ Y_3 = y_3,\ Y_4 + iY_5 = 1, \\ Y_4 - iY_5 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - y_1^2 - y_2^2 - y_3^2. \end{cases}$$

Cette sphère est O, les coordonnées qui la rendent O sont :

$$(6)\qquad X_1, \quad X_2, \quad X_3.$$

On a en effet :

$$\sum Y_k^2 = \sum X_k^2, \qquad \sum dY_k^2 = \sum dX_k^2.$$

D'autre part, la formule (1) montre que ce système est 31, les deux coordonnées complémentaires Z_1 et Z_2 ayant pour valeurs :

$$(7)\qquad \begin{cases} Z_1 = pX_1 + \frac{1+p^2}{p}\xi_1 = pX_1 + \frac{1+p^2}{p}\xi_1(Y_4 + iY_5), \\ Z_2 = qX_2 + \frac{1+q^2}{q}\xi_2 = qX_2 + \frac{1+q^2}{q}(Y_4 + iY_5). \end{cases}$$

Enfin, la formule (3) montre que, en général, le système est 41, les trois coordonnées complémentaires étant :

$$(8)\qquad \begin{cases} T_1 = \sqrt{\lambda(1+p^2) - 1}\, X_1 + \frac{\lambda(1+p^2)\xi_1}{\sqrt{\lambda(1+p^2) - 1}}(Y_4 + iY_5), \\ T_2 = \sqrt{\lambda(1+q^2) - 1}\, X_2 + \frac{\lambda(1+q^2)\xi_2}{\sqrt{\lambda(1+q^2) - 1}}(Y_4 + iY_5), \\ T_3 = \sqrt{\lambda - 1}\, X_3. \end{cases}$$

Ainsi le système de sphères est O, 3I, 4I et entre les coordonnées de la sphère, les paramètres complémentaires qui la rendent 3O, puis 3I, puis 4I, existent les relations (7) et (8).

45. Soit θ une solution de l'équation de Laplace à laquelle satisfont les fonctions X et Y; le point R $\left[\frac{Y_1}{\theta}, \frac{Y_2}{\theta}, \ldots, \frac{Y_5}{\theta}\right]$ décrit dans l'espace à cinq dimensions un réseau conjugué à la congruence G $(Y_1, \ldots, Y_5)$; il correspond à ce réseau un système de cercles (R) conjugués au système de sphères (S). Les coordonnées pentasphériques de la première sphère focale sont les quantités :

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{Y_k}{\theta}\right),$$

et par conséquent les coordonnées du centre de cette sphère sont :

$$\frac{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{y_1}{\theta}\right)}{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\theta}\right)}, \qquad \frac{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{y_2}{\theta}\right)}{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\theta}\right)}, \qquad \frac{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{y_3}{\theta}\right)}{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\theta}\right)},$$

ou bien :

$$(9) \qquad y_1 - \frac{\theta}{\frac{\partial\theta}{\partial u}}\frac{\partial y_1}{\partial u}, \qquad y_2 - \frac{\theta}{\frac{\partial\theta}{\partial u}}\frac{\partial y_2}{\partial u}, \qquad y_3 - \frac{\theta}{\frac{\partial\theta}{\partial u}}\frac{\partial y_3}{\partial u}.$$

Les centres des sphères focales sont donc les foyers de la congruence (L), harmonique au réseau (N) et qui correspond à la solution θ.

Ces foyers correspondent sur la quadrique aux points qui ont pour coordonnées :

$$X_1 - \frac{\theta}{\frac{\partial\theta}{\partial u}}\frac{\partial X_1}{\partial u}, \qquad X_2 - \frac{\theta}{\frac{\partial\theta}{\partial u}}\frac{\partial X_2}{\partial u}, \qquad X_3 - \frac{\theta}{\frac{\partial\theta}{\partial u}}\frac{\partial X_3}{\partial u},$$

$$X_1 - \frac{\theta}{\frac{\partial\theta}{\partial v}}\frac{\partial X_1}{\partial v}, \qquad X_2 - \frac{\theta}{\frac{\partial\theta}{\partial v}}\frac{\partial X_2}{\partial v}, \qquad X_3 - \frac{\theta}{\frac{\partial\theta}{\partial v}}\frac{\partial X_3}{\partial v}.$$

En particulier, si :

$$\theta = aX_1 + bX_2 + cX_3 + d,$$

l'axe du cercle (R) est la droite qui, sur la déformée, correspond à l'intersection du plan tangent de la quadrique avec le plan dont l'équation est :

$$aX_1 + bX_2 + cX_3 + d = 0.$$

Avant d'entreprendre l'étude générale des systèmes (S), nous allons examiner quelques cas particuliers.

46. Posons :

$$\theta = Z_1 + iZ_2,$$

le cercle R sera un cercle O; en général ce système sera 3 I, les trois coordonnées complémentaires étant $\frac{X_1}{\theta}$, $\frac{X_2}{\theta}$, $\frac{X_3}{\theta}$; mais si l'on a :

$$\frac{1+p^2}{p}\xi_1 + \frac{1+q^2}{q}\xi_2 = 0, \tag{10}$$

θ est une combinaison linéaire de X_1 et X_2, par conséquent le système (R) est 2 I.

Si l'équation (10) est satisfaite, le point $\mathfrak{I}$ est un ombilic; le plan dont l'équation est :

$$0 = \theta = pX_1 + iqX_2,$$

est le plan tangent à l'ombilic. L'axe du cercle (R) correspond sur la déformée à l'intersection du plan tangent à la quadrique avec le plan tangent à l'ombilic.

J'ai démontré (Systèmes orthogonaux et systèmes cycliques, § 93) que les pôles d'un cercle qui décrit un système O, 2 I décrivent des surfaces isothermiques. Ces pôles correspondent sur la

déformée aux points d'intersection du plan tangent avec les génératrices isotropes de la surface qui passent par $\mathfrak{I}$. Ce résultat a été établi par M. Darboux (*C. R.*, 1899).

47. Faisons maintenant :

$$\theta = X_1 + iX_2;$$

le système (R) est I; en général ce système est 3O, les coordonnées complémentaires étant $\frac{Z_1}{\theta}$, $\frac{Z_2}{\theta}$. Mais si l'on a :

$$\frac{1+p^2}{p^2}\xi_1 + i\frac{1+q^2}{q^2}\xi_2 = 0, \tag{11}$$

θ sera une combinaison linéaire de Z_1 et Z_2; le système (R) sera 2O.

Si l'équation (11) est satisfaite, le point $\mathfrak{I}$ est le point de contact d'une tangente isotrope à la focale; le plan dont l'équation est :

$$\theta = X_1 + iX_2 = 0,$$

est le plan mené par cette droite parallèlement à l'axe x_3; le cercle R se réduit à un point qui correspond sur la déformée au point de rencontre de cette tangente isotrope avec le plan tangent à la quadrique. Nous retrouverons plus loin (§ 48) d'autres systèmes de cercles I, 2O.

Dans les deux cas que nous venons d'examiner, le système de sphères (S) n'est plus 4I. Dans le premier cas, l'équation (4) admet la racine $\lambda = 0$; dans le second $\lambda = 1$ est une racine double; pour toutes les autres positions du point $\mathfrak{I}$, l'équation (4) admet une racine autre que 1 et 0, le système (S) est bien 4I. Nous allons étudier ces systèmes.

48. Pour étudier le cas général, nous prendrons comme origine un point $\mathfrak{F}$ de la focale, comme axe des x_1 la tangente en ce point à la focale, l'axe des x_2 dans le plan de la focale; l'équation de la quadrique est de la forme :

$$(12)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{F}(x_1, x_2, x_3) \\ = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + h_1^2 x_1^2 + h_2^2 [x_1 \cos\omega + (x_2 - r)\sin\omega]^2 = 0. \end{array}\right.$$

Après avoir enlevé de cette équation $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, il reste comme terme du second degré :

$$(13)\quad x_1^2 [h_1^2 + h_2^2 \cos^2\omega] + 2 x_1 x_2 h_2^2 \cos\omega \sin\omega + x_2^2 h_2^2 \sin^2\omega.$$

Pour identifier la quadrique (12) avec la quadrique donnée, j'écris que les racines de l'équation en S de la forme (13) sont p^2 et q^2. Or cette équation est :

$$(14)\quad \mathrm{S}^2 - \mathrm{S}(h_1^2 + h_2^2) + h_1^2 h_2^2 \sin^2\omega = 0.$$

Cela posé, soient encore y_1, y_2, y_3 les coordonnées du réseau applicable. Les coordonnées de la sphère (S) sont :

$$(15)\quad \mathrm{Y}_1 = y_1,\ \mathrm{Y}_2 = y_2,\ \mathrm{Y}_2 = y_3,\ \mathrm{Y}_4 + i\mathrm{Y}_5 = 1,\ \mathrm{Y}_4 - i\mathrm{Y}_5 = \Sigma x^2 - \Sigma y^2.$$

Ce système est O; les coordonnées correspondantes sont :

$$(16)\quad \mathrm{X}_1 = x_1, \qquad \mathrm{X}_2 = x_2, \qquad \mathrm{X}_3 = x_3.$$

La formule (12) montre que le système est 3I, les coordonnées complémentaires Z_1 et Z_2 étant :

$$(17)\quad \mathrm{Z}_1 = h_1 x_1, \qquad \mathrm{Z}_2 = h_2 [x_1 \cos\omega + (x_2 - r)\sin\omega].$$

Enfin de l'équation (12) on déduit :

$$(18)\quad \begin{cases} \frac{1}{1+h_1^2}F(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-\frac{h_1^2}{1+h_1^2}x_2^2-\frac{h_1^2}{1+h_1^2}x_3^2 \\ \qquad\qquad +\frac{h_2^2}{1+h_1^2}[x_1\cos\omega+(x_1-r)\sin\omega]^2. \end{cases}$$

Sous la forme (18) on voit immédiatement que le système est 4 I, les coordonnées complémentaires T_1, T_2, T_3 étant :

$$(19)\quad \begin{cases} T_1=\frac{-h_2}{\sqrt{1+h_1^2}}[x_1\cos\omega+(x_1-r)\sin\omega], \\ T_2=\frac{ih_1}{\sqrt{1+h_1^2}}x_2, \qquad T_3=\frac{ih_1}{\sqrt{1+h_1^2}}x_3. \end{cases}$$

Cela posé formons le système conjugué (R) en prenant :

$$\theta=x_2+ix_3,$$

θ étant à la fois une combinaison isotrope de X_2 et X_3 d'une part et de T_2 et T_3 d'autre part; le système (R) est I, 2O. Le plan dont l'équation est :

$$\theta=x_2+ix_3=0,$$

est le plan isotrope mené par l'axe x_1; ce plan contient une droite isotrope menée par $\mathfrak{I}$ dans le plan $x_2\,x_3$; cette droite est une génératrice (4) de la développable circonscrite à la quadrique et au cercle à l'infini; d'autre part le cercle R se réduit ici à un point qui correspond sur la déformée au point d'intersection de cette génératrice avec le plan tangent à la quadrique.

Les systèmes I, 2O jouent un grand rôle dans la théorie des surfaces isothermiques (Systèmes orthogonaux et cycliques, § 94). La surface décrite par le cercle point (R) admet une surface asso-

ciée; c'est évidemment celle qui est décrite par le point du plan tangent à la déformée qui correspond au point d'intersection du plan tangent à la quadrique avec la génératrice (H') de la développable. On a donc le résultat suivant :

Si H *et* H' *sont deux génératrices parallèles de la développable circonscrite à la quadrique et au cercle de l'infini, aux points de rencontre de ces génératrices avec un plan tangent de la quadrique correspondent sur la déformée des points* A *et* A' *qui décrivent des surfaces associées.*

Les surfaces décrites par A et A' sont rapportées à leurs lignes de courbure et entre les rayons de courbure R et R_1 de la première et les rayons R' et R'_1 de la seconde existe la relation :

$$RR'_1 + R_1R' = c^{te}$$

[Systèmes orthogonaux et cycliques, § 94].

A chacune de ces surfaces (A), (A') on peut faire correspondre ∞^2 surfaces isothermiques. Ces surfaces isothermiques sont étudiées au chapitre suivant.

49. La droite $G(Y_1, Y_2, \ldots, Y_5)$ [§ 48] décrit dans l'espace à cinq dimensions une congruence O, 3I, 4I. Le réseau qui lui correspond par orthogonalité des éléments est aussi un réseau O, 3I, 4I; c'est donc un réseau O applicable à la fois sur l'espace à quatre et sur l'espace à trois dimensions. Nous allons étudier les propriétés de ces réseaux.

Considérons, d'une manière générale, un réseau (P) de l'espace à trois qui est O et applicable sur un réseau (Q) de l'espace à quatre; autrement dit, le réseau (P) est O, 2C. Au réseau (P) correspond un déterminant O :

$$(20) \qquad \delta = \begin{vmatrix} \alpha_1, & \alpha_1, & \alpha_3 \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3 \\ \gamma_2, & \gamma_2, & \gamma_3 \end{vmatrix},$$

IMPRIMERIE NATIONALE.

dont je désigne les rotations par a, b, m, n, de sorte que :

$$(21)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial v} = bm, \\ \dfrac{\partial b}{\partial u} = an, \end{cases} \qquad ab + \frac{\partial m}{\partial v} + \frac{\partial n}{\partial u} = 0.$$

Au réseau (Q) correspond un déterminant O :

$$(22)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ y_1, & y_2, & y_3, & y_4 \\ \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & \xi_4 \\ \eta_1, & \eta_2, & \eta_3, & \eta_4 \end{vmatrix},$$

dont je désigne les rotations par A, B, E, F, m, n, de sorte que :

$$(23)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial v} = Bm, & \dfrac{\partial E}{\partial v} = Fm, \\ \dfrac{\partial B}{\partial u} = An, & \dfrac{\partial F}{\partial u} = En, \end{cases} \qquad AB + EF + \frac{\partial m}{\partial v} + \frac{\partial n}{\partial u} = 0.$$

Des équations (21) et (23) on déduit, comme au paragraphe 10, que l'on peut choisir les variables indépendantes de telle sorte que :

$$(24)\qquad \begin{cases} A^2 + E^2 - a^2 = 1, \\ B^2 + F^2 - b^2 = 1. \end{cases}$$

Il en résulte que l'on pourra former un déterminant O :

$$(25)\qquad \delta' = \begin{vmatrix} \alpha'_1, & \alpha'_2, & \alpha'_3 \\ \beta'_1, & \beta'_2, & \beta'_3 \\ \gamma'_1, & \gamma'_2, & \gamma'_3 \end{vmatrix},$$

dans lequel :

$$(26)\qquad \begin{cases} \beta'_1 = A, & \beta'_2 = E, & \beta'_3 = ia, \\ \gamma'_1 = B, & \gamma'_2 = E, & \gamma'_3 = ib. \end{cases}$$

Les rotations de δ' seront désignées par $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, m', n' et l'on a :

$$(27)\qquad m' = n, \qquad n' = m.$$

Cela posé, les quantités :

$$(28)\qquad \begin{cases} A\cos\theta, & E\cos\theta, & a\sin\theta, & m, \\ B\cos\theta, & F\cos\theta, & b\sin\theta, & n, \end{cases}$$

où θ est un angle constant, sont les rotations d'un déterminant O de l'espace à cinq dimensions :

$$(29)\qquad \Delta' = \begin{vmatrix} x'_1, & x'_2, \ldots, & x'_5 \\ y'_1, & y'_2, \ldots, & y'_5 \\ z'_1, & z'_2, \ldots, & z'_5 \\ \xi'_1, & \xi'_2, & \ldots, \xi'_5 \\ \eta'_1, & \eta'_2, \ldots, & \eta'_5 \end{vmatrix}.$$

À chaque valeur de θ correspond un déterminant Δ' qui fournit, dans l'espace à cinq dimensions, un réseau O applicable sur les réseaux (P) et (Q), c'est-à-dire un réseau O, 3I, 4I.

Considérons l'un de ces déterminants Δ' et cherchons la congruence O qui lui correspond par la loi d'orthogonalité des éléments. Nous appliquerons la méthode indiquée § 41 dans mon mémoire [Sur les systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques].

Les paramètres $(Y'_1, Y'_2, \ldots, Y'_5)$ de cette congruence (G) sont donnés par les formules :

$$Y'_k = \lambda \sin\theta x'_k + \mu \sin\theta y'_k + \nu \cos\theta z'_k, \tag{30}$$

où λ, μ, ν satisfont aux équations :

$$\begin{cases} \lambda A + \mu E + \nu a = 0, \\ \lambda B + \mu E + \nu b = 0. \end{cases} \tag{31}$$

En se reportant au déterminant δ', on voit que l'on peut prendre :

$$\lambda = \alpha'_1, \qquad \mu = \alpha'_2, \qquad \nu = i\alpha'_3. \tag{32}$$

Les paramètres directeurs de G sont donc :

$$Y'_k = \alpha'_1 \sin\theta x'_k + \alpha'_2 \sin\theta y'_k + i\alpha'_3 \cos\theta z'_k. \tag{33}$$

Cette congruence est applicable sur la congruence de l'espace à trois dimensions qui a pour paramètres :

$$\alpha'_1 \sin\theta, \qquad \alpha'_2 \sin\theta, \qquad i\alpha'_3 \cos\theta. \tag{34}$$

D'autre part on a :

$$\begin{cases} \sum Y'^2_k = \sin^2\theta\,(\alpha'^2_1 + \alpha'^2_2) - \alpha'^2_3 \cos^2\theta \\ \qquad = \sin^2\theta - \alpha'^2_3 = \alpha'^2_1 + \alpha'^2_2 - \cos^2\theta. \end{cases} \tag{35}$$

Les formules (35) montrent que la congruence (G) est 3I, les coordonnées complémentaires étant :

$$(36) \qquad \alpha_3' \quad \text{et} \quad i\sin\theta$$

et qu'elle est en outre 4I, les coordonnées complémentaires étant :

$$(37) \qquad i\alpha_1', \qquad i\alpha_2', \qquad \cos\theta.$$

Il reste à comparer ces résultats avec ceux du paragraphe précédent.

50. Pour identifier les congruences des numéros 48 et 49, il faut écrire que les quantités :

$$X_1,\ X_2,\ X_3, \qquad Z_1,\ Z_2, \qquad T_1,\ T_2,\ T_3$$

du paragraphe 48 sont proportionnelles aux quantités :

$$i\alpha_3'\cos\theta, \quad \alpha_1'\sin\theta, \quad \alpha_2'\sin\theta, \quad \alpha_3', \quad i\sin\theta, \quad \cos\theta, \quad i\alpha_1', \quad i\alpha_2'$$

du paragraphe 49. En évaluant de deux manières les rapports :

$$\frac{T_2}{X_2},\ \frac{T_3}{X_3},\ \frac{Z_1}{X_1},\ \frac{T_1}{Z_2}$$

on trouve :

$$\frac{T_2}{X_2}=\frac{T_3}{X_3}=\frac{ih_1}{\sqrt{1+h_1^2}}=\frac{i}{\sin\theta},$$

$$\frac{Z_1}{X_1}=h_1=\frac{\alpha_3'}{i\alpha_3'\cos\theta}=\frac{1}{i\cos\theta},$$

$$\frac{T_1}{Z_2}=\frac{-1}{1+h_1^2}=\frac{\cos\theta}{i\sin\theta};$$

il en résulte :

$$(38) \qquad \sin\theta = \frac{\sqrt{1+h_1^2}}{h_1}, \qquad \cos\theta = \frac{-i}{h_1},$$

ce qui montre qu'il peut y avoir proportionnalité entre ces deux groupes de quantités. D'autre part la quantité Z_2 du paragraphe 48 peut s'écrire :

$$Z_2 = h_2 \cos\omega\, X_1 + h_2 \sin\omega\, X_2 - h_2 r \sin\omega\,(Y_4 + iY_5).$$

Cette relation, étant homogène, doit exister entre les éléments correspondants du paragraphe 49. On doit donc avoir :

$$(38\,bis) \quad h_2 r \sin\omega\,(Y'_4 + iY'_5) = h_2 \cos\omega i \cos\theta\,.\,\alpha'_3 + h_2 \sin\omega \sin\theta \alpha'_1 - i\sin\theta.$$

En remplaçant $Y'_4 + iY'_5$ par sa valeur (33 *bis*) on aura :

$$(39) \begin{cases} h_2 r \sin\omega\,[\alpha'_1 \sin\theta\,(x'_4 + ix'_5) + \alpha'_2 \sin\theta\,(y'_4 + iy'_5) + i\alpha'_3 \cos\theta\,(z'_4 + iz'_5)] \\ = h_2 \sin\omega \sin\theta\,.\,\alpha'_1 + ih_2 \cos\omega \cos\theta\,.\,\alpha'_3 - i\sin\theta. \end{cases}$$

En différentiant cette formule par rapport à u et par rapport à v on trouve :

$$(40) \begin{cases} h_2 r \sin\omega\,[\beta'_1 \sin\theta\,(x'_4 + ix'_5) + \beta'_2 \sin\theta\,(y'_4 + iy'_5) + i\beta'_3 \cos\theta\,(z'_4 + iz'_5)] \\ = h_2 \sin\omega \sin\theta\,.\,\beta'_1 + ih_2 \cos\omega \cos\theta\,.\,\beta'_3, \end{cases}$$

et

$$(41) \begin{cases} h_2 r \sin\omega\,[\gamma'_1 \sin\theta\,(x'_4 + ix'_5) + \gamma'_2 \sin\theta\,(y'_4 + iy'_5) + i\gamma'_3 \cos\theta\,(z'_4 + iz'_5)] \\ = h_2 \sin\omega \sin\theta\,.\,\gamma'_1 + ih_2 \cos\omega \cos\theta\,.\,\gamma'_3. \end{cases}$$

Des formules (39), (40), (41) on déduit :

$$(42)\qquad \begin{cases} h_2 r \sin\omega\,(x_4' + i x_5') = -i\alpha_1' + h_2 \sin\omega, \\ h_2 r \sin\omega\,(y_4' + i y_5') = -i\alpha_2', \\ h_2 r \sin\omega\,(z_4' + i z_5') = -\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\alpha_3' + h_2 \cos\omega. \end{cases}$$

On en déduit, en différentiant :

$$(43)\qquad \begin{cases} h_2 r \sin\omega\,(\xi_4' + i\xi_5') = -\dfrac{i\mathfrak{A}}{\cos\theta}, \\ h_2 r \sin\omega\,(\eta_4' + i\eta_5') = -\dfrac{i\mathfrak{B}}{\cos\theta}. \end{cases}$$

Élevons au carré les équations (42), (43) et ajoutons :

$$0 = -\frac{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2}{\cos^2\theta} - (\alpha_1'^2 + \alpha_2') + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\alpha_3'^2 - 2ih_2 \sin\omega\,\alpha_1' - 2h_2 \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cos\omega\,\alpha_3' + h_2^2,$$

et après simplifications :

$$\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 - \alpha_3'^2 = -2ih_2 \cos^2\theta \sin\omega\,\alpha_1' - 2h_2 \sin\theta\cos\theta\,.\cos\omega\,.\,\alpha_3' + (h_2^2 - 1)\cos^2\theta,$$

et en remplaçant $\sin\theta$ et $\cos\theta$ par les valeurs (38), on a :

$$(44)\qquad \mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 - \alpha_3'^2 = \frac{2ih_2 \sin\omega}{h_1^2}\alpha_1' + \frac{2ih_2\sqrt{1+h_1^2}}{h_1^2}\cos\omega\,\alpha_3' + \frac{1-h_1^2}{h_1^2},$$

ce qui donne une propriété du déterminant δ' ; nous allons montrer que c'est une propriété caractéristique dans la question.

51. Supposons qu'entre les éléments et les rotations du déterminant δ' existe la relation :

$$(45) \qquad \mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 - \alpha_3'^2 = 2r_1\alpha_1' + 2r_2\alpha_2' + 2r_3\alpha_3' + s,$$

r_1, r_2, r_3, s étant des constantes. Je vais montrer qu'on peut former une colonne ordinaire ou isotrope de chacun des déterminants Δ'; considérons celui qui correspond à $\theta = \varphi$; je dis qu'on peut prendre :

$$(46) \qquad \xi' = \rho\mathfrak{A}, \qquad \eta' = \rho\mathfrak{B},$$

ρ étant une constante que je vais déterminer; d'abord on a bien :

$$\frac{\partial\xi'}{\partial v} = n\eta', \qquad \frac{\partial\eta'}{\partial u} = m\xi';$$

cherchons à calculer x'; on devra avoir :

$$\frac{\partial x'}{\partial u} = \mathrm{A}\cos\varphi\,\xi' = \rho\cos\varphi\,\mathfrak{A}\beta_1',$$

$$\frac{\partial x'}{\partial v} = \mathrm{B}\cos\varphi\,\eta' = \rho\cos\varphi\,\mathfrak{B}\gamma_1'.$$

On voit que x' ne diffère de $\rho\cos\varphi\alpha_1'$ que par une constante; on peut faire des remarques analogues pour y' et z'; on est donc conduit à poser :

$$(47) \qquad \begin{cases} x' = \rho\cos\varphi\alpha_1' + p_1, \\ y' = \rho\cos\varphi\alpha_2' + p_2, \\ z' = -i\rho\sin\varphi\alpha_3' + p_3. \end{cases}$$

Élevons au carré les équations (46) et (47) et ajoutons membre à membre; on aura, en désignant par S la somme des carrés des premiers membres :

$$(48)\qquad \begin{cases} S=\rho^2\left[\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2-\alpha_3'^2\right]+2\rho p_1\cos\varphi\alpha_1'+2\rho p_2\cos\varphi\alpha_2' \\ \qquad -2i\rho p_3\sin\varphi\alpha_3'+\rho^2\cos^2\varphi+p_1^2+p_2^2+p_3^2. \end{cases}$$

En comparant les équations (45) et (48), on voit que l'on doit prendre :

$$(49)\qquad p_1=-\rho\frac{r_1}{\cos\varphi},\qquad p_2=-\rho\frac{r_2}{\cos\varphi},\qquad p_3=-\rho\frac{ir_3}{\sin\varphi}.$$

On aura ensuite :

$$(50)\qquad S=\rho^2\left[s+\cos^2\varphi+\frac{r_1^2+r_2^2}{\cos^2\varphi}-\frac{r_3^2}{\sin^2\varphi}\right].$$

Si la parenthèse n'est pas nulle, on peut choisir ρ de telle sorte que S soit égal à l'unité; on a donc bien une colonne du déterminant. Si la parenthèse est nulle, on donnera une valeur quelconque à la constante ρ; S sera nul; on a alors une combinaison isotrope des colonnes du déterminant. En égalant à zéro la parenthèse, on a une équation du 3e degré en $\cos^2\varphi$; nous l'appellerons *l'équation caractéristique.*

Formons cette équation; ici :

$$r_1=\frac{ih_2\sin\omega}{h_1^2},\qquad r_2=0,\qquad r_3=\frac{ih_2\sqrt{1+h_1^2}\cos\omega}{h_1^2},\qquad s=\frac{1-h_2^2}{h_1^2}.$$

L'équation caractéristique est donc, en remplaçant $\cos^2\varphi$ par x :

$$(51)\qquad \frac{1-h_2^2}{h_1^2}+x-\frac{h_2^2\sin^2\omega}{h_1^4x}+\frac{h_2^2(1+h_1^2)\cos^2\omega}{h_1^4(1-x)}=0,$$

IMPRIMERIE NATIONALE.

ou, en mettant sous forme entière :

$$F(x) = h_1^4 x^2 (1-x) + h_1^2 (1-h_2^2) x (1-x) - h_2^2 \sin^2\omega (1-x) + x h_2^2 (1+h_1^2) \cos^2\omega = 0.$$

Cette équation peut se mettre sous la forme :

$$(52) \qquad F(x) = -\left(x + \frac{1}{h_1^2}\right)\left[h_1^4 x^2 - h_1^2 x (h_1^2 + h_2^2) + h_1^2 h_2^2 \sin^2\omega\right] = 0.$$

L'une des racines de l'équation est $-\frac{1}{h_1^2}$, ce qui était évident, puisque $\varphi = \theta$ correspond à une solution isotrope; les deux autres racines satisfont à l'équation :

$$(53) \qquad h_1^4 x^2 - h_1^2 x (h_1^2 + h_2^2) + h_1^2 h_2^2 \sin^2\omega = 0.$$

En comparant avec l'équation (14), on voit que ces racines sont :

$$\frac{p^2}{h_1^2} \text{ et } \frac{q^2}{h_1^2}.$$

En résumé, les racines de l'équation caractéristique sont :

$$-\frac{1}{h_1^2}, \qquad \frac{p^2}{h_1^2}, \qquad \frac{q^2}{h_1^2}.$$

Quand le point J se déplace sur la focale, ces racines sont multipliées par un même facteur; ces racines sont toujours distinctes, elles ne peuvent jamais devenir égales à zéro ou à un.

On voit qu'il existe trois déterminants Δ'' pour lesquels les quantités données par les formules (46) et (47) forment une combinai-

son isotrope des colonnes. Chacun de ces déterminants peut servir à former une congruence O, 3I, 4J ayant les propriétés de celle que nous avons considérée [§ 48]. Il suffit de prendre ces quantités pour les quantités $x'_4+ix'_5$, $y'_4+iy'_5$, $z'_4+iz'_5$, de former les quantités Y'_k correspondantes. On voit bien que l'on aura une relation de la forme :

$$Y'_4+iY'_5=a_1X_1+a_2X_2+a_3Z_2,$$

a_1, a_2, a_3 étant des constantes. Seulement, ces trois congruences ne correspondent pas à la même quadrique; si l'on prend par exemple celle qui correspond au déterminant pour lequel on a :

$$\cos^2\varphi=\frac{p^2}{h_1^2},$$

elle intervient dans la déformation de la quadrique dans laquelle p^2 et q^2 sont remplacés par $+\frac{1}{p^2}$ et $-\frac{q^2}{p^2}$. Cette quadrique est une de celles qui se déduisent de la primitive par la méthode de M. Servant [§ 6].

Les déterminants Δ'' que nous venons de considérer possèdent la propriété suivante : Si l'on prend deux quelconques d'entre eux, on peut former dans le premier une combinaison linéaire des quantités ξ', dans le second une autre combinaison linéaire des ξ', telles que les deux combinaisons ainsi formées ne diffèrent que par un facteur constant.

On démontre, par un calcul analogue à celui que nous venons de faire et que nous reproduirons pour d'autres déterminants, que, si la propriété précédente existe pour deux déterminants Δ, elle existe pour tous; que les déterminants pour lesquels la combinaison considérée est isotrope correspondent à des valeurs de $\cos^2\varphi$, qui sont solutions d'une équation du 3e degré. Il résulte de ce qui pré-

cède, que si cette équation a ses racines distinctes, différentes de zéro ou de un, on peut y faire correspondre la déformation d'une quadrique à axes inégaux.

52. Le point A [§ 48] décrit un réseau I, 2O; ce réseau est applicable sur un réseau (B) de l'espace à quatre dimensions. Aux réseaux (A) et (B) correspondent des déterminants δ, Δ et par suite des déterminants Δ'', comme au paragraphe 49. Nous allons étudier ces systèmes. Conservons d'abord les notations du numéro 49; d'après la théorie générale [Systèmes orthogonaux et systèmes cycliques, § 95], quel que soit l'angle θ, la droite qui a pour paramètres directeurs $X'_k = x'_k + iy'_k$, décrit une congruence I, 2O; elle est applicable sur une congruence de l'espace à quatre dimensions dont les paramètres sont $\frac{x_k + iy_k}{\cos\theta}$. Soit χ une combinaison isotrope de $X'_1, X'_2, X'_3, X'_4, X'_5$; prenons par exemple :

$$\chi = X'_1 + iX'_5.$$

Le point (R) $\frac{X'_1}{\chi}, \frac{X'_2}{\chi}, \frac{X'_3}{\chi}$ décrit un réseau O applicable sur un réseau décrit par le point (S) de l'espace à quatre dimensions qui a pour coordonnées $\frac{x_k + iy_k}{\chi \cos\theta}$. Il est facile de former les déterminants qui correspondent à ces réseaux. Nous mettrons les éléments des nouveaux déterminants entre crochets. Pour le point R on trouve facilement :

$$(54) \qquad \begin{cases} |\alpha_k| = z'_k - \frac{X'_k}{\chi}(z'_4 + iz'_5), \\ |\beta_k| = \xi'_k - \frac{X'_k}{\chi}(\xi'_4 + i\xi'_5), \qquad k = 1, 2, 3. \\ |\gamma_k| = \eta'_k - \frac{X'_k}{\chi}(\eta'_4 + i\eta'_5). \end{cases}$$

On trouve pour les rotations de ce déterminant :

$$(55)\qquad \begin{cases} |a| = a\sin\theta - \dfrac{(A+iE)\cos\theta}{\chi}(z'_4+iz'_5), \\ |b| = b\sin\theta - \dfrac{(B+iF)\cos\theta}{\chi}(z'_4+iz'_5). \end{cases}$$

Le déterminant qui correspond au point (S) se déduit de Δ en appliquant la transformation du paragraphe 20. Je ne ferai pas le calcul, qui est inutile. Transformons le déterminant Δ'' qui correspond à la valeur φ de θ; on applique aussi la méthode indiquée au paragraphe 20. Pour éviter toute confusion, je mettrai deux accents pour les éléments de l'ancien déterminant, et deux accents avec un crochet pour ceux du nouveau. On trouve en particulier :

$$(56)\qquad \begin{cases} |z''_k| = z''_k - \dfrac{\sin\varphi\cos\theta}{\cos\varphi\sin\theta}\cdot\dfrac{z'_4+iz'_5}{\chi}(x''_k+iy''_k), \\ |\xi''_k| = \xi''_k - \dfrac{\cos\theta}{\cos\varphi}\cdot\dfrac{\xi'_4+i\xi'_5}{\chi}(x''_k+iy''), \\ |\eta''_k| = \eta''_k - \dfrac{\cos\theta}{\cos\varphi}\cdot\dfrac{\eta'_4+i\eta'_5}{\chi}(x''_k+y''_k). \end{cases}$$

Les nouvelles rotations qui correspondent à la ligne $|z''|$ sont :

$$(57)\qquad \begin{cases} a\sin\varphi - \dfrac{\sin\varphi\cos\theta}{\sin\theta}\dfrac{A+iE}{\chi}(z'_4+iz'_5), \\ b\sin\varphi - \dfrac{\sin\varphi\cos\theta}{\sin\theta}\dfrac{B+iF}{\chi}(z+z'_5). \end{cases}$$

On voit que ces rotations sont égales aux rotations (55) multipliées par $\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}$; autrement dit, dans le nouveau système, le transformé de Δ'' correspond à un angle ψ tel que :

$$(58)\qquad \sin\psi = \frac{\sin\varphi}{\sin\theta}.$$

Au déterminant δ nous allons faire correspondre un déterminant d'ordre 5, de la façon suivante. Déterminons Y_1, Y_2, Y_3 par les quadratures :

$$(59)\qquad \frac{\partial Y_k}{\partial u}=(A+iE)\beta_k, \qquad \frac{\partial Y_k}{\partial v}=(B+iF)\gamma_k;$$

puis posons :

$$(60)\qquad \begin{cases} Y_4+iY_5=-\sum_1^3 Y_k^2, & Y_4-iY_5=1, \\ \beta_4+i\beta_5=-2\sum_1^3 \beta_k Y_k, & \beta_4-i\beta_5=0, \\ \gamma_4+i\gamma_5=-2\sum_1^3 \gamma_k Y_k, & \gamma_4-i\gamma_5=0. \end{cases}$$

Le déterminant que nous allons former est celui qui correspond au réseau $\left(\frac{Y_k}{\chi}\right)$ de l'espace à cinq. Nous désignerons les éléments de ce déterminant par l'indice 1, au lieu d'accent; nous mettons toujours ces éléments entre crochets. On aura :

$$(61)\qquad \begin{cases} |\xi_k^1|=\beta_k-\frac{Y_k\cos\theta}{\chi}(\xi_4'+i\xi_5'), \\ |\eta_k^1|=\gamma_k-\frac{Y_k\cos\theta}{\chi}(\eta_4'+i\eta_5'). \end{cases}$$

En particulier, on a :

$$(62)\qquad \begin{cases} |\xi_4^1|-i|\xi_5^1|=-\frac{\cos\theta}{\chi}(\xi_4'+i\xi_5'), \\ |\eta_4^1|-i|\eta_5^1|=-\frac{\cos\theta}{\chi}(\eta_4'+i\eta_5'). \end{cases}$$

Enfin, ce nouveau déterminant correspond à un angle ψ tel que :

$$\sin\psi_1 = \frac{1}{\sin\theta}. \tag{63}$$

Jusqu'ici, nous avons supposé l'angle θ quelconque ; mais si l'on veut avoir le réseau décrit par le point A [§ 48], il faut supposer :

$$\sin^2\theta = \frac{1+h_1^2}{h_1^2}.$$

Dans ce cas, les résultats se simplifient; pour cela, remarquons que si ξ'' désigne une combinaison linéaire des quantités ξ_k'', $x''+iy''$ la même combinaison des $x_k''+iy_k''$, enfin $|\xi''|$ la même combinaison des $|\xi_k''|$, on a d'après les formules (56) :

$$|\xi''| = \xi'' - \frac{\cos\theta}{\cos\varphi}\frac{\xi_5'+i\xi_5'}{\chi}(x''+iy''). \tag{64}$$

Prenons pour ξ'' la combinaison qui est proportionnelle à $\xi_4'+i\xi_5'$; on a :

$$\xi'' = \lambda(\xi_4'+i\xi_5'),$$

d'où l'on déduit :

$$x'' = \lambda\frac{\cos\varphi}{\cos\theta}(x_4'+ix_5') + q_1,$$

$$y'' = \lambda\frac{\cos\varphi}{\cos\theta}(y_4'+iy_5') + q_2,$$

λ, q_1, q_2 étant des constantes; on en déduit :

$$x''+iy'' = \lambda\frac{\cos\varphi}{\cos\theta}\chi + (q_1+iq_2),$$

et, par suite :

$$|\xi''| = \lambda \frac{\cos\theta}{\cos\varphi} \frac{q_1 + iq_2}{\chi}.$$

Tous les $|\xi''|$ sont proportionnels. Le système transformé possède donc la même propriété que le système primitif; si ξ'' est une combinaison isotrope des ξ''_k, il en est de même pour $|\xi''|$. D'autre part, les équations (62) montrent que les $|\xi''|$ sont proportionnels à $|\xi'_4| - i|\xi'_5|$; par conséquent, si θ, φ_1, φ_2 sont les angles qui correspondent dans le système primitif aux solutions isotropes, ces angles, dans le système transformé, ont pour sinus :

$$\frac{\sin\varphi_1}{\sin\theta}, \qquad \frac{\sin\varphi_2}{\sin\theta}, \qquad \frac{1}{\sin\theta}.$$

On en déduit que l'équation caractéristique du système transformé a pour racines :

$$\frac{1+p^2}{1+h_1^2}, \qquad \frac{1+q^2}{1+h_1^2}, \qquad \frac{1}{1+h_1^2}.$$

On voit, tout de suite, qu'elles correspondent aux trois quadriques qui se déduisent de la primitive par la méthode de M. Servant.

CHAPITRE VIII.

SUR LES SURFACES ISOTHERMIQUES QUI SE PRÉSENTENT DANS LA DÉFORMATION DES QUADRIQUES.

53. Nous avons vu dans le chapitre précédent qu'à chaque génératrice de la développable circonscrite à la quadrique et au cercle à l'infini, correspond sur la déformée un système de sphères I, 2O; il y a ∞^2 systèmes de cercles O, 2I conjugués au précédent; on sait, d'autre part, que les pôles d'un cercle d'un système O, 2I décrivent des surfaces isothermiques. Il en résulte qu'à chacune de ces génératrices on peut faire correspondre ∞^2 surfaces isothermiques [Systèmes orthogonaux et systèmes cycliques, chap. XI]. Nous partirons des déterminants δ, Δ, δ', Δ' du chapitre précédent. Formons une combinaison isotrope des quantités x et y du déterminant Δ; prenons, par exemple, la combinaison $x+iy$; posons :

$$(1)\qquad X_1=x_1+iy_1,\quad X_2=x_2+iy_2,\quad X_3=x_3+iy_3,\quad X_4=x_4+iy_4.$$

Soit χ une combinaison isotrope de X_1, X_2, X_3, X_4; prenons par exemple :

$$(2)\qquad \chi=X_3+iX_4.$$

Le point $\frac{X_1}{\chi}, \frac{X_2}{\chi}$ décrit un réseau O dans l'espace à deux dimensions; ce réseau O est applicable sur les réseaux de l'espace à cinq qui ont pour coordonnées les quantités $\frac{x'_k+iy'_k}{\chi\cdot\cos\theta}$. Nous obtenons ainsi un réseau O de l'espace à deux, applicable sur une infinité de

IMPRIMERIE NATIONALE.

réseaux O de l'espace à cinq; j'ai montré [Systèmes orthogonaux et systèmes cycliques, chap. XI] le rôle fondamental que jouent ces réseaux dans la théorie des surfaces isothermiques. Nous allons former les déterminants qui correspondent à ces nouveaux réseaux.

1° Nous allons former les déterminants qui correspondent aux réseaux O qui ont pour coordonnées $\frac{x'_k + iy'_k}{\chi}$. On applique la transformation du paragraphe 20 en supposant $\theta = \chi$.

On a ici :

$$\frac{\partial \chi}{\partial u} = (A + iF)(\xi_4 + i\xi_5) = (A + iE)\cos\theta \times \frac{\xi_4 + i\xi_5}{\cos\theta};$$

il faut donc supposer ici :

$$(3) \qquad q = \frac{\xi_4 + i\xi_5}{\cos\theta}, \qquad r = \frac{\eta_4 + i\eta_5}{\cos\theta}.$$

Pour transformer la troisième ligne, il faut déterminer p_3 par les équations :

$$\frac{\partial p_3}{\partial u} = a\sin\theta \times \frac{\xi_4 + i\xi_5}{\cos\theta}, \qquad \frac{\partial p_3}{\partial v} = b\sin\theta \times \frac{\xi_4 + i\xi_5}{\cos\theta}.$$

On a donc :

$$(4) \qquad p_3 = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} X,$$

où X est déterminé par les quadratures :

$$(5) \qquad \frac{\partial X}{\partial u} = a(\xi_4 + i\xi_5), \qquad \frac{\partial X}{\partial v} = b(\eta_4 + i\eta_5).$$

En appliquant la formule du paragraphe 20, on aura :

$$(6)\qquad \begin{cases} |z'_k| = z'_k - \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\dfrac{X}{\chi}(x'_k + iy'_k), \\ |\xi'_k| = \xi'_k - \dfrac{1}{\cos\theta}\dfrac{\xi_4 + i\xi_5}{\chi}(x'_k + iy'_k), \\ |\eta'_k| = \eta'_k - \dfrac{1}{\cos\theta}\dfrac{\eta_4 + i\eta_5}{\chi}(x'_k + iy'_k). \end{cases}$$

On trouve pour les rotations qui correspondent à z'_k :

$$(7)\qquad \begin{cases} |a\sin\theta| = a\sin\theta - \sin\theta\,\dfrac{A + iE}{\chi}X, \\ |b\sin\theta| = b\sin\theta - \sin\theta\,\dfrac{B + iF}{\chi}X. \end{cases}$$

2° Déterminons Y_1, Y_2, Y_3 par les quadratures :

$$(8)\qquad \frac{\partial Y_k}{\partial u} = (A + iE)\beta_k, \qquad \frac{\partial Y_k}{\partial v} = (B + iF)\gamma_k.$$

Le point Y_1, Y_2, Y_3 est précisément celui qui décrit le réseau A [§ 48], si l'on prend comme point de départ les déterminants obtenus paragraphe 52. Posons :

$$(9)\qquad \begin{cases} Y_4 - iY_5 = -\sum Y_k^2, & Y_4 + iY_5 = 1, \\ \alpha_4 - i\alpha_5 = -\sum \alpha_k Y_k, & \alpha_4 + i\alpha_5 = 0, \\ \beta_4 - i\beta_5 = -\sum \beta_k Y_k, & \beta_4 + i\beta_5 = 0, \\ \gamma_4 - i\gamma_5 = -\sum \gamma_k Y_k, & \gamma_4 + i\gamma_3 = 0. \end{cases}$$

Cela posé, le point qui a pour coordonnées $\frac{Y_k}{\chi}$ décrit un réseau O applicable sur le réseau plan. Je mets un indice 1 en haut et un crochet pour les éléments du déterminant correspondant. On trouve facilement :

$$(10)\qquad \begin{cases} |Z_k^1| = \alpha_k - \dfrac{\lambda}{\chi} Y_k, \\ |\xi_k^1| = \beta_k - \dfrac{\xi_3 + i\xi_4}{\chi} Y_k, \\ |\eta_k^1| = \gamma_k - \dfrac{\eta_3 + i\eta_4}{\chi} Y_k, \end{cases}$$

et pour les rotations qui correspondent à la ligne Z_k', on trouve :

$$(11)\qquad a - \frac{A + iE}{\chi} X \qquad \text{et} \qquad b - \frac{B + iF}{\chi} X.$$

Transformation du déterminant δ'. — On applique les formules du paragraphe 21 en supposant $\theta = \chi$. Les quantités h, l, X_3 du paragraphe 21 ont ici pour valeurs $\xi_3 + i\xi_4$, $\eta_3 + i\eta_4$, iX. On aura donc :

$$(12)\qquad \begin{cases} |\alpha_3^1| = \alpha_3' - i\dfrac{\alpha_1' + i\alpha_2'}{\chi} X, \\ |\beta_3^1| = \beta_3' - i\dfrac{\beta_1' + i\beta_2'}{\chi} X, \\ |\gamma_3^1| = \gamma_3' - i\dfrac{\gamma_1' + i\gamma_2'}{\chi} X. \end{cases}$$

54. Nous avons formé ainsi les déterminants orthogonaux qui se rencontrent dans la théorie des surfaces isothermiques [Systèmes orthogonaux et systèmes cycliques, §§ 91 et 92]. Nous avons d'abord le déterminant δ :

$$(13)\qquad \delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

que donne la représentation sphérique d'une surface isothermique ; ses relations seront représentées par :

$$(14)\qquad \begin{cases} a & m=\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}, \\ b & n=\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}. \end{cases}$$

Ce déterminant δ est le transformé du déterminant δ', de sorte que, par exemple, la quantité désignée par α_3 dans ce paragraphe est la quantité $|\alpha_3^1|$ du paragraphe précédent.

Nous formerons ensuite une série de déterminants Δ :

$$(15)\qquad \Delta=\begin{vmatrix} x_1, & \ldots, & x_5 \\ y_1, & \ldots, & y_5 \\ z_1, & \ldots, & z_5 \\ \xi_1, & \ldots, & \xi_5 \\ \eta_1, & \ldots, & \eta_5 \end{vmatrix}$$

ayant pour rotations :

$$(16)\qquad \begin{cases} \mu\beta_1, & \mu\beta_2, & \mu\beta_3, & m_1=-\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}, \\ \mu\gamma_1, & \mu\gamma_2, & \mu\gamma_3, & n_1=\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}, \end{cases}$$

où μ est une constante. Chaque déterminant Δ' du chapitre précédent donne naissance à un déterminant Δ; les quantités z_k de Δ sont les mêmes que celles qui ont été désignées par $|z_k^1|$ dans le paragraphe précédent.

La rotation de la troisième ligne de Δ pour la variable u est, d'une part :

$$\mu\beta_3 = \mu|\beta_3^1| = \mu\left[\beta_3' - i\frac{\beta_1' + i\beta_2'}{\chi}X\right]$$
$$= \mu i\left[a - \frac{A + iE}{\chi}X\right],$$

d'autre part, cette rotation est la nouvelle valeur de $|a\sin\theta|$; or :

$$|a\sin\theta| = a\sin\theta - \sin\theta\frac{A + iE}{\chi}X.$$

En comparant, on voit que le déterminant Δ' du chapitre précédent qui correspond à θ se transforme dans le déterminant Δ de ce paragraphe qui correspond à :

$$\mu = -i\sin\theta. \tag{17}$$

On voit de même que le déterminant du réseau $\frac{Y_1}{\chi}$ [§ 53, 2°], est le déterminant Δ pour lequel :

$$\mu = -i. \tag{18}$$

Nous allons indiquer la propriété caractéristique de ces déterminants Δ; pour cela, nous partirons des déterminants Δ' du chapitre précédent; on sait que dans chacun de ces déterminants, on peut former une combinaison linéaire ou isotrope des colonnes; les éléments de cette combinaison x', y', z', ξ', η' sont donnés par les formules 46 et 47, § 51 [nous mettrons θ à la place de φ dans ces formules]; si l'on fait la transformation, on aura (6) :

$$|\xi'| = \xi' - \frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{\xi_4 + i\xi_5}{\chi}(x' + iy'). \tag{19}$$

Mais :

$$(20) \qquad x' + iy' = \rho \cos\theta\,(\alpha'_1 + i\alpha'_2) + p_1 + ip_2.$$

On aura donc :

$$(21) \qquad |\xi'| = \rho\left[\mathfrak{A} - \frac{\xi_4 + i\xi_3}{\chi}(\alpha'_1 + i\alpha'_2)\right] - \frac{p_1 + ip_2}{\cos\theta}\cdot\frac{\xi_3 + i\xi_4}{\chi}.$$

Toutes les fonctions $|\xi'|$ s'expriment donc en fonction linéaire des deux fonctions :

$$\mathfrak{A} - \frac{\xi_4 + i\xi_3}{\chi}(\alpha'_1 + i\alpha'_2) \qquad \text{et} \qquad \frac{\xi_3 + i\xi_4}{\chi}.$$

Nous pouvons remarquer que $\frac{\xi_3 + i\xi_4}{\chi}$ est l'élément $\xi'_4 + i\xi'_5$ du déterminant Δ qui correspond à $p = -i$. On arrive donc au résultat suivant :

On peut, dans chaque déterminant Δ, *former une combinaison linéaire ou isotrope des éléments* ξ, *de telle sorte qu'entre les combinaisons qui appartiennent à trois déterminants quelconques existe une relation linéaire et homogène.*

Si ξ' est une combinaison isotrope pour Δ', il en sera de même pour $|\xi'|$ relativement à Δ; donc :

Il existe quatre déterminants Δ *pour lesquels la combinaison considérée est isotrope :* 1° *celui pour lequel* $\mu^2 = -1$; 2° *ceux qui proviennent des trois déterminants* Δ' *qui possèdent la même propriété.*

Il en résulte que les valeurs de μ^2 qui correspondent à ces quatre déterminants sont :

$$\frac{p^2 - h_1^2}{1 + h_1^2}, \qquad \frac{q^2 - h_1^2}{1 + h_1^2}, \qquad \frac{-h_1^2}{1 + h_1^2}, \qquad \frac{-1 - h_1^2}{1 + h_1^2}.$$

Nous allons étudier les systèmes isothermiques qui possèdent la propriété indiquée.

55. Considérons d'abord le cas le plus simple où il existe deux déterminants Δ, que je désigne par Δ et Δ_1, tels qu'une combinaison linéaire des ξ de Δ ne diffère que par un facteur constant d'une combinaison des ξ_1 de Δ_1.

Écrivons dans chaque déterminant la colonne qui correspond à la combinaison prise et soient μ et μ_1 les valeurs de μ qui correspondent aux déterminants Δ et Δ_1 :

$$\Delta = \begin{vmatrix} x, & \dots \\ y, & \dots \\ z, & \dots \\ \xi, & \dots \\ \eta, & \dots \end{vmatrix} \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} x_1, & \dots \\ y_1, & \dots \\ z_1, & \dots \\ \xi_1, & \dots \\ \eta_1, & \dots \end{vmatrix}$$

Par hypothèse, on a :

$$\mu\xi = \rho \cdot \mu_1\xi_1, \tag{22}$$

et, par conséquent :

$$\mu\eta = \rho \cdot \mu_1\eta_1. \tag{23}$$

Comparons x et x_1; on aura :

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \mu\beta_1 \cdot \xi, \qquad \frac{\partial x_1}{\partial u} = \mu_1\beta_1 \cdot \xi_1;$$

donc :

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \rho \frac{\partial x_1}{\partial u} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = \rho \frac{\partial x_1}{\partial v},$$

et des équations analogues pour y et z. On aura donc :

$$(24)\qquad \begin{cases} x = \rho x_1 + a_1, \\ y = \rho y_1 + a_2, \\ z = \rho z_1 + a_3. \end{cases}$$

Auxquels on peut joindre :

$$(25)\qquad \begin{cases} \xi = \rho \dfrac{\mu_1}{\mu} \xi_1 \\ \eta = \rho \dfrac{\mu_1}{\mu} \eta_1. \end{cases}$$

Élevons au carré les équations (24) et (25) et ajoutons les résultats; on aura, en désignant par S et S_1 les sommes des carrés des éléments des colonnes mises en évidence dans Δ et Δ_1 :

$$(26)\qquad \begin{cases} S = \rho^2 \left[S_1 - \left(\dfrac{1}{\mu_1^2} - \dfrac{1}{\mu^2} \right) (\mu_1^2 \xi_1^2 + \mu_1^2 \eta_1^2) \right] + 2\rho (a_1 x_1 + a_2 y_1 + a_3 z_1) \\ \qquad\qquad + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2. \end{cases}$$

On voit qu'entre les éléments de la colonne de Δ_1 doit exister une relation de la forme :

$$(27)\qquad \mu_1^2 \xi_1^2 + \mu_1^2 \eta_1^2 = 2 r_1 x + 2 r_2 y_1 + 2 r_3 z_1 + s.$$

Posons pour simplifier :

$$(28)\qquad \frac{1}{\mu_1^2} = \lambda_1, \qquad \frac{1}{\mu^2} = \lambda.$$

IMPRIMERIE NATIONALE.

En comparant (27) et (28), on voit que l'on doit avoir :

$$(29)\qquad a_1=\rho r_1(\lambda_1-\lambda),\quad a_2=\rho r_2(\lambda_1-\lambda),\quad a_3=\rho r_3(\lambda_1-\lambda).$$

En portant ces valeurs dans l'équation (26), on trouve :

$$(30)\qquad S=\rho^2[S_1-(\lambda_1-\lambda)s+(\lambda_1-\lambda)^2(r_1^2+r_2^2+r_3^2)].$$

Si la parenthèse n'est pas nulle, on pourra déterminer ρ de telle sorte que S se réduira à l'unité; les quantités x, y, z, ξ, η données par les formules (24) et (25) forment une colonne ordinaire de Δ. Si au contraire la parenthèse est nulle, ces quantités formeront une combinaison isotrope des colonnes de Δ. Les valeurs de λ qui correspondent aux solutions isotropes sont données par l'équation :

$$(31)\qquad S_1-(\lambda_1-\lambda)s+(\lambda_1-\lambda)^2(r_1^2+r_2^2+r_3^2)=0.$$

C'est l'équation caractéristique. Laissons de côté le cas où cette équation est une identité [ce cas ne peut se présenter que pour les déterminants analogues d'ordre supérieur à cinq]. On peut donc énoncer le résultat suivant :

Si dans deux déterminants Δ il existe une combinaison des ξ telle que les deux combinaisons ainsi formées ne diffèrent que par un facteur constant, il existera dans chaque déterminant Δ une combinaison analogue; toutes les combinaisons ainsi formées ne diffèrent de l'une d'elles que par un facteur constant. Les valeurs de λ qui donnent les déterminants pour lesquels la combinaison ainsi formée est isotrope sont données par l'équation caractéristique, qui est du second degré.

En remplaçant, dans l'équation (27), $\xi_1^2+\eta_1^2$ par

$$S_1-(x_1^2+y_1^2+z_1^2),$$

on obtient :

$$(32)\qquad x_1^2+y_1^2+z_1^2+2\lambda_1(r_1x_1+r_2y_1+r_3z_1)=S_1-\lambda_1 s,$$

ce qui peut s'écrire :

$$(33)\qquad (x_1+\lambda_1 r_1)^2+(y_1+\lambda_1 r_2)^2-(z_1+\lambda_1 r_3)^2 = S_1-\lambda_1 s+\lambda_1^2(r_1^2+r_2^2+r_3^2).$$

D'autre part, les formules :

$$(34)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u}(x_1+\lambda_1 r_1)=\mu_1\beta_1\xi_1, & \dfrac{\partial}{\partial v}(x_1+\lambda_1 r_1)=\mu_1\gamma_1\eta_1,\\ \dfrac{\partial}{\partial u}(y_1+\lambda_1 r_2)=\mu_1\beta_2\xi_1, & \dfrac{\partial}{\partial v}(y_1+\lambda_1 r_2)=\mu_1\gamma_2\eta_1,\\ \dfrac{\partial}{\partial u}(z_1+\lambda_1 r_3)=\mu_1\beta_3\xi_1, & \dfrac{\partial}{\partial v}(z_1+\lambda_1 r_3)=\mu_1\gamma_3\eta_1, \end{cases}$$

montrent que le point qui a pour coordonnées : $x_1+\lambda_1 r_1$, $y_1+\lambda_1 r_2$, $z_1+\lambda_1 r_3$ décrit un réseau O qui correspond au déterminant δ; le second membre de l'équation (33) étant une constante, ces coordonnées sont proportionnelles à α_1, α_2, α_3. En désignant par K^2 la valeur du second membre de l'équation (33), on a donc :

$$(35)\qquad \begin{cases} x_1=K^2\alpha_1-\lambda_1 r_1,\\ y_1=K^2\alpha_2-\lambda_1 r_2,\\ z_1=K^2\alpha_3-\lambda_1 r_3. \end{cases}$$

On en déduit en différentiant :

$$(36)\qquad \begin{cases} \mu_1\xi_1=K^2 a,\\ \mu_1\eta_1=K^2 b. \end{cases}$$

En portant ces valeurs des x_1, y_1, z_1, ξ_1, η_1 dans l'équation (27), on a :

$$(37)\qquad K^4(a^2+b^2)=2K^2(r_1\alpha_1+r_2\alpha_2+r_3\alpha_3) - 2\lambda_1(r_1^2+r_2^2+r_3^2)+s.$$

ce qui donne une propriété du déterminant δ.

Signalons les deux cas particuliers suivants :

1° r_1, r_2, r_3 sont nuls, s est différent de zéro; on voit que a^2+b^2 est constant; les surfaces isothermiques sont des surfaces à courbure moyenne constante; dans ce cas, $\lambda=\infty$ est une racine simple de l'équation caractéristique;

2° $r_1=r_2=r_3=s=0$; a^2+b^2 est nul, les surfaces isothermiques correspondantes sont des surfaces minima.

Dans ce cas, l'équation caractéristique a une racine double infinie.

56. Supposons maintenant que dans trois des déterminants Δ, qui correspondent aux valeurs μ, μ_1, μ_2 de μ, on puisse former une combinaison de colonnes telles qu'entre les quantités ξ qui figurent dans ces colonnes (et par suite entre les quantités η) existe une relation linéaire et homogène. Désignons par Δ, Δ_1, Δ_2 les déterminants et écrivons seulement dans chacun d'eux la colonne considérée :

$$(38)\qquad \Delta=\begin{vmatrix} x,\dots \\ y,\dots \\ z,\dots \\ \xi,\dots \\ \eta,\dots \end{vmatrix},\qquad \Delta_1=\begin{vmatrix} x_1,\dots \\ y_1,\dots \\ z_1,\dots \\ \xi_1,\dots \\ \eta_1,\dots \end{vmatrix},\qquad \Delta_2=\begin{vmatrix} x_2,\dots \\ y_2,\dots \\ z_2,\dots \\ \xi_2,\dots \\ \eta_2,\dots \end{vmatrix}.$$

Par hypothèse on a :

$$(39)\qquad \begin{cases} \mu\xi=\rho_1\mu_1\xi_1+\rho_2\mu_2\xi_2, \\ \mu\eta=\rho_1\mu_1\eta_1+\rho_2\mu_2\eta_2, \end{cases}$$

ρ_1 et ρ_2 étant des constantes; on en déduit en intégrant :

$$(40)\qquad \begin{cases} x=\rho_1 x_1+\rho_2 x_2+a_1, \\ y=\rho_1 y_1+\rho_2 y_2+a_2, \\ z=\rho_1 z_1+\rho_2 z_2+a_3, \end{cases}$$

auxquelles nous joignons les équations (39) écrites ainsi :

$$(41)\qquad \begin{cases} \xi=\rho_1\frac{\mu_1}{\mu}\xi_1+\rho_2\frac{\mu_2}{\mu}\xi_2, \\ \eta=\rho_1\frac{\mu_1}{\mu}\eta_1+\rho_2\frac{\mu_2}{\mu}\eta_2. \end{cases}$$

Désignons encore par S, S_1, S_2 la somme des carrés des éléments des colonnes écrites de $\Delta, \Delta_1, \Delta_2$.

Posons ensuite :

$$(42)\qquad \begin{cases} h_1=\frac{\partial}{\partial u}(\mu_1\xi_1)-\frac{\partial\varphi}{\partial u}\mu_1\eta_1, \qquad h_2=\frac{\partial}{\partial u}(\mu_2\xi_2)-\frac{\partial\varphi}{\partial u}\mu_2\eta_2, \\ l_1=\frac{\partial}{\partial v}(\mu_1\eta_1)+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\mu_1\xi_1, \qquad l_2=\frac{\partial}{\partial v}(\mu_2\eta_2)+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\mu_2\xi_2. \end{cases}$$

Introduisons ensuite les quantités S_{12} et S_{21} définies par :

$$(43)\qquad \begin{cases} \left(\frac{1}{\mu_2^2}-\frac{1}{\mu_1^2}\right)S_{12}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2+\frac{\mu_1}{\mu_2}(\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2), \\ \left(\frac{1}{\mu_1^2}-\frac{1}{\mu_2^2}\right)S_{21}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2+\frac{\mu_2}{\mu_1}(\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2). \end{cases}$$

Des équations (43) on déduit en différentiant :

$$(44)\qquad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial u}S_{12}=h_1\mu_2\xi_2, \qquad \frac{\partial}{\partial u}S_{21}=h_2\mu_1\xi_1, \\ \frac{\partial}{\partial v}S_{12}=l_1\mu_2\eta_2, \qquad \frac{\partial}{\partial v}S_{21}=l_2\mu_1\eta_1. \end{cases}$$

On trouve d'ailleurs, tout de suite :

$$(45)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u}\left[(\mu_i\xi_i)^2+(\mu_i\eta_i)^2\right]=2h_i\mu_i\xi_i, \\ \dfrac{\partial}{\partial v}\left[(\mu_i\xi_i)^2+(\mu_i\eta_i)^2\right]=2l_i\mu_i\xi_i. \end{cases}$$

Des équations (43) on déduit d'ailleurs :

$$(46)\qquad \begin{cases} S_{12}+S_{21}=\mu_1\mu_2(\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2), \\ -\frac{1}{\mu_1^2}S_{12}-\frac{1}{\mu_2^2}S_{21}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2, \\ \left(\frac{1}{\mu^2}-\frac{1}{\mu_1^2}\right)S_{12}+\left(\frac{1}{\mu^2}-\frac{1}{\mu_2^2}\right)S_{21}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2+\frac{\mu_1\mu_2}{\mu^2}(\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2). \end{cases}$$

Cela posé, élevons au carré les équations (40) et (41) et ajoutons :

$$(47)\qquad \begin{cases} S=\rho_1^2S_1+\rho_1^2\left(\frac{1}{\mu^2}-\frac{1}{\mu_1^2}\right)(\mu_1^2\xi_1^2+\mu_1^2\eta_1^2) \\ +\rho_2^2S_2+\rho_2^2\left(\frac{1}{\mu^2}-\frac{1}{\mu_2^2}\right)(\mu_2^2\xi_2^2+\mu_2^2\eta_2^2) \\ +2\rho_1\rho_2\left(\frac{1}{\mu^2}-\frac{1}{\mu_1^2}\right)S_{12}+2\rho_1\rho_2\left(\frac{1}{\mu^2}-\frac{1}{\mu_2^2}\right)S_{21} \\ +2\rho_1(a_1x_1+a_2y_1+a_3z_1)+2\rho_2(a_1x_2+a_2y_2+a_3z_2)+a_1^2+a_2^2+a_3^2, \end{cases}$$

Si l'on différentie l'équation (47) par rapport à u, le résultat est un produit de deux facteurs; l'un est :

$$2(\rho_1\mu_1\xi_1+\rho_2\mu_2\xi_2);$$

l'autre :

$$\rho_1\left(\frac{1}{\mu^2}-\frac{1}{\mu_1^2}\right)h_1+\rho_2\left(\frac{1}{\mu^2}-\frac{1}{\mu_2^2}\right)h_2+a_1\beta_1+a_2\beta_2+a_3\beta_3.$$

Comme nous supposons qu'il n'existe pas de relation linéaire entre ξ_1 et ξ_2, c'est le second facteur qui doit être nul, On trouve un résultat analogue en différentiant par rapport à v. On doit donc avoir :

$$(48)\quad \begin{cases} \rho_1\left(\frac{1}{\mu^2}-\frac{1}{\mu_1^2}\right)h_1+\rho_2\left(\frac{1}{\mu^2}-\frac{1}{\mu_2^2}\right)h_2+a_1\beta_1+a_2\beta_2+a_3\beta_3=0, \\ \rho_1\left(\frac{1}{\mu^2}-\frac{1}{\mu_1^2}\right)l_1+\rho_2\left(\frac{1}{\mu^2}-\frac{1}{\mu_2^2}\right)l_2+a_1\gamma_1+a_2\gamma_2+a_3\gamma_3=0. \end{cases}$$

Autrement dit, on doit avoir des relations de la forme :

$$(49)\quad \begin{cases} p_1h_1+p_2h_2+r_1\beta_1+r_2\beta_2+r_3\beta_3=0, \\ p_1l_1+p_2l_2+r_1\gamma_1+r_2\gamma_2+r_3\gamma_3=0, \end{cases}$$

p_1, p_2, r_1, r_2, r_3 étant des constantes. Multiplions la première de ces équations par $2\mu_1\xi_1du$, la seconde par $2\mu_1\eta_1dv$ et ajoutons; on a au premier membre une différentielle totale exacte. Intégrons; on aura :

$$(50)\quad \begin{cases} p_1\left[\mu_1^2\xi_1^2+\mu_1^2\eta_1^2\right]+2p_2S_{21}+2\left(r_1x_1+r_2y_1+r_3z_1\right)=s_1, \\ \text{et de même :} \\ 2p_1S_{12}+p_2\left[\mu_2^2\xi_2^2+\mu_2^2\eta_2^2\right]+2\left(r_1x_2+r_2y_2+r_3z_2\right)=s_2, \end{cases}$$

s_1 et s_2 étant des constantes. Posons pour simplifier :

$$(51)\qquad \lambda=\frac{1}{\mu^2},\qquad \lambda_1=\frac{1}{\mu_1^2},\qquad \lambda_2=\frac{1}{\mu_2^2}.$$

La comparaison des équations (48) et (49) donne ensuite :

$$(52)\quad \begin{cases} \rho_1=\rho\frac{p_1}{\lambda-\lambda_1}, \\ \rho_2=\rho\frac{p_2}{\lambda-\lambda_2}, \end{cases} \qquad a_1=\rho r_1,\qquad a_2=\rho r_2,\qquad a_3=\rho r_3.$$

En portant ces valeurs dans l'équation (47) on trouve :

$$\frac{S}{\rho^2}=\frac{S_1p_1^2}{(\lambda-\lambda_1)^2}+\frac{S_2p_2^2}{(\lambda-\lambda_2)^2}$$
$$+\frac{p_1^2}{\lambda-\lambda_1}[\mu_1^2\xi_1^2+\mu_1^2\eta_1^2]+\frac{p_2^2}{\lambda-\lambda_2}[\mu_2^2\xi_2^2+\mu_2^2\eta_2^2]$$
$$+\frac{2p_1p_2}{\lambda-\lambda_2}S_{12}+\frac{2p_1p_2}{\lambda-\lambda_1}S_{21}$$
$$+\frac{2p_1}{\lambda-\lambda_1}(r_1x_1+r_2y_1+r_3z_1)+\frac{2p_2}{\lambda-\lambda_2}(r_1x_2+r_2y_2+r_3z_2)$$
$$+r_1^2+r_2^2+r_3^2+r_4^2.$$

En tenant compte des deux équations (50) on a :

$$(53)\qquad \frac{S^2}{\rho^2}=\frac{S_1p_1^2}{(\lambda-\lambda_1)^2}+\frac{S_2p_2^2}{(\lambda-\lambda_2)^2}+\frac{p_1s_1}{\lambda-\lambda_1}+\frac{p_2s_2}{\lambda-\lambda_2}+r_1^2+r_2^2+r_3^2.$$

On en déduit, comme au numéro précédent, le résultat suivant :

On peut, dans chaque déterminant Δ, *former une combinaison des* ξ *telle qu'entre trois quelconques de ces combinaisons existe une relation linéaire et homogène. Les déterminants* Δ *pour lesquels la combinaison est isotrope correspondent aux valeurs de* λ *données par l'équation :*

$$(54)\quad F(\lambda)=\frac{S_1p_1^2}{(\lambda-\lambda_1)^2}+\frac{S_2p_2^2}{(\lambda-\lambda_2)^2}+\frac{p_1s_1}{\lambda-\lambda_1}+\frac{p_2s_2}{\lambda-\lambda_2}+r_1^2+r_2^2+r_3^2=0.$$

C'est l'équation caractéristique. Elle est du 4e degré.

Considérons le cas particulier où r_1, r_2, r_3 sont nuls; l'équation caractéristique admet la racine $\lambda=\infty$. Dans ce cas on déduit des équations (50) :

$$p_1^2(\mu_1^2\xi_1^2+\mu_1^2\eta_1^2)+2p_1p_2(S_{12}+S_{21})+p_2^2(\mu_2^2\xi_2^2+\mu_2^2\eta_2^2)=p_1s_1+p_2s_2,$$

d'où, en tenant compte de la première des équations (46) :

$$(55)\qquad (p_1\mu_1\xi_1+p_2\mu_2\xi_2)^2+(p_1\mu_1\eta_1+p_2\mu_2\eta_2)^2=p_1s_1+p_2s_2.$$

Deux cas sont à considérer :

1° $p_1s_1+p_2s_2\gtrless 0$. Supposons $p_1s_1+p_2s_2=K^2$; on aura :

$$p_1\mu_1\xi_1+p_2\mu_2\xi_2=K\cos(\varphi-\varphi_0),\qquad p_1\mu_1\eta_1+p_2\mu_2\eta_2=-K\sin(\varphi-\varphi_0),$$

K et φ_0 étant des constantes.

2° $p_1s_1+p_2s_2=0$.

On aura :

$$p_1\mu_1\xi_1+p_2\mu_2\xi_2=Ke^{\pm i\varphi},\qquad p_1\mu_1\eta_1+p_2\mu_2\eta_2=\pm iKe^{\pm i\varphi};$$

dans ce cas ∞ est une racine double de l'équation caractéristique.

57. Remarque. — On voit tout de suite qu'en suivant la même méthode qu'au paragraphe précédent, on arrive au résultat général suivant :

Si entre les ξ de p déterminants Δ existe une relation linéaire et homogène, on pourra, dans chaque déterminant Δ, distinguer une combinaison des colonnes telle que si l'on prend p quelconque des déterminants Δ, il y a une relation linéaire et homogène entre les ξ de ces colonnes.

Les déterminants Δ pour lesquels la combinaison distinguée est une combinaison isotrope des colonnes correspondent à des valeurs de λ, données par une équation du degré $2p-2$.

Nous dirons que le système isothermique qui a servi de point de départ est un système singulier d'ordre $p-1$.

IMPRIMERIE NATIONALE.

Des propriétés analogues existent pour les réseaux O d'un espace d'ordre quelconque, applicables sur un réseau O de l'espace à deux dimensions.

58. Dans les équations (50) remplaçons $\xi_1^2+\eta_1^2$ et $\xi_2^2+\eta_2^2$ respectivement par :

$$S_1-(x_1^2+y_1^2+z_1^2) \quad \text{et} \quad S_2-(x_2^2+y_2^2+z_2^2);$$

on obtient :

$$-p_1(x_1^2+y_1^2+z_1^2)+2\lambda_1 p_2 S_{21}+2\lambda_1(r_1x_1+r_2y_1+r_3z_1)=\lambda_1 s_1-p_1S_1$$

$$2\lambda_2 p_1 S_{12}-p_2(x_2^2+y_2^2+z_2^2)+2\lambda_2(r_1x_2+r_2y_2+r_3z_2)=\lambda_2 s_2-p_2S_2,$$

Multiplions la première de ces équations par $-p_1\lambda_2^2$ et la seconde par $-p_2\lambda_1^2$; on aura, en tenant compte de la seconde des équations (46) :

$$(56)\quad \left\{\begin{array}{l}(p_1\lambda_2x_1+p_2\lambda_1x_2-\lambda_1\lambda_2r_1)^2+(p_1\lambda_2y_1+p_2\lambda_1y_2-\lambda_1\lambda_2r_2)^2\\ \qquad+(p_1\lambda_2z_1+p_2\lambda_1z_2-\lambda_1\lambda_2r_3)^2\\ \quad=\lambda_1^2\lambda_2^2\left[-\frac{p_1s_1}{\lambda_1}-\frac{p_2s_2}{\lambda_2}+\frac{p_1^2S_1^2}{\lambda_1^2}+\frac{p_2^2S_2^2}{\lambda_2^2}+r_1^2+r_2^2+r_3^2\right],\end{array}\right.$$

ou encore :

$$(57)\quad \left\{\begin{array}{l}\left(\frac{p_1}{\lambda_1}x_1+\frac{p_2}{\lambda_2}x_2-r_1\right)^2+\left(\frac{p_1}{\lambda_1}y_1+\frac{p_2}{\lambda_2}y_2-r_2\right)^2+\left(\frac{p_1}{\lambda_1}z_1+\frac{p_2}{\lambda_2}z_2-r_3\right)^2\\ \qquad=-\frac{p_1s_1}{\lambda_1}-\frac{p_2s_2}{\lambda_2}+\frac{p_1^2S_1^2}{\lambda_1^2}+\frac{p_2^2S_2^2}{\lambda_2^2}+r_1^2+r_2^2+r_3^2.\end{array}\right.$$

On voit que le point qui a pour coordonnées les trois parenthèses du premier membre de (57) décrit un réseau O correspondant au déterminant δ; le second membre de (57) est constant; dans le cas qui nous occupe, cette constante ne peut pas être nulle. [Pour les déterminants analogues à Δ et d'ordre supérieur à cinq, la quantité qu'on obtiendrait au second membre de (57) pourrait être nulle; on voit d'ailleurs que si cette quantité est nulle, l'équation caractéristique admet la racine $\lambda = 0$.] Désignons alors par K^2 la valeur de ce second membre.

On aura :

$$(58)\qquad \begin{cases} \frac{p_1}{\lambda_1} x_1 + \frac{p_2}{\lambda_2} x_2 - r_1 = K\alpha_1, \\ \frac{p_1}{\lambda_1} y_1 + \frac{p_2}{\lambda_2} y_2 - r_2 = K\alpha_2, \\ \frac{p_1}{\lambda_1} z_1 + \frac{p_2}{\lambda_2} z_2 - r_3 = K\alpha_3. \end{cases}$$

En différentiant les équations (58) on trouve :

$$(59)\qquad \begin{cases} \frac{p_1}{\lambda_1} \mu_1 \xi_1 + \frac{p_2}{\lambda_2} \mu_2 \xi_2 = Ka, \\ \frac{p_1}{\lambda_1} \mu_1 \eta_1 + \frac{p_2}{\lambda_2} \mu_2 \eta_2 = Kb. \end{cases}$$

Autrement dit, entre deux des quantités ξ distinguées et a [de même entre deux η et b] existe une relation linéaire et homogène; a peut être considéré comme une quantité ξ distinguée; c'est celle qui correspond à $\lambda = 0$.

On voit de même que si le système isothermique est un singulier d'ordre $p - 1$, entre $p - 1$ des quantités distinguées ξ et a existe une relation linéaire et homogène.

59. On sait que pour trouver les surfaces qui ont même représentation sphérique que les surfaces isothermiques que nous avons

considérées [réseaux O qui correspondent au déterminant δ], on peut suivre deux méthodes :

1° Les coordonnées (X_1, X_2, X_3) du point décrivant sont déterminées à l'aide des quadratures :

$$\frac{\partial X_k}{\partial u} = h\beta_k, \qquad \frac{\partial X_k}{\partial v} = l\gamma_k, \tag{60}$$

où h et l satisfont aux conditions suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial v} = l\frac{\partial \varphi}{\partial v}, \qquad \frac{\partial l}{\partial u} = -h\frac{\partial \varphi}{\partial u}. \tag{61}$$

2° On pose :

$$X_k = p\alpha_k + q\beta_k + r\gamma_k, \tag{62}$$

où q et r satisfont aux conditions [§ 17] :

$$\frac{\partial q}{\partial v} = -r\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \qquad \frac{\partial r}{\partial u} = q\frac{\partial \varphi}{\partial v}; \tag{63}$$

p est ensuite déterminé par les quadratures :

$$\frac{\partial p}{\partial u} = aq, \qquad \frac{\partial p}{\partial v} = br. \tag{64}$$

Les valeurs H, L de h l sont alors :

$$\begin{cases} \mathrm{H} = ap + \dfrac{\partial q}{\partial u} + r\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}, \\ \mathrm{L} = bp + \dfrac{\partial r}{\partial v} - q\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}. \end{cases} \tag{65}$$

On vérifie facilement que si h et l satisfont aux équations (61), les fonctions

$$(66) \qquad q_1 = \frac{\partial h}{\partial u} - l\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \qquad r_1 = \frac{\partial l}{\partial v} + h\frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

satisfont aux équations (63). Si donc on connaît une surface ayant la représentation sphérique donnée, on en déduira une nouvelle en prenant pour q et r les valeurs q_1 et r_1; on en déduira les valeurs h_1 et l_1 de h et l qui correspondent à cette nouvelle surface. En posant ensuite :

$$q_2 = \frac{\partial h_1}{\partial u} - l_1\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \qquad r_2 = \frac{\partial l_1}{\partial v} + h_1\frac{\partial \varphi}{\partial v},$$

on en déduira une autre surface et ainsi de suite. Pour effectuer les transformations il suffit d'effectuer les quadratures (64); je vais montrer que si la surface initiale est la sphère, on peut écrire, sous forme finie, tous les résultats.

Dans ce cas les valeurs initiales de h et l sont a et b; on a donc :

$$(67) \qquad q_1 = \frac{\partial a}{\partial u} - b\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \qquad r_1 = \frac{\partial b}{\partial v} + a\frac{\partial \varphi}{\partial v}.$$

On en déduit :

$$(68) \qquad p_1 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2),$$

et :

$$(69) \qquad h_1 = ap_1 + \frac{\partial q_1}{\partial u} + r_1\frac{\partial \varphi}{\partial v}, \qquad l_1 = bp_1 + \frac{\partial r_1}{\partial v} - q_1\frac{\partial \varphi}{\partial u}.$$

On aura ensuite :

$$q_2 = \frac{\partial h_1}{\partial u} - l_1\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \qquad r_2 = \frac{\partial l_1}{\partial v} + h_1\frac{\partial \varphi}{\partial v}.$$

On vérifie facilement que l'on a :

$$p_2 = ah_1 + bl_1 - \frac{1}{2}(p_1^2 + q_1^2 + r_1^2).$$

Ayant p_2, q_2, r_2 on en déduit h_2, l_2 puis q_3 et r_3. Il reste à déterminer p_3 sous forme finie. Pour cela, je m'appuie sur les identités suivantes que l'on vérifie facilement :

$$(70)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u}(h_i h_k + l_i l_k) = h_i q_{k+1} + h_k q_{i+1}, \\ \dfrac{\partial}{\partial u}(h_k^2 + l_k^2) = 2 h_k q_{k+1}, \end{cases}$$

et :

$$(71)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u}(p_i p_k + q_i q_k + r_i r_k) = h_i q_k + h_k q_i, \\ \dfrac{\partial}{\partial n}(p_k^2 + q_k^2 + r_k^2) = 2 h_k q_k, \end{cases}$$

avec les formules analogues pour les dérivées prises par rapport à v.

Cela posé, nous allons faire le calcul de p_3; la méthode suivie montrera bien qu'on peut calculer de même les valeurs de $p_1, \ldots, p_n$. On sait que p_3 est défini par les équations :

$$(72)\qquad \frac{\partial p_3}{\partial u} = a q_3, \qquad \frac{\partial p_3}{\partial v} = b p_3.$$

Or, on a successivement :

$$(73)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u}(a h_2 + b l_2) = a q_3 + h_2 q_1, \\ -\dfrac{\partial}{\partial u}(p_1 p_2 + q_1 q_2 + r_1 r_2) = -h_2 q_1 + h_1 q_2, \\ \dfrac{\partial}{\partial u}\dfrac{1}{2}(h_1^2 + l_1^2) = h_1 q_2. \end{cases}$$

En ajoutant, on voit que :

$$(74) \qquad p_3 = (ah_2 + bl_2) - (p_1p_2 + q_1q_2 + r_1r_2) + \frac{1}{2}(h_1^2 + l_1^2).$$

On voit bien quelle est la forme générale du résultat :

$$(75) \quad \begin{cases} p_n = (ah_{n-1} + bl_{n-1}) - (p_1p_{n-1} + q_1q_{n-1} + r_1r_{n-1}) \\ \qquad + (h_1h_{n-2} + l_1l_{n-2}) - (p_2p_{n-2} + q_2q_{n-2} + r_2r_{n-2}) + \dots \end{cases}$$

Ainsi, on peut obtenir, sous forme finie, toutes les surfaces qui se déduisent de la sphère par la transformation indiquée.

60. Les propriétés indiquées au paragraphe précédent s'appliquent à tous les systèmes isothermiques; il reste à voir ce qui se produit quand on prend des systèmes singuliers. Je dis que la condition nécessaire et suffisante pour que le système soit singulier d'ordre n, c'est que h_n soit une fonction linéaire et homogène de $a, h_1, h_2, \dots, h_{n-1}$ (l_n sera aussi la même fonction de $b, l_1, l_2 \dots, l_{n-1}$). Démontrons d'abord que la condition est nécessaire; supposons, pour fixer les idées, que le système soit un système singulier d'ordre 2. On aura [§ 58] des équations de la forme :

$$(76) \quad \begin{cases} a = \rho_1\mu_1\xi_1 + \rho_2\mu_2\xi_2, \\ b = \rho_1\mu_1\eta_1 + \rho_2\mu_2\eta_2, \end{cases}$$

d'où l'on déduira q_1 et r_1; le coefficient de ρ_1 dans q_1 est :

$$\frac{\partial}{\partial u}(\mu_1\xi_1) - \frac{\partial\varphi}{\partial u}\mu_1\eta_1,$$

et, en tenant compte des formules qui donnent les dérivées des éléments des déterminants Δ, ce coefficient devient :

$$-\mu_1^2(\beta_1x_1 + \beta_2y_1 + \beta_3z_1).$$

On a donc :

$$(77)\quad \begin{cases} q_1 = -\rho_1\mu_1^2(\beta_1 x_1 + \beta_2 y_1 + \beta_3 z_1) - \rho_2\mu_2^2(\beta_1 x_2 + \beta_2 y_2 + \beta_3 z_2), \\ r_1 = -\rho_1\mu_1^2(\gamma_1 x_1 + \gamma_2 y_1 + \gamma_3 z_1) - \rho_2\mu_2^2(\gamma_1 x_2 + \gamma_2 y_2 + \gamma_3 z_2). \end{cases}$$

En intégrant on en déduit :

$$(78)\quad p_1 = -\rho_1\mu_1^2(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1 + \alpha_3 z_1) - \rho_2\mu_2^2(\alpha_1 x_2 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 z_2).$$

D'où l'on déduit facilement :

$$(79)\quad \begin{cases} h_1 = -\rho_1\mu_1^3\xi_1 - \rho_2\mu_2^3\xi_2, \\ l_1 = -\rho_1\mu_1^3\eta_1 - \rho_2\mu_2^3\eta_2. \end{cases}$$

En opérant sur h_1 et l_1 comme nous venons d'opérer sur a et b, on trouve :

$$(80)\quad \begin{cases} h_2 = \rho_1\mu_1^5\xi_1 + \rho_2\mu_2^5\xi_2, \\ l_2 = \rho_1\mu_1^5\eta_1 + \rho_2\mu_2^5\eta_2. \end{cases}$$

Les formules (76), (79), (80) montrent que h_2 est une fonction linéaire et homogène de h_1 et a.

Nous allons établir la réciproque; nous nous placerons dans le cas où h_3 est une fonction linéaire de a, h_1, h_2; on a donc par hypothèse :

$$(81)\quad \begin{cases} h_3 = va + v_1 h_1 + v_2 h_2, \\ l_3 = vb + v_1 l_1 + v_2 l_2, \end{cases}$$

ν, ν_1, ν_2 étant des constantes; désignons par X_{1i}, X_{2i}, X_{3i} les coordonnées du réseau qui correspond à h_i et l_i; de sorte que l'on a :

$$X_{ki} = p_i\alpha_k + q_i\beta_k + r_i\gamma_k. \tag{82}$$

Si je multiplie les équations (81), la première par β_k, la seconde par γ_k, j'aurai en intégrant :

$$X_{k3} = \nu\alpha_k + \nu_1 X_{k1} + \nu_2 X_{k2} + l_k, \tag{83}$$

les quantités l_k étant des constantes; en multipliant l'équation (83) par α_k et en faisant la somme des trois équations analogues, j'obtiens :

$$p_3 = \nu + \nu_1 p_1 + \nu_2 p_2 + l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + l_3\alpha_3, \tag{84}$$

et de même :

$$\begin{cases} q_3 = \nu_1 q_1 + \nu_2 q_2 + l_1\beta_1 + l_2\beta_2 + l_3\beta_3, \\ r_3 = \nu_1 r_1 + \nu_2 r_2 + l_1\gamma_1 + l_2\gamma_2 + l_3\gamma_3. \end{cases} \tag{85}$$

Cela posé, je vais montrer qu'on peut, en choisissant convenablement les constantes ρ_1, ρ_2, ρ_3, c_1, c_2, c_3 déterminer une colonne du déterminant Δ qui correspond à μ par les équations :

$$\begin{cases} \mu\xi = \rho a + \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2, \\ \mu\eta = \rho b + \rho_1 l_1 + \rho_2 l_2, \end{cases} \tag{86}$$

et

$$\begin{cases} x = \rho\alpha_1 + \rho_1 X_{11} + \rho_2 X_{12} + c_1, \\ y = \rho\alpha_2 + \rho_1 X_{21} + \rho_2 X_{22} + c_2, \\ z = \rho\alpha_3 + \rho_1 X_{31} + \rho_2 X_{32} + c_3. \end{cases} \tag{87}$$

IMPRIMERIE NATIONALE.

Les équations (87) sont d'ailleurs une conséquence des équations (86); si l'on désigne toujours par S la somme $x^2+y^2+z^2+\xi^2+\eta^2$ et par λ la valeur de $\frac{1}{\mu^2}$, on déduit des équations (86) et (87) :

$$
(88)\quad \left\{\begin{aligned}
S = {}& \rho^2\left[1+\lambda\left(a^2+b^2\right)\right]+\rho_1^2\left[p_1^2+q_1^2+r_1^2+\lambda\left(h_1^2+l_1^2\right)\right]\\
&+\rho_2^2\left[p_2^2+q_2^2+r_2^2+\lambda\left(h_2^2+l_2^2\right)\right]\\
&+2\rho_1\rho_2\left[p_1p_2+q_1q_2+r_1r_2+\lambda\left(h_1h_2+l_1l_2\right)\right]\\
&+2\rho_2\rho\left[p_2+\lambda\left(ah_2+bl_2\right)\right]+2\rho\rho_1\left[p_1+\lambda\left(ah_1+bl_1\right)\right]\\
&+2\rho\left(c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+c_3\alpha_3\right)+2\rho_1\left(c_1X_{11}+c_2X_{21}+c_3X_{31}\right)\\
&+2\rho_2\left(c_1X_{12}+c_2X_{22}+c_3X_{32}\right)+c_1^2+c_2^2+c_3^2.
\end{aligned}\right.
$$

Prenons la dérivée du second membre par rapport à u; le résultat est un produit de deux facteurs; l'un est :

$$2\left(a\rho+h_1\rho_1+h_2\rho_2\right);$$

l'autre est :

$$(89)\qquad \lambda\rho_2q_3+\left(\lambda\rho_1+\rho_2\right)q_2+\left(\lambda\rho+\rho_1\right)q_1+c_1\beta_1+c_2\beta_2+c_3\beta_3;$$

de même, la dérivée du second membre de (88) par rapport à v est un produit de deux facteurs :

$$2\left(b\rho+l_1\rho_1+l_2\rho_2\right)$$

et

$$(90)\qquad \lambda\rho_2r_3+\left(\lambda\rho_1+\rho_2\right)r_2+\left(\lambda\rho+\rho_1\right)r_1+c_1\gamma_1+c_2\gamma_2+c_3\gamma_3.$$

Cela posé, soit ω une constante quelconque; déterminons ρ, ρ_1, ρ_2, c_1, c_2, c_3 par les équations :

$$(91)\qquad \frac{\lambda\rho_2}{-1}=\frac{\lambda\rho_1+\rho_2}{v_1}=\frac{\lambda\rho+\rho_1}{v_2}=\frac{c_1}{l_1}=\frac{c_2}{l_2}=\frac{c_3}{l_3}=\omega.$$

Portons les valeurs ainsi déterminées dans l'équation (88); on aura :

$$S = \omega^2 F(\lambda), \tag{92}$$

où $F(\lambda)$ a la forme suivante :

$$F(\lambda) = A_0 + \frac{A_1}{\lambda} + \frac{A_2}{\lambda^2} + \ldots + \frac{A_6}{\lambda^6}. \tag{93}$$

Or, avec les valeurs choisies pour ρ, ρ_1, ρ_2, c_1, c_2, c_3, on voit, en tenant compte des équations (85) que les deux expressions (89) et (90) sont nulles; les dérivées de $F(\lambda)$, par rapport à u et v sont nulles; $F(\lambda)$ est donc constant, et cela quel que soit λ; il en résulte que A_0, A_1, A_2, . . . , A_6 ne dépendent pas de u et v; ce sont des constantes absolues. Si la valeur choisie pour λ n'annule pas $F(\lambda)$, on peut choisir ω de telle sorte que S se réduise à l'unité; les quantités x, y, z, ξ, η forment une colonne ordinaire de Δ; si $F(\lambda)$ est nulle, ces expressions sont les éléments d'une colonne isotrope.

L'équation caractéristique est donc :

$$F(\lambda) = 0.$$

Quand on connaît le déterminant δ, on peut évidemment calculer les valeurs des coefficients A_0, A_1, . . . , A_6. Il suffit de former l'expression de ces quantités et de donner à u et v des valeurs particulières. On peut donc énoncer le résultat suivant, qui est très important :

Quand on a un système isothermique singulier, on peut, connaissant seulement le déterminant δ, former l'équation caractéristique.

61. Considérons les déterminants Δ qui correspondent à un système isothermique quelconque et posons :

$$\theta_k = \xi_k + i\eta_k, \qquad \chi_k = \xi_k - i\eta_k. \tag{94}$$

On vérifie facilement [Systèmes orthogonaux et systèmes cycliques, § 64] que les fonctions θ_k et χ_k satisfont respectivement aux équations :

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial v} = \left[-i\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right]\theta, \tag{95}$$

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial u\partial v} = \left[i\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right]\chi. \tag{96}$$

L'équation (95) admet la solution $e^{-i\varphi}$ et l'équation (96) la solution $e^{i\varphi}$. À chaque déterminant Δ, et par conséquent à chaque valeur de λ, correspond un groupe de cinq solutions de l'équation (95) dont la somme des carrés est nulle. On obtient ainsi ce que j'ai appelé les groupes de *solutions quadratiques* de l'équation de M. Moutard. On peut former un nouveau groupe de telles solutions qui correspond à la valeur $\lambda = \infty$. Pour cela, je détermine Z_1, Z_2, Z_3 pour les équations :

$$\frac{\partial Z_k}{\partial u} = e^{+i\varphi}\beta_k, \qquad \frac{\partial Z_k}{\partial v} = +ie^{+i\varphi}\gamma_k, \tag{96 bis}$$

et je pose :

$$Z_4 + iZ_5 = -\sum_1^3 Z_k^2, \qquad Z_4 - iZ_5 = 1. \tag{97}$$

Les cinq fonctions $Z_1e^{-i\varphi}$, $Z_2e^{-i\varphi}$, . . . , $Z_5e^{-i\varphi}$ satisfont à l'équation (95); on voit que $e^{-i\varphi}$ est une solution isotrope du groupe considéré.

Réciproquement, prenons un groupe quelconque de solutions quadratiques θ_1, θ_2, θ_3, θ_4, θ_5; formons une combinaison isotrope de ces solutions; prenons, par exemple, la combinaison $\theta_4 - i\theta_5$. Le point qui a pour coordonnées :

$$\frac{\theta_1}{\theta_4 - i\theta_5}, \qquad \frac{\theta_2}{\theta_4 - i\theta_5}, \qquad \frac{\theta_3}{\theta_4 - i\theta_5}$$

décrit une surface isothermique; il y correspondra un système de déterminants Δ: la valeur de la fonction φ qui correspond à ce nouveau système est donnée par la formule :

$$e^{-i\varphi} = \theta_4 - i\theta_3.$$

Voyons maintenant ce qui arrive lorsque le système est singulier; supposons le système singulier d'ordre 2; on sait que si l'on prend trois déterminants Δ quelconques, on a des relations de la forme :

$$\mu\xi = p_1\mu_1\xi_1 + p_2\mu_2\xi_2,$$

$$\mu\eta = p_1\mu_1\eta_1 + p_2\mu_2\eta_2,$$

d'où :

$$\mu\xi \pm i\mu\eta = p_1(\mu_1\xi_1 \pm i\mu_1\eta_1) + p_2(\mu_2\xi_2 \pm i\mu_2\eta_2);$$

donc :

On peut, dans chaque groupe de solutions quadratiques, former une combinaison linéaire ou isotrope des solutions, de telle sorte qu'entre les combinaisons qui appartiennent à trois groupes quelconques existe une relation linéaire.

Je dis que la même propriété existe à l'égard du groupe qui correspond à $\lambda = \infty$.

Supposons d'abord que r_1, r_2, r_3 soient nuls; on a [§ 56] :

$$p_1\mu_1\xi_1 + p_2\mu_2\xi_2 = \cos\varphi,$$

$$p_1\mu_1\eta_1 + p_2\mu_2\eta_2 = -\sin\varphi,$$

ou :

$$p_1\mu_1\xi_1 + p_2\mu_2\xi_2 = e^{-i\varphi},$$

$$p_1\mu_1\eta_1 + p_2\mu_2\eta_2 = ie^{-i\varphi},$$

suivant que $p_1s_1 + p_2s_2$ est différent de zéro ou non. Dans l'un ou

l'autre cas, $e^{-i\varphi}$, qui est une solution isotrope du groupe $\lambda=\infty$, est une combinaison linéaire des deux solutions :

$$\mu_1\xi_1+i\mu_1\eta_1 \quad \text{et} \quad \mu_2\xi_2+i\mu_2\eta_2;$$

l'équation caractéristique admet bien la racine $\lambda=\infty$; seulement, dans le second cas, cette racine est une racine double.

Supposons maintenant que r_1, r_2, r_3 ne sont pas tous nuls; multiplions la première des équations (50) par p_1, la seconde par p_2 et ajoutons. On trouve :

$$(98)\quad \begin{cases} (p_1\mu_1\xi_1+p_2\mu_2\xi_2)^2+(p_1\mu_1\eta_1+p_2\mu_2\eta_2)^2+2r_1(p_1x_1+p_2x_2) \\ \qquad +2r_2(p_1y_1+p_2y_2)+2r_3(p_1z_1+p_2z_2)=p_1s_1+p_2s_2. \end{cases}$$

On en déduit, en différentiant et en posant :

$$(99)\quad \begin{cases} q=p_1\mu_1\xi_1+p_2\mu_2\xi_2, & \mathrm{P}=\dfrac{\partial q}{\partial u}-r\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}, \\ r=p_1\mu_1\eta_1+p_2\mu_2\eta_2, & \mathrm{Q}=\dfrac{\partial r}{\partial v}+q\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}: \end{cases}$$

$$(100)\quad \begin{cases} \mathrm{P}+r_1\beta_1+r_2\beta_2+r_3\beta_3=0, \\ \mathrm{Q}+r_1\gamma_1+r_2\gamma_2+r_3\gamma_3=0. \end{cases}$$

Or, si je pose :

$$(101)\qquad \mathrm{T}_1=q\cos\varphi-r\sin\varphi, \qquad \mathrm{T}_2=q\sin\varphi+r\cos\varphi,$$

j'ai :

$$(102)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\mathrm{T}_1}{\partial u}=\mathrm{P}\cos\varphi, & \dfrac{\partial\mathrm{T}_2}{\partial u}=\mathrm{P}\sin\varphi, \\ \dfrac{\partial\mathrm{T}_1}{\partial v}=-\mathrm{Q}\sin\varphi, & \dfrac{\partial\mathrm{T}_2}{\partial v}=\mathrm{Q}\cos\varphi, \end{cases}$$

et par conséquent :

$$\frac{\partial(T_1+iT_2)}{\partial u}=-e^{i\varphi}(r_1\beta_1+r_2\beta_2+r_3\beta_3),$$

$$\frac{\partial(T_1+iT_2)}{\partial v}=-ie^{i\varphi}(r_1\gamma_1+r_2\gamma_2+r_3\gamma_3);$$

et par conséquent :

$$T_1+iT_2=-(r_1Z_1+r_2Z_2+r_3Z_3)+c;$$

et en multipliant les deux membres par $e^{-i\varphi}$, j'aurai :

$$\begin{aligned} q+ir&=p_1(\mu_1\xi_1+i\mu_1\eta_1)+p_2(\mu_2\xi_2+i\mu_2\eta_2)\\ &=-r_1Z_1e^{-i\varphi}-r_2Z_2e^{-i\varphi}-r_3Z_3e^{-i\varphi}+Ce^{-i\varphi}. \end{aligned}$$

Le second membre est une combinaison linéaire des solutions du groupe $\lambda=\infty$; cette combinaison sera isotrope si $r_1^2+r_2^2+r_3^2$ est nul. On voit que dans ce cas l'équation caractéristique admet la solution $\lambda=\infty$.

CHAPITRE IX.

TRANSFORMATION DES SYSTÈMES ISOTHERMIQUES. PROPRIÉTÉS DES ÉQUATIONS CARACTÉRISTIQUES.

62. Considérons un système isothermique quelconque; nous pourrons, en appliquant la méthode du paragraphe 17, former des réseaux O qui correspondent à ces déterminants.

Pour cela, je détermine q et r par les équations :

$$(1)\qquad \frac{\partial q}{\partial v}=r\frac{\partial\varphi}{\partial v},\qquad \frac{\partial r}{\partial u}=-q\frac{\partial\varphi}{\partial u}.$$

Puis je détermine p_1, p_2, p_3 par les quadratures :

$$(2)\qquad \frac{\partial p_k}{\partial u}=\beta_k q,\qquad \frac{\partial p_k}{\partial v}=\gamma_k r.$$

Cela posé, j'aurai un réseau $(X_1,\ldots,X_3)$ qui correspond au déterminant Δ de paramètre μ en posant :

$$(3)\qquad X_k=\mu\left[p_1x_k+p_2y_k+p_3z_k\right]+q\xi_k+r\eta_k$$

Pour ce réseau on aura :

$$(4)\qquad \begin{cases} \mathcal{S}=\mu^2\left[p_1\beta_1+p_2\beta_2+p_3\beta_3\right]+\dfrac{\partial q}{\partial u}-r\dfrac{\partial\varphi}{\partial u},\\ \mathcal{L}=\mu^2\left[p_1\gamma_1+p_2\gamma_2+p_3\gamma_3\right]+\dfrac{\partial r}{\partial v}+q\dfrac{\partial\varphi}{\partial v},\\ \sum X_k^2=\mu^2\left[p_1^2+p_2^2+p_3^2\right]+q^2+r^2. \end{cases}$$

Je puis aussi former un réseau de l'espace à deux dimensions (Z_1, Z_2) en posant :

$$(5) \qquad Z_1 = q\cos\varphi - r\sin\varphi, \qquad Z_2 = q\sin\varphi + r\cos\varphi.$$

Pour ce réseau on aura :

$$(6) \qquad \begin{cases} h_1 = \dfrac{\partial q}{\partial u} - r\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}, \\ l_1 = \dfrac{\partial r}{\partial v} + q\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}, \\ \sum Z_k^2 = q^2 + r^2. \end{cases}$$

63. *Première transformation.* — Prenons une combinaison isotrope des trois premières lignes des déterminants Δ; pour fixer les idées, prenons la combinaison $x + iy$ et posons :

$$(7) \qquad Y_k = x_k + iy_k.$$

Déterminons un réseau plan (T_1, T_2) par les équations :

$$(8) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial T_1}{\partial u} = (\beta_1 + i\beta_2)\cos\varphi, & \dfrac{\partial T_2}{\partial u} = (\beta_1 + i\beta_2)\sin\varphi, \\ \dfrac{\partial T_1}{\partial v} = -(\gamma_1 + i\gamma_2)\sin\varphi, & \dfrac{\partial T_2}{\partial v} = (\gamma_1 + i\gamma_2)\cos\varphi, \end{cases}$$

et posons :

$$(9) \qquad T_3 + iT_4 = -T_1^2 - T_2^2, \qquad T_3 - iT_4 = 1.$$

Les fonctions Y_k et T_k satisfont à l'équation de Laplace :

$$(10) \qquad \frac{\partial^2 Y}{\partial u\,\partial v} = \frac{\dfrac{\partial}{\partial v}(\beta_1 + i\beta_2)}{\beta_1 + i\beta_2}\frac{\partial Y}{\partial u} + \frac{\dfrac{\partial}{\partial u}(\gamma_1 + i\gamma_2)}{(\gamma_1 + i\gamma_2)}\frac{\partial Y}{\partial v}$$

IMPRIMERIE NATIONALE.

On a en outre :

$$(11)\qquad \begin{cases} \sum Y_k^2 = \sum T_k^2 = 0, \\ \sum dY_k^2 = \mu^2 \sum dT_k^2. \end{cases}$$

Soit alors θ une solution de l'équation (10); les points $\frac{Y_k}{\theta}, \frac{T_k}{\theta}$ décrivent des réseaux O; le ds^2 du premier ne diffère que par un facteur constant de celui du second. Si θ est une combinaison isotrope de T_1, T_2, T_3, T_4, le premier réseau est applicable sur un réseau plan. On obtient donc un système analogue à celui qui nous a servi de point de départ. Il reste à former les nouveaux déterminants Δ; pour cela j'applique la transformation du paragraphe 20. Je pose alors :

$$(11\ bis)\qquad \frac{\partial\theta}{\partial u} = (\beta_1 + i\beta_2)\,q, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial v} = (\gamma_1 + i\gamma_2)\,r,$$

et je détermine p_3 par les équations :

$$(12)\qquad \frac{\partial p_3}{\partial u} = \beta_3 q, \qquad \frac{\partial p_3}{\partial v} = \gamma_3 r.$$

On aura alors :

$$(13)\qquad \begin{cases} [x_k + iy_k] = \dfrac{x_k + iy_k}{\theta}, \\ |z_k| = z_k - \dfrac{p_3}{\theta}(x_k + iy_k), \\ |\xi_k| = \xi_k - \dfrac{q}{\mu\theta}(x_k + iy_k), \\ |\eta_k| = \eta_k - \dfrac{r}{\mu\theta}(x_k + iy_k). \end{cases}$$

Les rotations qui correspondent à $|z_k|$ sont :

$$(14)\qquad \mu\left[\beta_3-\frac{p_3}{\theta}(\beta_1+i\beta_2)\right] \qquad \text{et} \qquad \mu\left[\gamma_3-\frac{p_3}{\theta}(\gamma_1+i\gamma_2)\right].$$

Pour avoir le nouveau déterminant δ [§ 54], on applique la transformation du paragraphe 21.

On aura alors :

$$(15)\begin{cases} [\alpha_1+i\alpha_2]=\dfrac{\alpha_1+i\alpha_2}{\theta}, \quad [\beta_1+i\beta_2]=\dfrac{\beta_1+i\beta_2}{\theta}, \quad [\gamma_1+i\gamma_2]=\dfrac{\gamma_1+i\gamma_2}{\theta}, \\ |\alpha_3|=\alpha_3-\dfrac{p_3}{\theta}(\alpha_1+i\alpha_2), \\ |\beta_3|=\beta_3-\dfrac{p_3}{\theta}(\beta_1+i\beta_2), \\ |\gamma_3|=\gamma_3-\dfrac{p_3}{\theta}(\gamma_1+i\gamma_2). \end{cases}$$

On voit que les rotations de la ligne $|z_k|$ sont :

$$\mu|\beta_3|, \qquad \mu|\gamma_3|;$$

autrement dit, cette transformation ne change pas la valeur du paramètre μ.

64. Remarque. — Désignons par Y'_k les quantités Y_k qui correspondent à la valeur μ, et prenons pour θ une combinaison linéaire de $Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 Y_5$; les points $\frac{Y'_k}{\theta}, \frac{Y_k}{\theta}, \frac{T_k}{\theta}$ décrivent des réseaux O dont les ds^2 ne diffèrent que par un facteur constant; dans le second réseau on peut supprimer deux coordonnées, on obtient un réseau de l'espace à trois dimensions; le troisième $\frac{T_k}{\theta}$ est situé dans l'espace à quatre dimensions; enfin, les réseaux $\frac{Y'_k}{\theta}$ sont situés dans l'espace à cinq dimensions. On obtient ainsi un réseau O de

l'espace à trois dimensions applicable sur un réseau de l'espace à quatre dimensions et sur une infinité de réseaux de l'espace à cinq dimensions.

Ce sont des systèmes analogues à ceux que nous avons introduits dans l'étude des systèmes O, 3 I, 4 I [§ 49].

On forme sans difficulté les déterminants qui correspondent à ce nouveau système.

Seulement, si l'on veut obtenir exactement les systèmes O, 3 I, 4 I singuliers que l'on rencontre dans la déformation de la quadrique, il faut :

1° Que la combinaison distinguée de Δ soit isotrope, c'est-à-dire que $\frac{1}{\mu^2}$ soit une solution de l'équation caractéristique (54) [chap. VIII];

2° Que la combinaison isotrope de x, y, z soit convenablement choisie. Si l'on pose :

$$Y_k = \alpha x_k + \beta y_k + \gamma z_k, \qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0,$$

il faudra que :

$$\alpha r_1 + \beta r_2 + \gamma r_3 = 0,$$

r_1, r_2, r_3 étant les constantes définies § 56;

3° Que la combinaison isotrope de $Y_1, \ldots, Y_5$ que l'on choisit pour θ corresponde à la combinaison distinguée des colonnes de Δ.

En comparant avec les résultats du chapitre VII, on arrive au résultat suivant :

De tout système isothermique singulier d'ordre 2 dont l'équation caractéristique a pour racines λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, *on peut déduire des déformées de la quadrique :*

$$\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_4}\right) x_1^2 + \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_4}\right) x_2^2 + \left(\frac{1}{\lambda_3} - \frac{1}{\lambda_4}\right) x_3^2 = 1.$$

65. *Deuxième transformation.* — Considérons le déterminant Δ_1 qui correspond à la valeur μ_1 de μ :

$$(16)\qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} x'_1, & x'_2, \ldots, & x'_5 \\ y'_1, & y'_2, \ldots, & y'_5 \\ z'_1, & z'_2, \ldots, & z'_5 \\ \xi'_1, & \xi'_2, \ldots, & \xi'_5 \\ \eta'_1, & \eta'_2, \ldots, & \eta'_5 \end{vmatrix}$$

Formons comme au paragraphe 62 les réseaux qui correspondent aux divers déterminants Δ en prenant pour q et r une même combinaison isotrope des ξ' et η' ; prenons par exemple :

$$(17)\qquad q = \xi'_1 + i\xi'_2, \qquad r = \eta'_1 + i\eta'_2.$$

On en déduit :

$$(18)\qquad p_1 = \frac{1}{\mu_1}(x'_1 + ix'_2), \quad p_2 = \frac{1}{\mu_1}(y'_1 + y'_2), \quad p_3 = \frac{1}{\mu_1}(z'_1 + z'_2).$$

On aura d'abord :

$$(19)\qquad \begin{cases} 0 = \mu_1^2(p_1\beta_1 + p_2\beta_2 + p_3\beta_3) + \dfrac{\partial q}{\partial u} - r\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}, \\ 0 = \mu_1^2(p_1\gamma_1 + p_2\gamma_2 + p_3\gamma_3) + \dfrac{\partial r}{\partial v} + q\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}, \\ 0 = \mu_1^2(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + q^2 + r^2. \end{cases}$$

Posons alors :

$$(20)\qquad \begin{cases} \mathrm{H} = \dfrac{\partial q}{\partial u} - r\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}, \\ \mathrm{L} = \dfrac{\partial r}{\partial v} + q\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}, \\ 2\theta = q^2 + r^2. \end{cases}$$

On aura pour le réseau qui correspond au déterminant Δ du paramètre μ :

$$(21)\quad \begin{cases} X_k = \mu(p_1 x_k + p_2 y_k + p_3 z_k) + q\xi_k + r\eta_k, \\ \mathcal{L} = \mu^2(p_1\beta_1 + p_2\beta_2 + p_3\beta_3) + \dfrac{\partial q}{\partial u} - r\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} = \mu^2 H(\lambda - \lambda_1), \\ \mathcal{G} = \mu^2(p_1\gamma_1 + p_2\gamma_2 + p_3\gamma_3) + \dfrac{\partial r}{\partial v} + q\dfrac{\partial \varphi}{\partial v} = \mu^2 L(\lambda - \lambda_1), \\ \sum X_k^2 = \mu^2(p_1^2 + p_2^2 + p_3^3) + q^1 + r^2 = \mu^2 . 2\theta(\lambda - \lambda_1), \end{cases}$$

en faisant, comme précédemment :

$$\lambda = \frac{1}{\mu^2}, \qquad \lambda_1 = \frac{1}{\mu_1^2}.$$

Si l'on transforme par inversion les réseaux ainsi obtenus, on obtient un système de réseaux de l'espace à cinq dimensions, tous applicables sur un réseau de l'espace à deux dimensions. Pour former les nouveaux déterminants Δ, il suffit d'appliquer la transformation du paragraphe 18. On aura :

$$(22)\quad \begin{cases} |x_k| = x_k - \dfrac{p_1}{\mu(\lambda - \lambda_1)\theta} X_k, \\ |y_k| = y_k - \dfrac{p_2}{\mu(\lambda - \lambda_1)\theta} X_k, \\ |z_k| = z_k - \dfrac{p_3}{\mu(\lambda - \lambda_1)\theta} X_k, \\ |\xi_k| = \xi_k - \dfrac{q}{\mu^2(\lambda - \lambda_1)\theta} X_k, \\ |\eta_k| = \eta_k - \dfrac{r}{\mu^2(\lambda - \lambda_1)\theta} X_k. \end{cases}$$

Les rotations qui correspondent aux lignes de rang 1, 2, 3, sont respectivement :

$$(23)\qquad \begin{cases} \mu\left(\beta_1-\frac{p_1\mathrm{H}}{\theta}\right), & \mu\left(\gamma_1-\frac{p_1\mathrm{L}}{\theta}\right), \\ \mu\left(\beta_2-\frac{p_2\mathrm{H}}{\theta}\right), & \mu\left(\gamma_2-\frac{p_2\mathrm{L}}{\theta}\right), \\ \mu\left(\beta_3-\frac{p_3\mathrm{H}}{\theta}\right), & \mu\left(\gamma_3-\frac{p_3\mathrm{L}}{\theta}\right). \end{cases}$$

On obtient le nouveau déterminant Δ_1 qui correspond à μ_1 en appliquant la transformation du paragraphe 22. Il est inutile d'écrire tous les résultats; nous nous bornons aux suivants :

$$(24)\qquad \begin{cases} |\xi_1'+i\xi_2'|=\dfrac{\xi_1'+i\xi_2'}{\theta}=\dfrac{q}{\theta}, \\ |\eta_1'+i\eta_2'|=\dfrac{\eta_1'+i\eta_2'}{\theta}=\dfrac{r}{\theta}. \end{cases}$$

Pour trouver le nouveau déterminant δ, je remarque que le point qui a pour coordonnées p_1, p_2, p_3 décrit un réseau O correspondant à ce déterminant Δ; je transforme ce réseau par inversion; pour cela, je pose :

$$(25)\qquad \mathrm{P}=p_1\alpha_1+p_2\alpha_2+p_3\alpha_3,$$

et je remarque que l'on a :

$$(26)\qquad \begin{cases} p_1\beta_1+p_2\beta_2+p_3\beta_3=-\lambda_1\mathrm{H}, \\ p_1\gamma_1+p_2\gamma_2+p_3\gamma_3=-\lambda_1\mathrm{L}, \\ p_1^2+p_2^2+p_3^2=-2\lambda_1\theta. \end{cases}$$

En appliquant les formules du paragraphe 20, on aura :

$$(27)\qquad \begin{cases} |\alpha_k| = \alpha_k + \dfrac{\mathrm{P}}{\lambda_1\theta}p_k, \\ |\beta_k| = \beta_k - \dfrac{\mathrm{H}}{\theta}p_k, \\ |\gamma_k| = \gamma_k - \dfrac{\mathrm{L}}{\theta}p_k. \end{cases}$$

On voit que les rotations qui correspondent à la ligne de rang k sont $\mu|\beta_k|$ et $\mu|\gamma_k|$; autrement dit, cette transformation ne change pas la valeur du paramètre μ.

66. On sait [Systèmes orthogonaux et cycliques, § 92] qu'on peut former une série de déterminants d'ordre cinq :

$$(28)\qquad \theta = \begin{vmatrix} x'_1, & \dots, & x'_5 \\ y'_1, & \dots, & y'_5 \\ z'_1, & \dots, & z'_5 \\ \xi'_1, & \dots, & \xi'_5 \\ \eta'_1, & \dots, & \eta'_5 \end{vmatrix}$$

ayant pour rotations :

$$a \qquad \mu\cos\varphi, \qquad \mu\sin\varphi, \qquad m = +\frac{\partial\varphi}{\partial v},$$

$$b \qquad -\mu\sin\varphi, \qquad \mu\cos\varphi, \qquad n = -\frac{\partial}{\partial u}.$$

Ce déterminant θ a quatre rotations qui sont les mêmes que celles de δ, savoir les rotations a, b, m, n.

Avec ces valeurs des rotations, on voit facilement que :

$$\sum \left[\frac{\partial}{\partial u}(\xi'_k + i\eta'_k)\right]^2 = a^2 + \mu^2. \tag{29}$$

Enfin, les éléments de θ sont liés à ceux du déterminant Δ qui correspond à la même valeur de μ par les équations :

$$\begin{cases} x'_k = \alpha_1 x_k + \alpha_2 y_k + \alpha_3 z_k, \\ y'_k = -\cos\varphi\,\xi_k + \sin\varphi\,\eta_k, \\ z'_k = -\sin\varphi\,\xi_k - \cos\varphi\,\eta_k, \\ \xi'_k = \beta_1 x_k + \beta_2 y_k + \beta_3 z_k, \\ \eta'_k = \gamma_1 x_k + \gamma_2 y_k + \gamma_3 z_k. \end{cases} \tag{30}$$

Considérons un autre déterminant θ qui correspond à la valeur μ_1 de μ; soit θ_1 ce déterminant; pour désigner les éléments de ce nouveau déterminant, nous mettrons à la place de l'accent qui figure dans les éléments de θ l'indice supérieur 1.

Cela posé, considérons les quantités $y'_k + iz'_k$ et $y^1_k + iz^1_k$; ces fonctions satisfont à la même équation de Laplace; soit θ une solution de cette équation; les points $\frac{y'_k + iz'_k}{\theta}$ et $\frac{y^1_k + iz^1_k}{\theta}$ décrivent des réseaux O dont les ds^2 ne diffèrent que par un facteur constant; si θ est une combinaison isotrope des $y'_k + iz'_k$, le premier réseau sera situé dans l'espace à trois dimensions; ce sera une surface isothermique. On aura donc un système analogue à celui qui a servi de point de départ. Nous allons former les nouveaux déterminants qui correspondent à ce système. Je suppose que je prenne :

$$\theta = (y'_1 + iy'_5) + i(z'_1 + z'_5), \tag{31}$$

d'où :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\theta}{\partial u} = \mu e^{i\varphi}(\xi'_1 + i\xi'_5), \\ \dfrac{\partial\theta}{\partial v} = \mu i e^{i\varphi}(\eta'_1 + i\eta'_5). \end{cases} \tag{32}$$

IMPRIMERIE NATIONALE.

Pour trouver le déterminant qui correspond à θ_1, j'applique la transformation du paragraphe 20. Il faudra supposer ici :

$$q = \frac{\mu}{\mu_1}(\xi'_1 + i\xi'_5), \qquad r = \frac{\mu}{\mu_1}(\eta'_1 + i\eta'_5).$$

La quantité désignée par p_3 sera donnée par les équations :

$$(33) \qquad \frac{\partial p_3}{\partial u} = aq = a\frac{\mu}{\mu_1}(\xi'_1 + i\xi'_5), \qquad \frac{\partial p_3}{\partial v} = br = b\frac{\mu}{\mu_1}(\eta'_1 + i\eta'_3).$$

On aura donc :

$$p_3 = \frac{\mu}{\mu_1}(x'_1 + ix'_5);$$

et, par conséquent, les formules de transformation sont :

$$(34) \qquad \begin{cases} |z_k^1| = z_k^1 - \dfrac{\mu}{\mu_1}\dfrac{x'_1 + ix'_5}{\theta}(y_k^1 + iz_k^1), \\ |\xi_k^1| = \xi_k^1 - \dfrac{\mu}{\mu_1}\dfrac{\xi'_1 + i\xi'_5}{\theta}(y_k^1 + iz_k^1), \\ |\eta_k^1| = \eta'_k - \dfrac{\mu}{\mu_1}\dfrac{\eta'_1 + i\eta'_5}{\theta}(y_k^1 + iz_k^1). \end{cases}$$

Les rotations qui correspondent à $|x_k^1|$, c'est-à-dire les nouvelles valeurs de a et b, sont :

$$(35) \qquad \begin{cases} |a| = a - \mu e^{i\varphi}\dfrac{x'_1 + ix'_5}{\theta}, \\ |b| = b - i\mu e^{i\varphi}\dfrac{x'_1 + ix'_5}{\theta}. \end{cases}$$

Des formules (34) on déduit en différentiant :

$$(36)\quad \left\{ \begin{aligned} \sum \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(|\xi_k^1| + i|\eta_k^1|\right)\right]^2 &= a^2 - 2a\mu e^{i\omega}\frac{x_3' + ix_5'}{\theta} + \mu^2 e^{2i\omega}\left(\frac{x_3' + ix_5'}{\theta}\right)^2 \\ &\quad + \mu_1^2 - \mu^2 = |a|^2 + \mu_1^2 - \mu^2. \end{aligned} \right.$$

Il en résulte que le carré du paramètre du nouveau déterminant θ_1 est $\mu_1^2 - \mu^2$.

67. Remarque. — Reportons-nous au système de déterminants Δ [§ 54]; on voit que si l'on remplace u et v respectivement par $\frac{u}{K}$, $\frac{v}{K}$, K étant une constante, cela revient à remplacer μ par $K\mu$. En rapprochant ce résultat de celui du paragraphe précédent, on voit qu'on peut transformer un système isothermique de façon à effectuer sur μ^2 les deux substitutions suivantes :

1° *Multiplier μ^2 par un facteur quelconque;*

2° *Augmenter μ^2 d'une quantité quelconque.*

68. Il reste à examiner l'effet produit par ces transformations sur un système isothermique singulier. Prenons, comme exemple, le cas d'un système singulier d'ordre 2. Nous considérerons trois déterminants Δ, correspondant aux valeurs μ, μ_1, μ_2 du paramètre μ; écrivons dans chacun de ces déterminants la colonne distinguée. Nous aurons entre les éléments de ces colonnes les relations (39) et (40) [§ 56]. Effectuons d'abord la première transformation. On aura, formule (13) :

$$(37)\quad \left\{ \begin{aligned} |\mu\xi| &= \mu\xi - \frac{q}{\theta}(x + iy), \\ |\mu_1\xi_1| &= \mu_1\xi_1 - \frac{q}{\theta}(x_1 + iy_1), \\ |\mu_2\xi_2| &= \mu_2\xi_2 - \frac{q}{\theta}(x_2 + iy_2). \end{aligned} \right.$$

Mais on a [formules (39) et (40), § 56] :

$$\mu\xi = \rho_1\mu_1\xi_1 + \rho_2\mu_2\xi_2,$$

$$x + iy = \rho_1(x_1 + iy_1) + \rho_2(x_2 + iy_2) + a_1 + ia_2;$$

donc :

$$|\mu\xi| = \rho_1|\mu_1\xi_1| + \rho_2|\mu_2\xi_2| - (a_1 + ia_2)\frac{q}{\theta}. \tag{38}$$

Nous distinguerons plusieurs cas :

1°
$$a_1 + ia_2 \neq 0.$$

Toutes les quantités $|\mu\xi|$ sont fonctions linéaires de $|\mu_1\xi_1|$, $|\mu_2\xi_2|$ et $\frac{q}{\theta}$; le nouveau système est donc un système singulier d'ordre 3. On voit facilement que $\frac{q+ir}{\theta}$ est une combinaison isotrope du nouveau groupe $\lambda = \infty$.

Les anciennes combinaisons isotropes donnent de nouvelles combinaisons isotropes. On arrive donc au résultat suivant :

L'ordre de singularité a été augmenté d'une unité; la nouvelle équation caractéristique a les racines de l'ancienne et, en outre, la racine double $\lambda = \infty$.

2°
$$a_1 + ia_2 = 0.$$

On a dans ce cas :

$$|\mu\xi| = \rho_1|\mu_1\xi_1| + \rho_2|\mu_2\xi_2|.$$

En général, il n'existera pas de relation entre $|\mu_1\xi_1|$ et $|\mu_2\xi_2|$; le système est donc singulier d'ordre 2. Les anciennes combinaisons isotropes donnent de nouvelles combinaisons isotropes; donc :

En général, l'ordre de singularité ne change pas; l'équation caractéristique reste la même.

3° Cherchons s'il est possible d'obtenir une réduction de l'ordre de singularité du problème, c'est-à-dire s'il peut y avoir une relation linéaire entre $|\mu_1\xi_1|$ et $|\mu_2\xi_2|$. Si l'on a :

$$c|\mu_1\xi_1| + c_2|\mu_2\xi_2| = 0,$$

on devra avoir :

$$c_1\mu_1\xi_1 + c_2\mu_2\xi_2 = q\frac{c_1(x_1+iy_1)+c_2(x_2+iy_2)}{\theta}, \tag{39}$$

et de même :

$$c_1\mu_1\eta_1 + c_2\mu_2\eta_2 = r\frac{c_1(x_1+iy_1)+c_2(x_2+iy_2)}{\theta}. \tag{40}$$

Si l'on différentie l'équation (39) par rapport à v et si l'on tient compte de l'équation (40), on voit que la dérivée par rapport à v de :

$$\frac{c_1(x_1+iy_1)+c_2(x_2+iy_2)}{\theta}$$

est nulle; on démontre de même que la dérivée de cette expression par rapport à u est nulle; cette expression est donc une constante. On a donc :

$$c_1(x_1+iy_1)+c_2(x_2+iy_2) = K\theta, \tag{41}$$

et, par suite :

$$\begin{cases} c_1\mu_1\xi_1 + c_2\mu_2\xi_2 = Kq, \\ c_1\mu_1\eta_1 + c_2\mu_2\eta_2 = Kr. \end{cases} \tag{42}$$

Cela posé, θ est une combinaison isotrope de T_1, T_2, T_3, T_4; en changeant les constantes d'intégration qui figurent dans T_1 et T_2, on peut ramener cette combinaison aux deux types suivants :

$$(\alpha) \qquad \theta = T_1 + iT_2.$$

On a alors :

$$(43) \qquad q = e^{i\varphi}, \qquad r = ie^{i\varphi};$$

portons ces valeurs de q et r dans l'équation (42). On sait alors [§ 61] que $\lambda = \infty$ est une racine double de l'équation caractéristique :

$$(\beta) \qquad \theta = \frac{1}{2}(T_1^2 + T_2^2);$$

on en déduit :

$$(44) \qquad \begin{cases} q = T_1 \cos\varphi + T_2 \sin\varphi, \\ r = -T_1 \sin\varphi + T_2 \cos\varphi, \end{cases}$$

d'où :

$$(45) \qquad \begin{cases} T_1 = q\cos\varphi - r\sin\varphi, \\ T_2 = q\sin\varphi + r\cos\varphi, \end{cases}$$

et en tenant compte des équations (42) :

$$(46) \qquad \begin{cases} KT_1 = \cos\varphi\,[c_1\mu_1\xi_1 + c_2\mu_2\xi_2] - \sin\varphi\,[c_1\mu_1\eta_1 + c_2\mu_2\eta_2], \\ KT_2 = \sin\varphi\,[c_1\mu_1\xi_1 + c_2\mu_2\xi_2] + \cos\varphi\,[c_1\mu_1\eta_1 + c_2\mu_2\eta_2]. \end{cases}$$

En portant ces valeurs de T_1 et T_2 dans l'équation (41), on trouve :

$$(47)\qquad 2K[c_1(x_1+iy_1)+c_2(x_2+iy_2]=(c_1\mu_1\xi_1+c_2\mu_2\xi_2)^2 + (c_1\mu_1\eta_1+c_2\mu_2\eta_2)^2.$$

Si l'on compare cette identité avec l'identité (98) [§ 61], on trouve que les constantes qui figurent dans cette identité ont les valeurs suivantes :

$$(48)\quad \begin{cases} p_1=c_1, \qquad p_2=c_2, \qquad r_1=-K, \qquad r_2=iK, \qquad r_3=0, \\ p_1s_1+p_2s_2=0, \end{cases}$$

et, par conséquent, la racine $\lambda=\infty$ est encore une racine double.

Les résultats qui précèdent suffisent à la rigueur pour le but que nous poursuivons, puisque, d'après la troisième transformation, on peut toujours ramener un déterminant quelconque à correspondre à la valeur 0 du paramètre μ^2 ou à la valeur ∞ du paramètre λ. C'est pourquoi nous nous bornerons à indiquer les résultats pour la seconde transformation.

Conservons les notations du numéro 65 et désignons par x, y, z, ξ, η les éléments de la colonne distinguée du déterminant Δ_1. Nous distinguerons trois cas :

$$1^o\qquad S=x(x_1'+ix_2')+y(y_1'+iy_2')+z(z_1'+iz_2') + \xi(\xi_1'+i\xi_2')+\eta(\eta_1'+i\eta_2')\neq 0.$$

Dans ce cas, l'*ordre de singularité augmente d'une unité; l'équation caractéristique nouvelle admet les racines de l'ancienne et, en outre,*

deux fois la racine λ_1, *paramètre du déterminant* Δ_1 *qui a servi pour la transformation.*

2° $\qquad S = 0.$

En général, l'ordre de singularité et l'équation caractéristique ne changent pas.

Le cas d'exception est le cas suivant.

3° L'équation caractéristique admet la racine double λ_1 et l'on prend :

$$(49)\quad \begin{cases} x'_1 + ix'_2 = x, \qquad y'_1 + iy'_2 = y, \qquad z'_1 + iz'_2 = z \\ \xi'_1 + i\xi'_2 = \xi, \qquad \eta'_1 + i\eta'_2 = \eta. \end{cases}$$

L'ordre de singularité est diminué d'une unité; l'équation caractéristique nouvelle se déduit de l'ancienne en supprimant deux fois la racine λ_1.

En ce qui concerne la troisième transformation, nous nous bornerons à remarquer que si la colonne isotrope $x'_4 + ix'_5$, $y'_4 + iy'_5$, $z'_4 + iz'_5$, $\xi'_4 + i\xi'_5$, $\eta'_4 + i\eta'_5$ ne coïncide pas avec la colonne distinguée de θ, il n'y a pas de changements; c'est ce qui résulte immédiatement des formules (34) [il pourrait y avoir exception si $\lambda = \infty$ était racine de l'équation caractéristique].

69. Il résulte de ce qui précède que si l'on a un système isothermique singulier dont l'équation caractéristique admet des racines multiples, on pourra, en appliquant les transformations précédentes, le réduire à un autre dont l'ordre de singularité est moins élevé et dont l'équation caractéristique n'admet que des racines simples. Cette nouvelle équation se déduit de l'ancienne en supprimant toutes les racines multiples d'ordre pair, et en prenant comme racines simples toutes les racines multiples d'ordre impair. L'équation ainsi formée est l'*équation réduite* du système.

Prenons comme inconnu x dans l'équation caractéristique le paramètre μ^2. On pourra [§ 67] déduire du système primitif un autre système dont l'équation se déduit de la précédente en remplaçant x par $ax+b$, a et b étant des constantes arbitraires. Deux équations caractéristiques qui se déduisent l'une de l'autre par cette substitution sont dites *équivalentes*.

Cela posé, considérons deux systèmes isothermiques singuliers; si les équations réduites des deux systèmes sont équivalentes, les deux systèmes sont dits équivalents. Ils possèdent cette propriété, qu'à toute surface isothermique du premier système on peut, en employant les transformations indiquées dans ce chapitre, faire correspondre une surface isothermique du second. Notre méthode indique même la suite des transformations qu'il faut effectuer pour passer du premier système au second.

70. Problème. — *Reconnaître si une surface isothermique donnée appartient à un système singulier.*

Posé sous cette forme, le problème est insoluble; mais si on limite l'ordre de singularité, il devient tout de suite possible. Nous poserons donc le problème sous la forme suivante :

Étant donnée une surface isothermique, reconnaître si cette surface appartient à un système singulier d'ordre n au plus.

On choisit d'abord les variables indépendantes de telle sorte que les rotations m et n du déterminant δ aient pour valeurs :

$$m=\frac{\partial\Phi}{\partial v}, \qquad n=-\frac{\partial\Phi}{\partial u}.$$

On forme ensuite les quantités $h_1, h_2, \ldots, h_n$ du paragraphe 60. S'il n'existe pas de relation linéaire et homogène entre a, h_1, h_2, $\ldots$, h_n, la surface n'appartient pas à un système singulier d'ordre au plus égal à n.

Dans le cas contraire, le système est singulier. On voit [§ 60] que dans ce cas, on peut former l'équation caractéristique.

IMPRIMERIE NATIONALE.

71. *Applications.* — Comme application, nous allons résoudre les problèmes suivants :

1° *Étant donnée une surface isothermique, reconnaître si en effectuant au plus $n+1$ transformations on peut ramener cette surface à une surface minima.*

La surface doit appartenir à un système singulier d'ordre n au plus et l'équation caractéristique ne doit avoir que des racines d'ordre pair.

2° *Même problème en remplaçant la surface minima par une surface à courbure moyenne constante.*

L'équation caractéristique ne doit avoir que deux racines d'ordre impair.

3° *Même problème en remplaçant la surface minima par une surface isothermique trouvée dans la déformation des quadriques.*

L'équation caractéristique ne doit avoir que quatre racines d'ordre impair.

72. Remarque. — La méthode qui précède nous indique l'existence de toute une série nouvelle de surfaces isothermiques. Si l'on prend, par exemple, celle qui correspond à une équation d'ordre 6, on a une classe de surfaces isothermiques qu'il est impossible de ramener aux surfaces minima, aux surfaces à courbure moyenne constante, aux surfaces que l'on rencontre dans la déformation des quadriques, en employant les transformations indiquées dans ce chapitre.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

INTRODUCTION..... 1

CHAPITRE I. Propriétés fondamentales..... 5

— II. Déterminants O qui servent à former les eléments introduits dans le précédent chapitre..... 16

— III. Transformations d'un déterminant O..... 27

— IV. Étude analytique des transformations du problème de la déformation des quadriques..... 38

— V. Propriétés géométriques des déformées d'une quadrique obtenues en considérant les réseaux de cette quadrique comme des réseaux 3O..... 48

— VI. Propriétés géométriques des déformées d'une quadrique obtenues en considérant les réseaux de cette quadrique comme des réseaux 4O..... 67

— VII. Sur les systèmes de cercles et de sphères qui interviennent dans la déformation des quadriques..... 73

— VIII. Sur les surfaces isothermiques qui se présentent dans la déformation des quadriques..... 97

— IX. Transformation des systèmes isothermiques. Propriétés des équations caractéristiques..... 128

MÉMOIRES

PRÉSENTÉS PAR DIVERS SAVANTS

À L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT DE FRANCE

MÉMOIRES

PRÉSENTÉS PAR DIVERS SAVANTS

À L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT DE FRANCE

ET IMPRIMÉS PAR SON ORDRE

TOME TRENTE-CINQUIÈME

DEUXIÈME SÉRIE

PARIS

IMPRIMERIE NATIONALE

MDCCCCXIV

MÉMOIRES

CONTENUS

DANS LE TOME TRENTE-CINQUIÈME

DES SAVANTS ÉTRANGERS

Numéros.		Pages.
1.	Mémoire sur les courbes conjuguées dans le mouvement relatif le plus général de deux corps solides, par M. Gabriel Koenigs.	1 à 215
2.	Sur le mouvement des milieux visqueux et les quasi-ondes, par M. Louis Roy	1 à 64

MÉMOIRE

SUR

LES COURBES CONJUGUÉES

DANS LE MOUVEMENT RELATIF

LE PLUS GÉNÉRAL

DE DEUX CORPS SOLIDES

MÉMOIRES
PRÉSENTÉS PAR DIVERS SAVANTS
A L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'INSTITUT DE FRANCE
EXTRAIT DU TOME XXXV

MÉMOIRE

SUR

LES COURBES CONJUGUÉES

DANS LE MOUVEMENT RELATIF

LE PLUS GÉNÉRAL

DE DEUX CORPS SOLIDES

PAR

GABRIEL KŒNIGS
PROFESSEUR DE MÉCANIQUE À LA SORBONNE, EXAMINATEUR D'ADMISSION
À L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

PARIS
IMPRIMERIE NATIONALE

MDCCCCX

MÉMOIRES

PRÉSENTÉS PAR DIVERS SAVANTS

À L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT NATIONAL DE FRANCE.

TOME XXXV. — N° 1.

MÉMOIRE

SUR

LES COURBES CONJUGUÉES

DANS LE MOUVEMENT RELATIF

LE PLUS GÉNÉRAL

DE DEUX CORPS SOLIDES,

PAR

GABRIEL KOENIGS,

PROFESSEUR DE MÉCANIQUE À LA SORBONNE, EXAMINATEUR D'ADMISSION À L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

INTRODUCTION.

1. On peut s'étonner, étant donné le nombre et la diversité des écrits consacrés au mouvement relatif de deux corps solides, que l'on n'ait jamais entrepris l'étude des courbes qui possèdent la propriété de rester tangentes à une autre courbe au cours du mouvement. On s'est toujours borné jusqu'ici aux deux cas caractérisés : le premier, par le fait qu'un plan fixe dans l'un des corps (et alors tout plan parallèle à celui-là) glisse sur un plan fixe dans

IMPRIMERIE NATIONALE.

l'autre corps; le second, par le fait analogue où une surface sphérique solidaire de l'un des corps (et alors toute sphère concentrique) glisse sur une sphère égale et concentrique dans l'autre corps. Ces cas de mouvements, assez improprement dénommés mouvements plans et mouvements sphériques, sont les seuls où l'étude des profils curvilignes conjugués ait été l'objet de recherches et où l'on ait à enregistrer des résultats généraux comme, par exemple, la formule d'Euler et la construction de Savary ou celle de Bobillier. Les seules extensions que l'on ait données à ces résultats ont eu pour objet le nombre de paramètres, en ce sens que les propriétés des profils conjugués plans ou sphériques ont été étendues aux profils superficiels que l'on rencontre dans les mouvements à deux paramètres auxquels donne accès un théorème de Ribaucour; moi-même, dans les *Comptes rendus* (t. CXXXVI, p. 354), j'ai apporté une modeste contribution dans le même sens, en donnant une extension du théorème de Bobillier au cas du roulement des surfaces applicables l'une sur l'autre.

Mais si, au lieu de borner l'étude des mouvements dits plans ou sphériques à l'étude du mouvement d'une figure plane dans son plan ou d'une figure sphérique sur sa sphère, on se place au point de vue de l'espace à trois dimensions et que l'on considère les mouvements relatifs de deux corps S, S′ en contact constant, dans un cas par une face plane, dans l'autre par une face sphérique, on constate qu'une courbe quelconque solidaire de l'un des corps ne reste généralement pas tangente à une courbe de l'autre et le problème se pose alors de *caractériser les courbes* qui possèdent cette propriété. En le faisant, on se rend compte pourquoi, dans le cas du mouvement plan, toute courbe contenue dans le plan mobile glissant ou dans un plan parallèle possède une enveloppe, et pourquoi il faut adjoindre encore à ces courbes toute courbe tracée sur le cylindre roulant. Remarque analogue, du reste, pour les mouvements sphériques.

Ayant cherché à résoudre cette question dans le cas le plus général, je suis parvenu à des résultats qui m'ont paru assez simples

et assez généraux pour mériter d'être publiés. Mais en entreprenant la rédaction de ces résultats d'abord assez élémentaires, j'ai vu le sujet s'élargir de plus en plus et finalement j'ai dû me restreindre, notamment en ce qui concerne l'intervention de l'équation aux dérivées partielles liée au cône des vitesses, afin de maintenir dans de raisonnables proportions ce travail déjà long.

Pour la même raison, je me suis borné à indiquer les liens existants entre les divers problèmes généraux que cette théorie fait naître et, sauf au chapitre IV, j'ai dû écarter les nombreuses applications particulières qui peuvent en être faites.

2. Si l'on considère un point quelconque P d'un corps S mobile par rapport à un autre corps S′, la vitesse d'entraînement de P décrit autour de P un cône Γ_P dans le corps S, que j'appelle le cône des vitesses. De même, si l'on considère un plan Π solidaire du même corps S, la caractéristique de ce plan dans ce mouvement est une droite que j'appelle la *caractéristique d'entraînement;* cette droite enveloppe dans le plan Π une courbe (c_Π). La courbe (c_Π) se trouve être dans le plan Π le lieu des sommets des cônes Γ_P qui sont tangents à ce plan, en sorte que cette courbe (c_Π) est précisément la courbe plane que M. Darboux a introduite dans son mémoire, *Sur les solutions singulières,* inséré au tome XXVII des *Savants étrangers,* et qui balance dualistiquement le rôle du cône Γ_P dans l'équation aux dérivées partielles des surfaces dont les plans tangents en un point P touchent le cône Γ_P. De cette façon, ces surfaces peuvent se définir aussi comme étant celles qui touchent un plan Π en un point de la courbe (c_Π).

Ceci posé : les courbes (e) douées d'enveloppe sont les courbes intégrales du cône Γ_P, c'est-à-dire celles dont la tangente est une génératrice de ce cône, à une exception près présentée par les hélices qui glissent chacune sur elle-même au cours d'un mouvement hélicoïdal tangent. De même, si l'on considère les développables (ξ) dont chaque génératrice touche la courbe (c_Π) contenue dans le plan tangent Π correspondant, chacune de ces développables

a une enveloppe, c'est-à-dire une surface développable solidaire du corps S′ qu'elle touche constamment suivant une génératrice, à une exception près présentée par les développables qui ont pour arêtes les hélices exceptionnelles ci-dessus signalées.

Ces développables douées d'enveloppe peuvent aussi recevoir le nom de développables *intégrales*, comme les courbes douées d'enveloppe.

3. J'ai commencé par étudier les couples d'éléments conjugués constitués par une courbe (e) solidaire du corps S et sa conjuguée (e'), solidaire du corps S′. J'ai adopté dans cette étude un système d'axes symétriques par rapport aux deux corps et mobiles, par conséquent, par rapport aux deux. Ce système de référence est ainsi constitué : Oz est l'axe (d) du mouvement hélicoïdal tangent, lequel décrit dans S et S′ deux surfaces réglées ou *axoïdes* (Φ), (Φ'), qui se raccordent constamment le long de Oz, comme on sait. Le point O est le point central commun, Oy est la normale commune aux deux axoïdes au point central O et Ox est la tangente commune en O qui est normale à Oz. Le mouvement relatif $\boxed{\text{S, S}'}$ de S par rapport à S′ résulte dès lors de la composition des mouvements $\boxed{\text{T S,}}$ $\boxed{\text{T, S}'}$ du trièdre T par rapport aux corps S et S′ respectivement, et ce sont les notations classiques afférentes à ces deux mouvements qui constituent les éléments du calcul. Il est clair que ce choix du trièdre est de nature à simplifier le plus possible le calcul en n'y laissant subsister que des éléments ayant une signification cinématique ou géométrique directe.

Dans le chapitre I^{er}, j'expose le principe de cette méthode et j'y réduis au strict minimum nécessaire le nombre des paramètres qui, eu égard à la position du trièdre, suffisent à définir les mouvements.

4. Dans le chapitre II, j'établis le caractère distinctif des courbes douées d'enveloppe et démontre leur identité avec les courbes

intégrales du cône des vitesses[1]. La considération des plans normaux aux courbes douées d'enveloppe amène à considérer le cône supplémentaire du cône des vitesses, car ce cône est l'enveloppe de ces plans normaux. Or ces plans normaux étant chacun le plan polaire du point P dans le complexe linéaire $\mathcal{L}$ attaché au mouvement hélicoïdal actuellement tangent, il se trouve que la génératrice du cône supplémentaire appartient au complexe linéaire $\mathcal{L}$ et au complexe linéaire infiniment voisin. Cette génératrice d_P^{nn} est donc une *normale stationnaire*. Les normales stationnaires forment à chaque instant une congruence linéaire commune au complexe $\mathcal{L}$ et au complexe linéaire infiniment voisin ou, plus commodément, au complexe $\mathcal{L}$ et à un autre complexe linéaire *auxiliaire* $\mathcal{L}_1$, dont les éléments se définissent avec simplicité.

5. Dans le chapitre III, j'aborde la détermination des courbes douées d'enveloppes, c'est-à-dire des courbes intégrales du cône des vitesses. Monge, on le sait, a rattaché la détermination des courbes intégrales à celle des surfaces intégrales. Mais laissant de côté en l'espèce ce genre de relations, je me suis posé le problème sous une autre forme. Je me suis proposé de définir le mouvement d'un point M par rapport au trièdre T, de façon qu'il décrive dans S et S′ respectivement deux courbes (e), (e') qui s'enveloppent. Le point M décrit alors, par rapport au trièdre T, une courbe que, par une extension d'un terme usité dans la pratique des engrenages, j'appelle une *courbe d'engrènement*. Les équations différentielles comportent dans leur formation un facteur μ qui est une fonction arbitraire du temps.

Or, et c'est là un fait d'une haute portée, il se trouve que, si l'on considère tous les points M qui décrivent leurs courbes (e), (e') *avec la même détermination de la fonction* μ, tous ces points constituent un solide invariable S_μ.

[1] Sauf l'exception signalée plus haut des hélices qui glissent sur elles-mêmes, chacune au cours d'un mouvement hélicoïdal tangent.

Ces corps S_μ jouent un rôle des plus remarquables. Les corps S et S′ font partie de leur ensemble; le mouvement relatif de deux de ces corps S_μ et S_λ admet un mouvement hélicoïdal tangent qui a lieu sur *la même vis* que le mouvement hélicoïdal tangent au mouvement $\boxed{S, S'}$, mais avec une autre valeur de la vitesse angulaire; la vitesse angulaire se trouve alors égale à $(\lambda - \mu)$. Tout point M solidaire d'un corps S_μ décrit dans deux autres corps quelconques S_λ, S_ρ du système deux courbes (e_λ), (e_ρ) conjuguées, etc. On reconnaît là l'extension de propriétés déjà connues qui se rapportent aux mouvements dits plans ou sphériques. Ajoutons encore qu'à tout corps S_μ est lié un axoïde (Φ_μ), lieu de l'axe du mouvement hélicoïdal tangent commun, dans l'intérieur du corps S_μ. Tous ces axoïdes (Φ), (Φ') relatifs à S et S′, (Φ_μ) relatif à S_μ, (Φ_λ) relatif à S_λ, etc., virent les uns sur les autres simultanément. Ce troisième chapitre, un des plus importants du Mémoire, se termine par l'étude de la question de la détermination analytique des courbes d'engrènement. En employant une méthode déjà utilisée par M. G. Darboux (*Leçons sur la théorie des surfaces*, t. I, p. 22) et qui consiste à ramener à une équation de Riccati la détermination d'un mouvement fini quand on connaît les rotations, je montre que, grâce à l'indétermination de la fonction μ, le problème se ramène à des quadratures [1].

6. J'ai tenu dans le chapitre IV à traiter un cas particulier un peu spécial peut-être, mais qui rompt du moins l'aridité de ces questions générales, celui de deux corps S, S′ qui, par rapport à un troisième (qui est justement le trièdre T), sont animés de mouvements de rotation uniformes autour d'axes fixes. C'est le cas hyperboloïdique de Bélanger. Dans ce cas particulier, les quadratures elles-mêmes disparaissent et les lignes d'engrènement res-

[1] Il convient d'ajouter que les hélices exceptionnelles donnent lieu à la considération de files d'hélices analogues aux files de cercles qui interviennent dans les profils conjugués plans.

sortent en termes finis par une construction géométrique, une seule quadrature intervenant pour donner la loi du mouvement sur la courbe d'engrènement.

7. Au chapitre V, j'aborde la question des courbures des courbes conjuguées. Elle se ramène naturellement à celle des axes de courbure.

Prenons deux courbes conjuguées (e), (e') solidaires des corps S et S′ et se touchant en un point P. Elles admettent pour tangente en P une même droite qui est celle qui porte la vitesse d'entraînement du point P dans le mouvement $\boxed{S, S'}$; cette tangente t_P est normale en P au plan Π_P, polaire du point P dans le complexe $\mathcal{C}$ déjà défini. Les axes de courbure de tous les couples de courbes (e), (e') ainsi définies forment dans le plan normal commun Π_P un faisceau plan dont le sommet P_1 joue un rôle considérable. Je l'ai appelé, pour abréger, l'*associé* du point P.

Ce point P_1 est sur la normale stationnaire d_P^{nn} qui est issue de P à l'instant considéré; de plus, les points P et P_1 sont conjugués par rapport au cylindre de révolution qui est le conjugué du cercle de l'infini par rapport au complexe $\mathcal{C}$, en sorte que *la relation entre les points P et P_1 est réciproque et, qui plus est, elle est birationnelle.*

Cette correspondance, analogue à l'inversion, est cubique. J'ai terminé ce cinquième chapitre par une étude de cette remarquable correspondance : éléments singuliers; surface cubique associée à un plan; cubique gauche associée à une droite; cas de dégénérescence, etc.

8. Dans le chapitre VI, je poursuis l'étude de la distribution des axes de courbure interrompue par la digression sur la correspondance cubique entre points associés. Les axes de courbure δ, δ' de deux courbes conjuguées (e), (e') sont deux droites d'un même faisceau de sommet P_1 dans le plan Π_P. Or *ils se correspondent homographiquement, avec cette circonstance particulière et qui se repré-*

sentera constamment dans ce qui va suivre, c'est que cette homographie est singulière, c'est-à-dire qu'elle a ses ÉLÉMENTS DOUBLES COÏNCIDENTS. Le rayon double n'est autre que la droite d_P, conjuguée de la droite t_P, c'est-à-dire que d_P est la *caractéristique d'entraînement* du plan normal Π_P, pour employer une locution déjà définie plus haut.

On peut, du reste, donner des formes métriques variées à cette homographie.

Par exemple, en vertu du caractère spécial des faisceaux homographiques singuliers, les axes δ, δ' découpent sur toute parallèle à la droite d_P tracée dans le plan Π_P un vecteur de longueur constante. Il suffit donc, cette parallèle étant choisie, de construire le vecteur constant, pour avoir le moyen de construire l'axe de courbure δ' correspondant à la courbe (e') enveloppe de la courbe (e) dont l'axe de courbure δ serait supposé donné.

On peut aussi faire intervenir les angles θ, θ' que font les axes δ, δ' avec la droite double d_P; on obtient alors une formule qui rappelle absolument celle d'Euler.

Quant aux plans osculateurs aux courbes (e), (e'), on les obtiendra en menant, par la tangente commune t_P, les plans normaux aux axes δ, δ'.

Et pour ce qui est des centres de courbure, ce seront les points E, E′ où ces plans coupent respectivement à angle droit les axes δ, δ'.

De la sorte, *le cercle décrit dans le plan* Π_P *sur* PP_1 *comme diamètre est le lieu des centres de courbure des courbes* (e), (e') *qui, à un moment donné, se touchent en un point donné* P.

Enfin les rayons de courbure eux-mêmes EP, E′P *sont les projections du vecteur* P_1P *sur les plans osculateurs.*

Ces résultats montrent l'importance du point associé P_1 dans ces questions et justifient l'étude préalable que nous avons faite de la correspondance cubique.

9. Au chapitre VII, je développe cette idée que toutes ces pro-

priétés de courbure sont issues du fait que les courbes (e) sont les courbes intégrales liées à un cône, le cône des vitesses.

On les retrouve si l'on prend les courbes intégrales liées à un cône quelconque. Étant données, en effet, les courbes qui vérifient une équation de la forme

$$f(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

homogène en α, β, γ, où x, y, z sont les coordonnées d'un point de la courbe et α, β, γ les cosinus directeurs de la tangente en ce point, je fais voir que, si l'on envisage toutes celles de ces courbes qui passant au point P (x, y, z) y admettent la même tangente (α, β, γ) t_P, génératrice du cône Γ_P représenté par l'équation précédente, il existe sur la génératrice du cône supplémentaire un point P_1 qui joue le rôle de point associé au point P et qui est tel que les axes de courbure de toutes ces courbes passent par ce point P_1. Le lieu de leurs centres de courbure est le cercle décrit dans le plan normal commun sur $P_1 P$ comme diamètre.

Ce résultat étend et met en sa vraie place un résultat célèbre concernant les complexes de droites. Si, en effet, les génératrices des cônes Γ_P appartiennent toutes à un même complexe de droites, le point P_1 est rejeté à l'infini; il en résulte que tous les axes de courbure sont parallèles à la génératrice du cône supplémentaire et *le plan osculateur est alors le plan tangent suivant* t_P au cône Γ_P.

J'ai fait une application au cas particulier où l'équation $f = 0$ est linéaire en α, β, γ pour montrer que les théorèmes de Meusnier et d'Euler et toute la théorie de la courbure des surfaces rentrent dans l'ordre d'idées développé dans ce chapitre.

10. Dans les chapitres VIII et IX, revenant au problème des enveloppes, j'ai étudié certains cas particuliers pour lesquels les résultats et les formules se simplifient. Par exemple, le cas où les axoïdes sont applicables l'un sur l'autre et roulent sans glisser (rotation tangente), puis le cas où les surfaces qui virent avec ou

IMPRIMERIE NATIONALE.

sans glissement sont des cylindres. J'ai tenu à montrer comment les résultats classiques pouvaient être retrouvés comme aboutissement d'hypothèses de plus en plus simplifiantes et toujours se retrouve cette *homographie singulière* qui s'introduit dès le cas le plus général.

La formule d'Euler-Savary :

$$\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho} = \frac{1}{k \sin\theta}$$

la manifeste elle-même, mais à la condition de ne point l'écrire

$$\frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho} = \pm \frac{1}{k \sin\theta},$$

comme il arrive lorsque l'on n'a pas soin de faire des conventions concordantes pour les sens positifs sur les normales communes aux deux profils conjugués.

11. Au chapitre x, j'étudie naturellement les développables conjuguées, c'est-à-dire les développables (ξ) solidaires du corps S qui ont pour enveloppe dans S′ une autre développable (ξ') qu'elles touchent tout du long de la génératrice rectiligne qui est commune. On prouve aisément que cette génératrice est la *caractéristique d'entraînement* du plan tangent commun Ξ.

De là suit que, dans le corps S, les développables (ξ) sont des développables intégrales, ainsi que je l'ai indiqué plus haut[1].

Mais il y a plus. Si, suivant la méthode que j'ai déjà suivie dans la recherche des courbes (c), (c') pour les ramener à celle des courbes d'engrènement, on cherche à déplacer un plan Ξ par

[1] Il faut cependant excepter les hélicoïdes développables qui ont pour arêtes les hélices exceptionnelles.

rapport au trièdre T, de façon que Ξ engendre dans S et S′ deux développables conjuguées (ξ), (ξ'), on tombe sur des équations analogues à celles des courbes d'engrènement, mais plus simples et dont l'intégration n'exige qu'une seule quadrature.

Là aussi, comme pour les courbes (e), (e'), figure dans les équations différentielles une fonction arbitraire μ du temps et l'on démontre que tous les plans Ξ dont le mouvement est réglé par une même détermination de μ sont solidaires du corps que j'ai déjà désigné par S_μ. De cette façon, en prenant un corps S_μ quelconque, c'est-à-dire correspondant à une détermination particulière, quelconque d'ailleurs de μ : 1° les points tracent tous dans S, S′ des couples de profils conjugués (e), (e'); 2° les plans engendrent tous dans S, S′ des couples (ξ), (ξ') de développables conjuguées.

Ajoutons que l'on peut substituer aux corps S_μ, S, S′ trois autres corps quelconques S_{λ_1}, S_{λ_2}, S_{λ_3} correspondant à trois déterminations quelconques de la fonction μ.

On sait qu'en tout point d'une courbe existe un trièdre trirectangle constitué par tangente, normale principale, bi-normale. Pour les trièdres liés aux deux arêtes a_ξ, $a_{\xi'}$ des développables conjuguées (ξ), (ξ'), les arêtes sont parallèles chacune à chacune, cela est évident. Mais il y a, de plus, cette particularité : c'est que les normales principales de toutes les arêtes a_ξ, $a_{\xi'}$ sont rectangulaires avec l'axe (d) du mouvement hélicoïdal tangent. Maintenant, dans le cas actuel, le problème analogue à celui de la détermination du plan osculateur des courbes (e), (e') consiste dans la détermination des points de contact avec la génératrice de contact des arêtes a_ξ, $a_{\xi'}$ des couples de développables conjuguées (ξ), (ξ') qui, à un moment donné, se raccordent suivant un même plan Ξ et aussi suivant la même droite t_Ξ (caractéristique d'entraînement de Ξ).

Or il se trouve que ces points a_ξ, $a_{\xi'}$ se correspondent encore homographiquement sur la droite t_Ξ et que cette *correspondance homographique est singulière*, c'est-à-dire qu'elle a ses points doubles coïncidents, ce qui donne à cette particularité de la coïncidence

des éléments doubles dans toute cette question un caractère de constance très digne de remarque.

12. Dans le chapitre XI, j'ai traité une question qui a un intérêt général, à savoir celle des lignes douées d'enveloppe que l'on peut tracer sur une surface.

Sur toute surface (F) solidaire du corps S, on peut tracer deux sortes de courbes remarquables : 1° les courbes (γ) de contact avec le profil conjugué (F'), solidaire du corps S' : 2° les lignes (e) douées d'enveloppe qui sont tracées sur (F) et qui ont pour enveloppes respectivement les courbes (e') analogues tracées sur (F').

A ces lignes (e) (e') tracées sur (F) et (F'), je propose de donner le nom de *courbes de glissement;* en effet, c'est suivant ces courbes que se produit à chaque instant le glissement du profil (F) sur son profil conjugué (F') et si, par suite d'usure réciproque, des stries venaient à se produire sur ces surfaces, ce sont ces lignes de glissement que ces stries figureraient.

Un cas spécial est celui où ces deux catégories de lignes coïncideraient. Les courbes intégrales comprennent, on l'a déjà dit, à titre de solutions exceptionnelles, les hélices circulaires qui ont pour axe l'axe (d) d'un mouvement hélicoïdal tangent et pour pas le pas de ce mouvement hélicoïdal. Il est clair, en effet, qu'à l'instant t où le mouvement hélicoïdal considéré est tangent, tous les points de cette hélice ont leur vitesse d'entraînement dirigée suivant la tangente à la courbe. En tout point de cette courbe, la tangente est donc bien une génératrice du cône des vitesses, et cela suffit pour qu'on puisse les regarder comme des courbes intégrales; mais cette circonstance se produit en dehors des conditions propres aux courbes douées d'enveloppe. En fait, une telle hélice glisse sur elle-même au cours du mouvement hélicoïdal tangent et s'enveloppe elle-même pendant ce court instant. Or le fait curieux est le suivant :

Si l'on imagine qu'à toute époque t du mouvement, on construise une hélice circulaire H_t ayant pour axe et pas l'axe (d)

et le pas h du mouvement hélicoïdal tangent, les lieux de cette hélice dans le corps S et dans le corps S′ sont deux surfaces (F), (F′) qui ont, à chaque époque t, cette hélice H_t en commun *et qui se raccordent en tous* les points de cette courbe, ce qui donne une classe remarquable et nouvelle de couples de profils conjugués.

J'examine aussi le cas où les profils conjugués sont deux surfaces réglées (F), (F′) qui se raccordent constamment suivant une génératrice commune (g). En mettant de côté le cas où (F), (F′) seraient deux développables, cas examiné plus loin, le résultat que l'on trouve est très digne de remarque. Si deux surfaces réglées (F), (F′), solidaires l'une de S, l'autre de S′, constituent deux profils conjugués se raccordant constamment suivant la génératrice commune (g), *il existe un corps* S_μ *dont la droite* (g) *est solidaire*, en sorte que, dans le mouvement relatif $\boxed{S_\mu, S}$, la droite (g) décrit dans S la surface (F), tandis que, dans le mouvement $\boxed{S_\mu, S'}$, elle décrit la surface (F′). J'ai déjà énoncé ce résultat il y a longtemps aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (t. CXXXV, p. 1066). Si l'on imagine la droite (g) réalisée sous la forme du fil d'un outil porté par le corps S_μ, le mouvement $\boxed{S_\mu, S}$ est celui qu'il faut donner au corps S_μ (outil), en présence du corps S (pièce à travailler), pour réaliser la taille du profil (F) : c'est pour cela que j'ai donné à ce mouvement $\boxed{S_\mu, S}$ le nom de *mouvement de fabrication :* de même $\boxed{S_\mu, S'}$ est le mouvement de fabrication pour la surface (F′). Un mouvement hélicoïdal quelconque autour de (g) comme axe n'ayant d'autre effet que de faire glisser la droite (g) sur elle-même, on peut introduire à chaque instant un mouvement hélicoïdal élémentaire de ce genre, ce qui introduit dans la notion du mouvement de fabrication un certain degré d'arbitraire dont on pourra tirer parti pour simplifier ou rendre plus efficace ce mouvement de fabrication.

Je termine ce chapitre en étudiant les lignes de glissement tracées sur les couples de développables conjuguées.

Le problème comprend la question de la détermination des courbes douées d'enveloppe qui sont planes et des développables douées d'enveloppe qui sont des cônes. Là encore intervient utilement la considération des corps auxiliaires S_μ, S_λ.

11. Enfin, dans le douzième et dernier chapitre, j'ai abordé deux questions qui s'imposaient, à savoir celle des surfaces intégrales liées au cône Γ_P des vitesses ou si l'on veut à la courbe plane (c_Π), ainsi que celle des caractéristiques de ces surfaces intégrales.

Je remarque d'abord que toute normale PN à une surface intégrale I dans le corps S est à un moment donné la normale stationnaire d_P^{nn} qui passe par le point de contact P.

Or les normales stationnaires engendrent dans S un complexe de droites, d'où résulte que les surfaces intégrales du cône des vitesses admettent pour normales les droites d'un complexe.

Si l'on considère maintenant, sur la surface intégrale I, le lieu des points P dont la normale PN est, *au même instant,* une normale stationnaire, le lieu est la courbe de contact (γ) de la surface I avec son profil conjugué I′ dans le corps S′, d'où résulte que I′ est aussi une surface intégrale dans le corps S′.

Enfin, de ce fait que tout du long de (γ) la normale PN est stationnaire, je conclus, que non seulement en tous les points de (γ), mais aussi pour tout point infiniment voisin d'un point de cette courbe la normale appartient au complexe $\mathcal{L}$. Comme les surfaces dont les normales appartiennent au complexe $\mathcal{L}$ sont des hélicoïdes d'axe (d), de pas h, j'en conclus que si l'on considère l'hélicoïde $H(\gamma)$ engendré par (γ) au cours du mouvement hélicoïdal tangent, cet hélicoïde a tout du long de (γ) un contact du second ordre avec la surface I. La même chose pouvant se dire pour I′, j'en conclus que :

Les surfaces intégrales du cône des vitesses présentent cette propriété

d'avoir, à chaque instant, un contact du second ordre, tout du long de la courbe de contact, avec leur profil conjugué.

Quant aux caractéristiques, il me suffit de recourir à la définition qu'en a donnée M. Darboux au moyen du cône et de la courbe plane dans le cas général pour arriver à les définir :

Une courbe (c) est caractéristique sur une surface intégrale si : 1° elle est une courbe douée d'enveloppe; 2° si la développable circonscrite (ξ) est une développable douée d'enveloppe développable.

CHAPITRE PREMIER.

INDICATIONS GÉNÉRALES SUR LA MÉTHODE SUIVIE.

§ 1er.

TORSION TANGENTE. — AXOÏDES. — VIRATION DES AXOÏDES.

Lorsque deux corps S et S′ de forme invariable sont mobiles l'un par rapport à l'autre, il existe à chaque instant un mouvement hélicoïdal tangent, c'est-à-dire un mouvement hélicoïdal qui imprime à tout point du corps mobile la vitesse même qu'il possède dans le mouvement proposé. L'axe de ce mouvement hélicoïdal ou de cette *torsion*, comme l'on dit encore, est une certaine droite (d) qui change dans l'un et l'autre des deux corps en décrivant dans S une surface réglée (Φ) et dans S′ une surface réglée (Φ') que l'on appelle des *axoïdes*, pour rappeler que ces surfaces sont les lieux de l'axe (d).

Dans chaque position relative des corps S et S′, les deux surfaces (Φ) (Φ') ont en commun l'axe actuel (d) de la torsion tangente. Mais il y a plus, les axoïdes se raccordent sans cesse suivant cet axe. De la sorte le mouvement relatif des deux corps se trouve représenté par le roulement l'un sur l'autre des axoïdes (Φ) (Φ'), accompagné d'un glissement suivant la droite de contact (d). La vitesse de ce glissement est proportionnelle au *pas* h de la torsion tangente, en sorte que si h est nul constamment, le mouvement se réduit au roulement simple des axoïdes l'un sur l'autre; ce roulement s'accompagne de ce fait que les axoïdes (Φ) (Φ') sont alors *applicables* l'un sur l'autre.

Dans le cas général, où h n'est point nul, le roulement des

axoïdes avec glissement instantané suivant la génératrice du contact (d) a reçu un nom spécial, celui de *viration* des axoïdes. Les axoïdes *virent* l'un sur l'autre.

§ 2.

COORDONNÉES CHOISIES.

Puisque les axoïdes se raccordent constamment suivant la génératrice (d) qu'ils ont actuellement en commun, le point central O est le même pour les deux surfaces, ainsi que le plan central et le paramètre de distribution.

Nous prendrons dans cette étude comme trièdre de référence mobile le trièdre trirectangle T ainsi défini : l'origine sera le point O; l'axe Oz coïncidera avec l'axe (d). Le plan zOx sera le plan central commun aux deux surfaces, en sorte que Ox se trouve être la tangente aux deux surfaces au point O qui est perpendiculaire à Oz ou (d). Enfin, Oy sera la normale commune aux deux surfaces au point O. Le plan zOy est dès lors le plan asymptote, c'est-à-dire le plan tangent au point qui se trouve à l'infini sur la droite (d).

Ajoutons que nous choisirons les sens de parcours direct, sur les trois axes Ox, Oy, Oz, de façon que le trièdre T ait la disposition directe, ce qui veut dire que, pour un observateur personnifiant l'axe Oz, une rotation de gauche à droite de 90° amène Ox sur Oy.

Le trièdre T ainsi défini est mobile à la fois dans les deux corps S et S′; mais, précisément, à cause du rôle symétrique qu'il occupe par rapport aux deux corps, son usage est des plus précieux, car il ne met en jeu que des éléments géométriques offrant des attaches directes et intimes avec le mouvement relatif d'un corps par rapport à l'autre.

Nous représenterons par $\boxed{\text{T, S}}$ le mouvement du trièdre T par rapport au corps S et par $\boxed{\text{S, T}}$ le mouvement *inverse*, à savoir

IMPRIMERIE NATIONALE.

celui du corps S par rapport au trièdre T. Les notations $\boxed{\text{T, S'}}$ $\boxed{\text{S, T'}}$ auront des sens analogues.

§ 3.

CARACTÈRES DU MOUVEMENT DU TRIÈDRE PAR RAPPORT À L'UN DES CORPS.

Occupons-nous d'abord du mouvement $\boxed{\text{T, S}}$.

Dans ce mouvement le point O décrit sur la surface (Φ) la ligne de striction de cette surface. Si donc on désigne par ξ, η, ζ les projections sur les axes du trièdre T de la vitesse du point O dans le mouvement $\boxed{\text{T, S}}$, comme Oy est la normale à la surface (Φ), la projection η doit être nulle, donc :

$$\eta = 0. \tag{1}$$

Désignons encore par p, q, r les projections de la rotation dans le même mouvement $\boxed{\text{T, S}}$. Si l'on considère un point M, solidaire du trièdre T et dont x, y, z soient les coordonnées par rapport à ce trièdre, les projections de la vitesse d'entraînement de ce point M sur les axes Ox, Oy, Oz seront, comme on sait :

$$\xi + qz - ry, \qquad \eta + rx - pz, \qquad \zeta + py - qx. \tag{2}$$

Appliquons ces formules à un point M de l'axe Oz, c'est-à-dire supposons $x = y = 0$; les formules précédentes, en nous souvenant que $\eta = 0$, deviendront

$$\xi + qz, \qquad -pz, \qquad \zeta. \tag{3}$$

Désignons par tang θ le coefficient angulaire du plan mené par Oz et par la vitesse du point M ci-dessus, nous aurons évidemment :

$$\text{tang}\,\theta = \frac{-pz}{\xi + qz}. \tag{4}$$

Or ce plan est précisément le plan tangent au point M à la surface (Φ). Puisque O est le point central et zOx le plan central, la relation entre z, qui mesure $\overline{OM}$, et la tangente de l'angle θ que le plan tangent fait avec le plan central zOx doit être

$$\text{tang}\,\theta = \frac{z}{k}, \tag{5}$$

où k est le paramètre de distribution.

Nous trouvons donc, en identifiant les relations (4), (5), qu'il faut avoir :

$$q = 0. \tag{6}$$

$$k = -\frac{\xi}{p}. \tag{7}$$

Il suit de là que, pour qu'un trièdre trirectangle mobile T soit tel que son origine décrive la ligne de striction de la surface réglée engendrée par son axe Oz et que de plus zOx soit le plan central, il est *nécessaire* que les rotations du trièdre T vérifient les conditions

$$\eta = 0, \qquad q = 0.$$

Ces conditions sont du reste *suffisantes*, comme il est bien aisé de s'en rendre compte par le raisonnement inverse du précédent.

§ 4.

PROPRIÉTÉ DES SURFACES RÉGLÉES. CAS D'UNE SURFACE DÉVELOPPABLE.

Nous noterons ici en passant que ce résultat met en évidence une propriété générale des surfaces réglées.

Il est clair en effet que, si l'on considère un point M_1 sur l'axe Ox, les projections de la vitesse de ce point, tirées des expressions (2) où l'on fait $y=0$, $z=0$ et $q=\eta=0$, se réduisent à

$$\xi, \qquad rx, \qquad \zeta.$$

Le plan mené par Ox et la vitesse du point M_1 fait avec xOz un angle θ_1 tel que

$$\operatorname{tang}\theta_1=\frac{rx}{\zeta}.$$

Or ce plan est précisément le plan tangent en M_1 à la surface réglée engendrée par l'axe Ox, et comme Ox mesure sur x la distance $\overline{OM_1}$, la formule précédente montre que : 1° sur cette surface O est le point central; 2° xOz est le plan central; 3° le paramètre de distribution est $\frac{\zeta}{r}$, de même qu'il est $-\frac{\xi}{p}$ pour la surface engendrée par l'axe Oz.

On peut ainsi énoncer ce théorème :

Une surface réglée quelconque, non développable, étant donnée, on fait tourner de 90° dans le plan central autour du point central chaque génératrice; le lieu de ces droites est une seconde surface réglée qui admet même plan central et même point central que la première, en sorte que ces deux surfaces sont circonscrites l'une à l'autre suivant la ligne de striction commune.

Les cônes directeurs de ces deux surfaces jumelles sont évidemment supplémentaires.

Ce théorème peut du reste être facilement généralisé car il subsiste si, au lieu de faire tourner la génératrice d'un angle droit, on la fait tourner dans les mêmes conditions d'un angle constant absolument quelconque [1].

Si la surface Φ est une développable dont zOy est le plan tangent, la projection [formule (3)] de la vitesse de M sur Ox doit être nulle quel que soit M, c'est-à-dire que

$$\xi + qz$$

[1] Soit une droite issue de l'origine O, dont α, β, γ soient les cosinus directeurs, variables en général, par rapport aux axes du trièdre T, si l'on cherche quelles fonctions de t doivent être α, β, γ, dans l'hypothèse la plus générale, quant au mouvement du trièdre, pour que le lieu de cette droite admette constamment O comme point central, on trouve très aisément la condition :

$$\xi\frac{d\alpha}{dt} + \eta\frac{d\beta}{dt} + \zeta\frac{d\gamma}{dt} + (r\eta - q\zeta)\alpha + (p\zeta - r\xi)\beta + (q\xi - p\eta)\gamma = 0.$$

On vérifie de la façon *la plus générale* cette condition en posant

$$(e) \qquad \xi\alpha + \eta\beta + \zeta\gamma = U,$$

$$(f) \qquad \left(r\eta - q\zeta - \frac{d\xi}{dt}\right)\alpha + \left(p\zeta - r\xi - \frac{d\eta}{dt}\right)\beta + \left(q\xi - p\eta - \frac{d\zeta}{dt}\right)\gamma = -\frac{dU}{dt},$$

où U est une fonction quelconque de t. Ces équations définissent ainsi α, β, γ.

On vérifie facilement que si l'on a

$$\eta = 0, \quad q = 0,$$

on satisfait à la condition en prenant $\beta = 0$ et α, γ constants.

Ajoutons que les deux équations ci-dessus, (e), (f), s'interprètent sous la forme du théorème suivant :

Si l'on mène à chaque instant, par un point mobile M, un axe Δ tel que la projection sur Δ de l'accélération de M soit la dérivée par rapport au temps de la projection de la vitesse sur le même axe, la trajectoire de M est la ligne de striction de la surface réglée engendrée par Δ et réciproquement.

doit être nul pour toute valeur de z, ce qui implique, en outre de $\eta = 0$,

$$\xi = 0, \qquad q = 0.$$

Dans ce cas, le plan zOx est le plan rectifiant de la courbe qui est l'arête de la développable engendrée par Oz. Il suffit alors de faire tourner la tangente d'un angle constant quelconque dans le plan rectifiant, autour du point O, pour obtenir une surface admettant l'arête comme ligne de striction. Du reste la note ci-jointe apprend à déduire la solution générale du problème dans tous les cas.

§ 5.

EXPRESSIONS GÉNÉRALES DE LA VITESSE. — FIXITÉ D'UN POINT.

Revenons maintenant à la question générale qui nous occupe. Les formules (2) nous donnent les expressions générales des projections de la vitesse du point M supposé solidaire du trièdre T. Mais si le point M est mobile par rapport à ce trièdre, il faut ajouter à ces expressions celles qui proviennent de la vitesse du point M dans son mouvement relatif par rapport au trièdre T, c'est-à-dire: $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$.

En désignant alors par v_x, v_y, v_z les projections sur Ox, Oy, Oz de la vitesse du point M dans son mouvement par rapport au corps S, nous aurons ces expressions essentielles :

$$(8) \qquad \begin{cases} v_x = \xi - ry + \frac{dx}{dt}, \\ v_y = rx - pz + \frac{dy}{dt}, \\ v_z = \zeta + py + \frac{dz}{dt}. \end{cases}$$

Un cas particulier important doit être ici mentionné. Qu'arriverait-il si le point M était fixe dans le corps S? C'est là un fait qui se présentera au cours de ces recherches. Il est clair que pour l'exprimer analytiquement il sera nécessaire et suffisant d'écrire que les projections de sa vitesse dans son mouvement par rapport à S sont nulles.

De là les équations :

$$(9)\qquad \begin{cases} \xi - ry + \dfrac{dx}{dt} = 0, \\ rx - pz + \dfrac{dy}{dt} = 0, \\ \zeta + py + \dfrac{dz}{dt} = 0. \end{cases}$$

§ 6.

INTERPRÉTATION DES ROTATIONS p ET r.

Une application immédiate de ces formules peut être faite à l'interprétation géométrique des deux rotations p et r, q étant nul.

Prenons un point A quelconque mais fixe dans le corps S, en sorte que ses coordonnées x, y, z vérifieront précisément les équations (9). Par ce point A menons un vecteur $\overline{AU}$ de longueur 1, parallèle à (d) (ou Oz) et de même sens que Oz : les coordonnées du point U seront :

$$x, y, z + 1,$$

les projections de sa vitesse dans son mouvement par rapport à S seront, par application des formules (8) :

$$v_x = \xi - ry + \frac{dx}{dt},$$

$$v_y = rx - p(z+1) + \frac{dy}{dt},$$

$$v_z = \zeta + py + \frac{dz}{dt},$$

et, eu égard aux équations (9), qui sont satisfaites, il reste

$$v_x = 0, \qquad v_y = -p, \qquad v_z = 0.$$

La vitesse du point U est donc parallèle à l'axe Oy et mesurée suivant la direction Oy par $-p$.

Le point U décrit, sur la sphère de rayon 1 qui a A comme centre, une courbe sphérique, trace du cône directeur de l'axoïde (Φ). La tangente en U à cette courbe sphérique étant parallèle à Oy, on peut faire choix d'un sens de parcours pour l'arc σ de la courbe de façon que la tangente menée dans le sens des arcs croissants ait précisément le sens de Oy; dès lors, la vitesse de U sur la courbe sphérique a pour expression $\frac{d\sigma}{dt}$ et l'on a

$$\frac{d\sigma}{dt} = -p. \tag{10}$$

On voit que $d\sigma$ est l'arc sphérique infiniment petit qui mesure l'angle de deux positions consécutives de (d) et il résulte de (10) que $-pdt$ représente cet angle. Telle est donc la signification de p.

Par une méthode toute pareille on reconnaîtrait que si l'on mène par A une parallèle AU_1 de longueur 1 à la direction Ox, le point U_1 décrit une courbe sphérique dont la tangente en U_1 est parallèle à Oy. On fera choix pour le sens direct de l'arc σ_1 de cette courbe du sens tel que la tangente en M_1 menée dans le sens des arcs croissants ait le sens même de Oy. On aura alors :

$$\frac{d\sigma_1}{dt} = r. \tag{10 bis}$$

Par suite, $rdt = d\sigma_1$ mesure l'angle infiniment petit de deux positions consécutives de Ox, ce qui fournit une interprétation de r.

§ 7.

CONDITIONS DE VIRATION. RÉDUCTION DES EXPRESSIONS DES VITESSES.

Tout ce qui vient d'être dit pour le mouvement $\boxed{\text{T, S}}$ peut être dit pour le mouvement $\boxed{\text{T, S}'}$.

Si donc on désigne par p', q', r' les composantes de la rotation, par ξ', η', ζ' les projections de la vitesse de O dans ce nouveau mouvement, nous devons encore avoir :

$$\eta' = 0, \qquad q' = 0.$$

De plus, le paramètre de distribution de l'axoïde (Φ') sera donné par la formule

$$k' = -\frac{\xi'}{p'},$$

analogue à la formule (7).

Mais entre les éléments des mouvements $\boxed{\text{T, S}}$ $\boxed{\text{T, S}'}$ il doit exister certaines relations. En effet, de ces deux mouvements résulte le mouvement relatif des corps S et S'; il faudra donc exprimer que, dans ce dernier mouvement, (d) est l'axe du mouvement hélicoïdal tangent et que les conditions spéciales à *la viration* des axoïdes (Φ) (Φ') sont bien remplies.

En premier lieu, il faut qu'il y ait raccordement le long de Oz ou (d), ce qui exige l'égalité $k' = k$ des paramètres de distribution, c'est-à-dire

$$k' = k = -\frac{\xi'}{p'} = -\frac{\xi}{p}. \tag{11}$$

Observons maintenant que si l'on considère, comme on l'a fait dans les formules (8), un point M de coordonnées x, y, z mobile par

IMPRIMERIE NATIONALE.

rapport à S′, les projections v'_x, v'_y, v'_z de sa vitesse par rapport au corps S′ seront :

$$(8\,bis)\qquad \begin{cases} v'_x = \xi' - r'y + \dfrac{dx}{dt}, \\ v'_y = r'x - p'z + \dfrac{dy}{dt}, \\ v'_z = \zeta' + p'y + \dfrac{dz}{dt}. \end{cases}$$

Ces formules sont tout à fait analogues aux formules (8).

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse d'un point M fixe par rapport au corps S; alors les équations (9) se trouvent vérifiées et, dans ce cas, les expressions (8 *bis*) sont celles des projections de la vitesse d'entraînement du point M dans le mouvement $\boxed{\text{S, S}'}$ de S par rapport à S′. Or les équations (9) permettent, par simple soustraction, d'éliminer $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ des formules (8 *bis*) qui deviennent

$$\begin{aligned} v'_x &= (\xi' - \xi) - (r' - r)y, \\ v'_y &= (r' - r)\,x - (p' - p)\,z, \\ v'_z &= (\zeta' - \zeta) + (p' - p)\,y. \end{aligned}$$

Mais puisque Oz est l'axe du mouvement hélicoïdal tangent, en appelant h le pas et ω la vitesse angulaire, les formules précédentes doivent être équivalentes à

$$v'_x = -\omega y, \qquad v'_y = \omega x, \qquad v'_z = h\omega,$$

ce qui par comparaison donne

$$\xi' - \xi = 0, \qquad r' - r = \omega, \qquad p' - p = 0,$$
$$\zeta' - \zeta = h\omega,$$

On remarquera que ces formules entraînent la relation (11).

En résumé, si nous nous reportons à l'ensemble des douze quantités

$$\xi, \eta, \zeta, \qquad p, q, r, \qquad \xi', \eta', \zeta', \qquad p', q', r',$$

nous trouvons qu'eu égard au choix que nous avons fait du trièdre T on doit avoir (conditions nécessaires et suffisantes) :

$$(12) \qquad \begin{cases} \eta = 0, & q = 0, & \eta' = 0, & q' = 0, \\ \xi' = \xi, & p' = p. \end{cases}$$

En outre, la vitesse angulaire dans le mouvement $\boxed{S, S'}$ est donnée par la formule

$$(13) \qquad \omega = r' - r,$$

et le pas du mouvement hélicoïdal a pour valeur

$$(14) \qquad h = \frac{\zeta' - \zeta}{r' - r}.$$

Alors en tenant compte de ces résultats les formules (8) (8 *bis*) peuvent s'écrire

$$(15) \quad v_x = \xi - ry + \frac{dx}{dt}, \qquad v_y = rx - pz + \frac{dy}{dt}, \qquad v_z = \zeta + py + \frac{dz}{dt}.$$

$$(16) \quad v'_x = \xi - r'y + \frac{dx}{dt}, \qquad v'_y = r'x - pz + \frac{dy}{dt}, \qquad v'_z = \zeta' + py + \frac{dz}{dt}.$$

Telles sont les formules fondamentales qui vont nous servir dans ce qui va suivre.

On observera que les systèmes (15) et (16) ne diffèrent que par le changement de r et ζ en r' et ζ' : ξ et p sont les mêmes.

L'équation $\xi' = \xi$ exprime que la différence géométrique des vitesses du point O sur les surfaces (Φ) (Φ') est égale à un vecteur $\zeta' - \zeta$ porté par Oz.

L'équation $p' = p$, d'après l'équation (10), exprime que l'axe (d) fait le même angle infiniment petit $-pdt$ avec chacune de ses positions voisines simultanées dans S et S' (ou sur $[\Phi]$ et sur $[\Phi']$).

CHAPITRE II.

LE PROBLÈME DES COURBES ENVELOPPES.

§ 8.

CARACTÈRE EXCEPTIONNEL DES COURBES DOUÉES D'ENVELOPPES. COURBES CONJUGUÉES. CAS DES MOUVEMENTS DITS *PLANS* OU *SPHÉRIQUES*.

Supposons une courbe (e) solidaire d'un corps S mobile par rapport à un second corps S′. En général, il n'y aura pas dans le corps S′ de courbe (e') à laquelle la courbe (e) restera tangente; autrement dit, en général la courbe (e) n'aura pas d'enveloppe. Lorsque cette circonstance exceptionnelle se présentera, la courbe (e) est à son tour l'enveloppe de la courbe (e'), ces deux courbes (e), (e') seront alors dites *conjuguées*.

Ce caractère *exceptionnel* de l'existence d'une enveloppe n'est guère suggéré par ce que l'on sait sur le mouvement d'une figure plane dans son plan ou d'une figure sphérique sur sa propre sphère. On sait en effet que, dans ces cas, toute courbe plane solidaire de la figure plane a une enveloppe et, de même, toute ligne sphérique solidaire de la figure sphérique.

Cela tient à ce que l'étude du mouvement d'une figure plane dans son plan et l'étude du mouvement d'une figure sphérique sur sa propre sphère ne sont que des études incomplètes de deux mouvements : le premier, dans lequel un corps glisse par une face plane sur un plan fixe; l'autre, où le corps glisse par une face sphérique sur une sphère égale. Beaucoup de géomètres ont coutume de borner l'étude de ces mouvements à l'étude de ce qui se passe soit dans une tranche plane parallèle à la face glissante, soit, dans le

second mouvement, à l'étude de ce qui se passe dans une couche sphérique concentrique à la face sphérique glissante. Or en effet, dans une telle tranche plane ou dans une telle couche sphérique, toute courbe solidaire de la figure mobile a une enveloppe. Il n'en est plus de même si, laissant de côté la tranche plane ou la figure sphérique, on prend une courbe *quelconque* solidaire du corps mobile; on constate alors le caractère exceptionnel dont je parlais il n'y a qu'un instant.

§ 9.

CÔNE DES VITESSES. CARACTÈRE DES COURBES DOUÉES D'ENVELOPPE. HÉLICES EXCEPTIONNELLES.

Nous allons donc nous attacher tout d'abord à caractériser les courbes solidaires d'un corps solide mobile S qui sont douées d'une enveloppe et par une notation dont nous convenons tout de suite nous appellerons (e) toute courbe de S douée d'enveloppe et nous appellerons (e') cette enveloppe dans le corps S'.

Considérons un point P solidaire du corps S; désignons par $\overline{V'_P}$ sa vitesse dans le mouvement $\boxed{S, S'}$ d'entraînement de S par rapport à S' : appelons t_P la droite du corps S qui porte cette vitesse. Au cours du mouvement continu de S par rapport à S' la droite t_P tourne autour du point P en décrivant dans le corps S un cône Γ_P de sommet P que nous appellerons le *cône des vitesses*. Tout point P du corps S se trouve être ainsi le sommet d'un tel cône et chaque génératrice de ce cône est à une certaine époque la droite qui sert de support à la vitesse d'entraînement du point P dans le mouvement $\boxed{S, S'}$.

Ceci étant, considérons une courbe (e) douée d'enveloppe. A toute époque, la courbe (e), solidaire du corps S, est tangente à

une courbe déterminée (e') solidaire du corps S'. Soit P le point de S où a lieu le contact actuel. Concevons un mobile M se déplaçant à la fois dans S et dans S' et qui coïncide constamment avec le point de contact. Dans le corps S la courbe (e) est la trajectoire de ce mobile et dans le corps S' la trajectoire est la courbe (e') : P est le point du corps S avec lequel coïncide le point M à l'époque considérée; appelons : V_M la vitesse de M sur la courbe (e), dans le corps S; $\overline{V'_M}$ sa vitesse sur la courbe (e') dans le corps S'; enfin nous avons déjà appelé $\overline{V'_P}$ la vitesse d'entraînement de P dans le mouvement $\boxed{S, S'}$. On aura, d'après la composition des vitesses :

$$\overline{V'_M} = \overline{V_M} + \overline{V'_P}.$$

Or $\overline{V_M}$ et $\overline{V'_M}$ sont portées par les tangentes aux courbes $(e), (e')$ respectivement, donc par la même droite, puisque (e) et (e') se touchent au point M. Cette tangente commune aux courbes $(e), (e')$ doit donc porter $\overline{V'_P}$, différence géométrique de $\overline{V_M}$ et de $\overline{V'_M}$. Cela montre que la tangente commune aux courbes (e), (e') n'est autre que la génératrice t_P du cône des vitesses.

On a donc ce premier résultat: *Toute courbe* (e) *douée d'enveloppe possède la propriété qu'en chacun de ses points* P *sa tangente est une génératrice d'un cône* Γ_P *défini par son sommet* P, *à savoir le cône des vitesses.*

La réciproque est-elle vraie?

Elle l'est, à *une* curieuse *exception près,* ainsi qu'on va s'en rendre compte.

Prenons en effet une courbe (c) telle que, si P est l'un quelconque de ses points, la tangente en P appartienne au cône des vitesses : soit t_P cette tangente. A tout point P de la courbe (c) correspond une époque t parfaitement déterminée, à savoir celle où la tangente t_P sert de support à la vitesse d'entraînement du point P.

Or il y a ici une *distinction essentielle* à faire. Il se peut ou bien qu'une même époque corresponde à tous les points de la courbe, ou bien que cette époque varie sur la courbe avec le point P.

Dans le premier cas, *à une même époque* t, la tangente en tout point P sert de support à la vitesse d'entraînement de ce point. La courbe ne peut être alors qu'une hélice circulaire ayant l'axe (d) et le pas h du mouvement hélicoïdal tangent. Cette hélice glisse sur elle-même au cours du mouvement de torsion instantané.

Ces hélices qui, à un moment donné t, forment une double infinité, forment au contraire une triple infinité si l'on considère toute l'étendue du mouvement. Ce sont des courbes intégrales du cône des vitesses, mais des courbes intégrales *exceptionnelles,* car elles ne font pas partie de la catégorie des courbes douées d'enveloppe.

Supposons au contraire que l'époque t change sur la courbe, que nous appellerons maintenant (e), lorsque l'on va d'un point à l'autre. Concevons un mobile M qui à chaque époque t se trouve sur la courbe (e) au point P qui correspond à cette époque. La trajectoire du mobile M sera, dans le corps S′, une courbe (e'). *Je dis que la courbe* (e) *est tangente en* P *à la courbe* (e').

En effet, si l'on désigne par $\overline{V_M}$, $\overline{V'_M}$, $\overline{V'_P}$, la vitesse du point M sur la courbe (e), sa vitesse sur la courbe (e') et la vitesse d'entraînement du point P, on a, par la composition des vitesses :

$$\overline{V'_M} = \overline{V_M} + \overline{V'_P}.$$

Or $\overline{V_M}$, $\overline{V'_P}$ étant portées par la même droite t_P, tangente en P à la courbe (e), il en est de même de $\overline{V'_M}$, en sorte que la droite t_P est tangente aussi à la courbe (e'). Le théorème est donc démontré :

En résumé :

Si l'on excepte les hélices qui glissent sur elles-mêmes chacune au cours d'un des mouvements hélicoïdaux tangents, les courbes (e) *soli-*

daires du corps S *qui ont une enveloppe* (e') *dans le corps* S′ *sont caractérisées par la propriété d'être des courbes intégrales du cône des vitesses, c'est-à-dire d'admettre comme tangente en chacun de leurs points une génératrice du cône des vitesses qui a pour sommet ce point.*

§ 10.

DU GLISSEMENT.

Faisons choix, pour compter les arcs des courbes (e), (e'), de deux origines concordantes A, A′, c'est-à-dire de deux points qui coïncident à un moment donné. Adoptons un sens tel que (du moins dans un laps de temps donné) les sens des arcs croissants soient concordants sur les deux courbes et concordent avec le sens de la vitesse $\overline{V'_P}$ sur la tangente t_P; en appelant s et s' les arcs ainsi définis des courbes (e), (e') et v'_P la valeur numérique de la vitesse $\overline{V'_P}$, la formule géométrique

$$\overline{V'_M} = \overline{V_M} + \overline{V'_P}$$

donnera la formule algébrique

$$\frac{ds'}{dt} = \frac{ds}{dt} + v'_P,$$

ou

$$\frac{d(s'-s)}{dt} = v'_P.$$

La quantité $s'-s$ représente le glissement des courbes (e), (e') l'une sur l'autre et la formule précédente exprime que :

Lors du contact de deux courbes conjuguées (e), (e'), *la vitesse du glissement est égale à la vitesse d'entraînement du point de contact.*

IMPRIMERIE NATIONALE.

§ 11.

CAS D'UNE ROTATION TANGENTE. DÉFINITION DU CÔNE DES VITESSES DANS CE CAS.

Il résulte de ce théorème que le glissement ne pourra être nul que s'il y a des points dont la vitesse d'entraînement est nulle, c'est-à-dire dans le cas d'une rotation tangente.

Or, ainsi qu'on l'a déjà rappelé, si cela a lieu, on a $h=0$, $\zeta'-\zeta=0$, les axoïdes (Φ), (Φ') sont applicables. La courbe (e) doit être tracée sur (Φ) et la courbe (e') est alors la courbe homologue de (e) sur la surface (Φ'). Ce couple de courbes (e), (e') roulent ainsi l'une sur l'autre sans glisser. Bien entendu, il y a d'autres courbes (e) qui, dans ce cas encore, ont une enveloppe, mais le contact y comporte un glissement.

Du reste, dans ce cas particulier des axoïdes roulants, le cône Γ_P a une définition très simple.

Puisque le mouvement élémentaire tangent est une simple rotation autour de (d), la droite t_P qui porte la vitesse d'entraînement du point P est la normale en P au plan Π_P mené par (d) et par P. Mais ce plan Π_P, du moment où il passe par (d), est tangent quelque part à l'axoïde (Φ). Son enveloppe est donc le cône de sommet P circonscrit à l'axoïde (Φ). Quant à la normale t_P en P au plan Π_P, c'est une génératrice du cône supplémentaire. Donc :

Dans le cas où il existe à chaque instant une rotation tangente, le cône des vitesses Γ_P *n'est autre que le cône supplémentaire du cône circonscrit à l'axoïde* (Φ) *dont le point* P *est le sommet.*

Si l'on remarque que le plan Π_P est le plan normal en P à la courbe (e) on peut dire :

Lorsqu'il existe continûment une rotation tangente, les courbes douées

d'enveloppe sont caractérisées par la propriété que leurs plans normaux enveloppent l'axoïde (Φ).

Ces courbes, on le voit, sont caractérisées en dehors du second axoïde (Φ'). C'est là un cas particulier d'une proposition plus générale que nous formulerons plus loin.

§ 12.

CAS SPÉCIAL D'UN CORPS QUI GLISSE SUR UN PLAN.

Prenons un cas spécial, celui où le corps S et le corps S′ glissent l'un sur l'autre par une face plane. Les surfaces (Φ), (Φ') sont alors deux cylindres normaux à ces faces planes et qui roulent l'un sur l'autre sans glisser. Dans ce cas, la droite t_p balaie le plan mené par P parallèle aux faces planes, ce qui prouve qu'ici toutes les courbes (e) ont leurs tangentes parallèles à un plan fixe et sont par conséquent les courbes planes situées dans tous les plans parallèles à ce plan fixe.

Cette remarque situe dans le problème général des courbes douées d'enveloppe le cas spécial des figures planes et rend compte pourquoi l'étude du seul cas d'une figure plane mobile dans son plan ne pouvait déceler le caractère exceptionnel de ces courbes.

On peut remarquer que, comme dans le cas général du roulement des axoïdes, toute courbe tracée sur un des cylindres roulants en enveloppe une autre tracée sur l'autre. Le contact de ces deux courbes a lieu sans glissement, en sorte qu'il n'y a pas seulement que les sections droites des deux cylindres qui roulent sans glisser.

Remarque analogue pour les mouvements sphériques.

§ 13.

RÔLE DU CÔNE SUPPLÉMENTAIRE DU CÔNE DES VITESSES. LE COMPLEXE LINÉAIRE $\mathcal{L}$. — NORMALES STATIONNAIRES.

Nous avons vu intervenir, il y a un instant, dans un cas spécial le cône supplémentaire du cône des vitesses. Ce cône supplémentaire a un rôle essentiel, même dans le cas le plus général.

Considérons, en effet, le plan Π_P normal à la droite t_P; ce plan est normal non seulement à la courbe (e), mais encore à la trajectoire d'entraînement du point P dans le mouvement $\boxed{S, S'}$. C'est donc le plan polaire du point P dans le complexe linéaire $\mathcal{L}$ qui est le lieu des droites qui sont actuellement normales aux trajectoires de tous leurs points.

Supposons que, le mouvement s'effectuant, nous considérions toujours un même point P dans le corps S; les plans Π_P polaires de P dans les complexes linéaire successifs $\mathcal{L}$ vont envelopper dans le corps S un cône qui est visiblement le cône supplémentaire du cône Γ_P des vitesses.

Or le plan Π_P touche actuellement le cône supplémentaire du cône des vitesses suivant une droite issue du point P que nous représenterons par la notation d_P^{nn}. Cette droite présente une propriété remarquable.

Considérons le complexe linéaire $\mathcal{L}'$ relatif à un instant infiniment voisin et soit Π'_P le plan polaire de P dans ce complexe linéaire. Ce plan Π'_P, voisin de Π_P, est tangent lui aussi au cône supplémentaire. Il coupe le plan Π_P précisément suivant la droite d_P^{nn} de contact du plan Π_P avec le cône supplémentaire. Mais puisque d_P^{nn} résulte de l'intersection des plans Π_P, Π'_P polaires de P dans les complexes $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$, la droite d_P^{nn} appartient à la congruence linéaire qui est commune à ces deux complexes. Or les droites de cette congruence offrent la propriété singulière de jouer le rôle de nor-

males à deux époques consécutives : ce sont des « *normales stationnaires* ». En conséquence, nous obtenons pour d_P^{nn} cette définition :

La droite d_P^{nn} est la normale stationnaire issue du point P.

C'est cette propriété que nous rappelons en affectant la notation de cette droite du double indice n.

§ 14.

REPRÉSENTATION ANALYTIQUE DES NORMALES STATIONNAIRES. — RECHERCHE GÉNÉRALE DE LA CARACTÉRISTIQUE D'UN PLAN. — APPLICATION À LA CARACTÉRISTIQUE DU PLAN NORMAL. — LE PLAN AUXILIAIRE.

Il nous sera utile de traduire analytiquement les résultats précédents.

Nous allons par exemple chercher à définir la droite d_P^{nn} par ses éléments analytiques.

Soient x, y, z les coordonnées du point P fixe dans le corps S; puisque nous avons désigné par h le pas du mouvement hélicoïdal tangent et par ω la vitesse angulaire autour de l'axe (d) (ou Oz), la vitesse d'entraînement du point P dans le mouvement $\boxed{S, S'}$, ainsi que nous l'avons déjà écrit au n° 7, aura pour projections

$$-\omega y, \qquad \omega x, \qquad h\omega.$$

Le plan Π_P, normal en P à la vitesse d'entraînement de P, aura ainsi pour équation

$$-\omega y\,(X-x)+\omega x\,(Y-y)+h\omega\,(Z-z)=0$$

ou

$$-yX+xY+h\,(Z-z)=0. \tag{17}$$

La droite d_P^{uu} est la caractéristique de ce plan dans le corps S, lorsque le point P reste fixe dans ce même corps.

Soit, d'une façon générale, un plan ayant pour équation par rapport au trièdre T :

$$uX + vY + wZ + s = 0, \tag{18}$$

où u, v, w, s sont des fonctions de t. Proposons-nous de trouver la caractéristique de ce plan dans son mouvement par rapport au corps S. Cette caractéristique est la droite de contact du plan avec la développable qu'il enveloppe. Si l'on prend un point quelconque M mobile sur cette caractéristique, ce point ne peut que décrire une trajectoire tracée sur la développable. C'est-à-dire que la tangente à la trajectoire et par suite la vitesse ne peuvent qu'être dans le plan tangent, autrement dit dans le plan enveloppé lui-même. Ainsi, on aura la caractéristique en cherchant les points du plan dont la vitesse par rapport au corps S est tout entière contenue dans le plan lui-même.

Soient donc X, Y, Z les coordonnées d'un point de la caractéristique; les projections de sa vitesse seront: formules (15) n° 7,

$$\xi - rY + \frac{dX}{dt}, \qquad rX - pZ + \frac{dY}{dt}, \qquad \zeta + pY + \frac{dZ}{dt}.$$

En exprimant que cette vitesse est dans le plan proposé, il viendra

$$u\left(\xi - rY + \frac{dX}{dt}\right) + v\left(rX - pZ + \frac{dY}{dt}\right) + w\left(\zeta + pY + \frac{dZ}{dt}\right) = 0.$$

Mais en différentiant l'équation (18) on aura :

$$u\frac{dX}{dt} + v\frac{dY}{dt} + w\frac{dZ}{dt} + \frac{du}{dt}X + \frac{dv}{dt}Y + \frac{dw}{dt}Z + \frac{ds}{dt} = 0,$$

d'où, par soustraction de la précédente :

$$u(\xi - rY) + v(rX - pZ) + w(\zeta + pY) - \frac{du}{dt}X - \frac{dv}{dt}Y - \frac{dw}{dt}Z - \frac{ds}{dt} = 0.$$

En ordonnant, ceci s'écrit :

$$(19)\quad \left\{ \begin{array}{l} \left(rv - \frac{du}{dt}\right)X + \left(pw - ru - \frac{dv}{dt}\right)Y - \left(pv + \frac{dw}{dt}\right)Z \\ \qquad + u\xi + w\zeta - \frac{ds}{dt} = 0. \end{array} \right.$$

Telle est l'équation qui, jointe à (18), représente la caractéristique du plan proposé.

Nous aurons plusieurs fois à appliquer ce résultat.

Nous allons l'appliquer ici au plan Π_p en prenant l'équation (17) c'est-à-dire :

$$u = -y, \qquad v = x, \qquad w = h, \qquad s = -hz:$$

nous trouverons, d'après l'équation (19),

$$\left(rx + \frac{dy}{dt}\right)X + \left(ph + ry - \frac{dx}{dt}\right)Y - \left(px + \frac{dh}{dt}\right)Z$$
$$- \xi y + \zeta h + h\frac{dz}{dt} + \frac{dh}{dt}z = 0.$$

Mais il faut se rappeler que, le point x, y, z étant fixe dans le corps S, ses coordonnées x, y, z vérifient les équations (9), d'où l'on pourra tirer $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ pour les porter dans l'équation précédente.

On a ainsi :

$$rx + \frac{dy}{dt} = pz, \qquad ry - \frac{dx}{dt} = \xi, \qquad \zeta + \frac{dz}{dt} = -py,$$

ce qui permet d'écrire ainsi l'équation précédente :

$$pz\mathrm{X}+(\xi+ph)\,\mathrm{Y}-\left(px+\frac{dh}{dt}\right)\mathrm{Z}-\xi y-phy+\frac{dh}{dt}z=0.$$

Nous poserons, à côté de $k=-\dfrac{\xi}{p}$:

$$h_1=-\frac{dh}{pdt}=\frac{dh}{d\sigma}. \qquad \text{[formule (10)]} \tag{20}$$

alors l'équation précédente prend cette forme définitive :

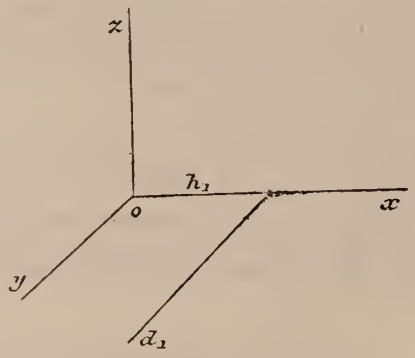
$$z\mathrm{X}-x\mathrm{Z}+(h-k)\,(\mathrm{Y}-y)+h_1\,(\mathrm{Z}-z)=0. \tag{21}$$

Le plan représenté par cette équation passe au point P (x, y, z); il coupe le plan Π_P, équation (17), suivant la droite d_P^{nn}.

§ 15.

COMPLEXE LINÉAIRE AUXILIAIRE $\mathcal{L}_1$.

Le plan auxiliaire (21) est susceptible d'une définition extrêmement simple.



Considérons la droite (d_1) parallèle à Oy, c'est-à-dire parallèle à la normale à l'axoïde (Φ), située dans le plan xOy et y ayant pour

abscisse $x = h_1$. Nous allons considérer le complexe linéaire auxiliaire $\mathcal{L}_1$, d'axe (d_1), ayant pour paramètre ou pas $h - k$.

Ce complexe linéaire $\mathcal{L}_1$ est le lieu des droites normales aux trajectoires de leurs points dans tout mouvement hélicoïdal d'axe (d_1) dont $h - k$ est le pas. Considérons dès lors une vitesse de rotation égale à 1 autour de (d_1) et une vitesse de glissement $h - k$ le long de (d_1). La vitesse qui résulte pour le point P (x, y, z) de cette rotation et de cette translation a pour projections

$$z, \qquad h - k, \qquad h_1 - x.$$

Le plan normal à la vitesse du point P, c'est-à-dire le plan polaire du point (x, y, z) dans le complexe $\mathcal{L}_1$, a ainsi pour équation

$$z(X - x) + (h - k)(Y - y) + (h_1 - x)(Z - z) = 0,$$

équation qui ne diffère pas de (21).

Donc :

Le plan auxiliaire qui coupe le plan Π_P *normal suivant la normale stationnaire est le plan polaire du point P dans le complexe linéaire auxiliaire* $\mathcal{L}_1$.

Il faut remarquer que, si l'on avait cherché la caractéristique du plan Π_P dans le corps S′ au lieu de la chercher dans le corps S, on aurait trouvé le même résultat. En effet la droite d_P^{nn} est une normale stationnaire. Or la congruence des normales stationnaires est la même si l'on considère, au lieu du mouvement $\boxed{S, S'}$, son inverse $\boxed{S', S}$. Du reste l'équation (21) sera la même pour le corps S′ car il n'y figure ni r ni ζ, qui sont les seuls éléments par où se différentient les deux corps dans la question.

IMPRIMERIE NATIONALE.

§ 16.

DIRECTRICES DE LA CONGRUENCE DES NORMALES STATIONNAIRES.

Il est aisé de trouver les directrices rectilignes de la congruence des normales stationnaires. Il résulte en effet de ce qui précède que cette congruence est commune aux complexes $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}_1$. Si l'on prend le point P sur une des directrices rectilignes la droite d_P^{nn} devient indéterminée. Les plans polaires de P dans les deux complexes doivent alors coïncider.

En exprimant cette condition on est conduit à écrire

$$\frac{z}{-y} = \frac{h-k}{x} = \frac{h_1 - x}{h}.$$

Posons, pour abréger :

$$(22) \qquad \begin{cases} A = x^2 - h_1 x + h(h-k), \\ B = y(x-h_1) - hz, \\ C = zx + (h-k)y. \end{cases}$$

Les équations qui définissent les directrices de la congruence des normales stationnaire seront alors

$$(23) \qquad A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0.$$

La première équation est du second degré en x. Les deux directrices sont donc parallèles au plan $x = 0$, c'est-à-dire au plan asymptote commun aux axoïdes.

Prenons une des deux racines x de cette équation $A = 0$, l'équa-

tion B = o montre que la directrice correspondante résulte de l'intersection du plan parallèle à zOy par le plan

$$y = \frac{h}{x - h_1} z$$

qui passe par l'axe Ox.

Autrement dit : *l'axe* Ox *et la droite à l'infini du plan* zOy *comptent parmi les normales stationnaires.*

Nous terminerons ce sujet en indiquant la signification des quantités que nous avons désignées par A, B, C.

Si l'on se reporte aux équations (17), (21) des deux plans qui se coupent suivant la normale stationnaire d_{P}^{nn}, on constate aisément que A, B, C sont les paramètres directeurs de la normale stationnaire issue du point (x, y, z) en sorte que cette normale stationnaire a aussi pour équations :

$$\frac{\mathrm{X} - x}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{Y} - y}{\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{Z} - z}{\mathrm{C}}.$$

CHAPITRE III.

DÉTERMINATION DES COURBES DOUÉES D'ENVELOPPE.

§ 17.

QUESTION D'ANALYSE À LAQUELLE SE RAMÈNE LE PROBLÈME. EMPLOI D'UNE MÉTHODE PARTICULIÈRE AU PROBLÈME. SYSTÈME D'ÉQUATIONS DÉFINITIF.

Nous utiliserons ultérieurement les résultats que nous venons d'établir. Nous allons pousser plus loin en traitant de la détermination analytique des courbes (e).

Puisque, en tout point P d'une courbe (e) du corps S, la tangente t_P doit être portée par le cône Γ_P, lequel est défini *a priori* par son sommet P, on voit que, si l'on écrit l'équation de ce cône sous la forme :

$$\varphi(x, y, z, X-x, Y-y, Z-z) = 0,$$

équation où φ est homogène en $X-x$, $Y-y$ et $Z-z$, les courbes (e) sont définies par la condition de vérifier une équation du premier ordre entre les coordonnées x, y, z, à savoir :

$$\varphi(x, y, z, dx, dy, dz) = 0.$$

Ces courbes rentrent donc dans un type général considéré par Monge[1] et dont l'intégration revient à chercher les arêtes des sur-

[1] Voir DARBOUX : *Mémoire sur les solutions singulières*, p. 36. *Savants étrangers*, t. XXVII.

faces intégrales d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre, non linéaire. Ces surfaces sont précisément celles dont le plan tangent en chaque point P doit toucher le cône Γ_P. Mais il serait ici peu avantageux d'aborder le problème par cette méthode. Il est préférable de recourir à un procédé qui utilise l'origine spéciale des courbes qui nous occupent.

Reprenons la considération de ce point mobile M qui coïncide constamment avec le point de contact de la courbe (e) avec son enveloppe (e').

Désignons toujours par v_x, v_y, v_z les projections de la vitesse de M dans son mouvement sur la courbe (e), ainsi que nous l'avons déjà fait, et par v'_x, v'_y, v'_z les projections de la vitesse de M dans son mouvement sur la courbe (e'). Comme (e), (e') se touchent en M, il faut avoir :

$$\frac{v'_x}{v_x} = \frac{v'_y}{v_y} = \frac{v'_z}{v_z} = \lambda,$$

où λ est un coefficient de proportionnalité. Les formules (15), (16) donnent $v_x, v_y, v_z, v'_x, v'_y, v'_z$. On trouve de la sorte :

$$\begin{cases} \xi - r'y + \dfrac{dx}{dt} = \lambda\left(\xi - ry + \dfrac{dx}{dt}\right), \\ r'x - pz + \dfrac{dy}{dt} = \lambda\left(rx - pz + \dfrac{dy}{dt}\right), \\ \zeta' + py + \dfrac{dz}{dt} = \lambda\left(\zeta + py + \dfrac{dz}{dt}\right). \end{cases}$$

On peut écrire encore :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + \xi = \dfrac{r' - \lambda r}{1 - \lambda} y, \\ \dfrac{dy}{dt} - pz = -\dfrac{r' - r\lambda}{1 - \lambda} x, \\ \dfrac{dz}{dt} + py = \dfrac{\lambda\zeta - \zeta'}{1 - \lambda}. \end{cases}$$

En divisant ainsi par $(1-\lambda)$ il ne faut pas cependant perdre de vue les solutions pour lesquelles $1-\lambda$ serait nul. Or, dans ce cas, les équations se réduisent à :

$$(r'-r)y=0, \qquad (r'-r)x=0, \qquad \zeta'-\zeta=0.$$

L'équation $\zeta'-\zeta=0$ exprime que le mouvement $\boxed{S, S'}$ admet une rotation tangente dont Oz est l'axe et, comme on ne saurait avoir en même temps $r'-r=0$, c'est donc que $x=0, y=0$.

En effet, dans ce cas, les axoïdes (Φ), (Φ') sont applicables l'un sur l'autre, roulent sans glisser et toute courbe de (Φ) a une enveloppe tracée sur (Φ') sur laquelle elle roule sans glisser. Nous avons déjà rappelé ce fait plus haut.

Mais dans le cas général, $1-\lambda$ n'étant pas nul, nous pourrons poser :

$$(24) \qquad \begin{cases} \mu=\dfrac{r'-r\lambda}{1-\lambda}, \\ c=\dfrac{r\zeta'-r'\zeta}{r'-r}=hr-\zeta=hr'-\zeta', \end{cases}$$

et il viendra :

$$(25) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-\xi+\mu y, \\ \dfrac{dy}{dt}=pz-\mu x, \\ \dfrac{dz}{dt}=-py+e-h\mu. \end{cases}$$

Ces formules, où μ est une quantité tout à fait arbitraire, définissent analytiquement les coordonnées d'un point M mobile en général par rapport au trièdre T et tel que ses trajectoires (e) et (e') dans le corps S et dans le corps S′ soient deux courbes en contact constant l'une avec l'autre.

§ 18.

LES COURBES D'ENGRÈNEMENT.

Arrêtons-nous sur cette idée que les équations (25) définissent plutôt d'une façon directe x, y, z, c'est-à-dire un point M mobile par rapport au trièdre T. Ce point va décrire, par rapport au trièdre T, une certaine courbe que, par une extension naturelle d'une notion et d'une locution déjà courantes dans la théorie des engrenages, nous appellerons la *courbe d'engrènement.*

Si l'on suppose fixe le trièdre T et si l'on considère alors les deux corps S, S′ comme mobiles par rapport à T, de façon à réaliser les mouvements $\boxed{S, T}$ $\boxed{S', T}$ inverses de ceux déjà considérés, les corps S et S′ auront entre eux le même mouvement relatif; les courbes (e) et (e') mobiles toutes deux par rapport au trièdre T ne cesseront pas d'être en prise et le lieu de leur point de contact M sera précisément la courbe d'engrènement (ε).

On voit que chaque équipage de courbes (e), (e'), (ε) dépend d'une fonction arbitraire μ [ou λ si l'on veut, grâce à la première des équations (24)]; on peut se proposer de rechercher si cette circonstance n'est pas de nature à faciliter leur détermination générale.

§ 19.

LES TRAJECTOIRES COMME CAS PARTICULIERS D'ENVELOPPES.

Nous présenterons auparavant quelques remarques au sujet de l'interprétation des équations que nous venons de former.

Observons d'abord que si l'on prend $\lambda = \infty$, ou, ce qui revient

au même, $\mu = r$ dans les équations (25), celles-ci deviennent les équations (9); dans ce cas, le point M est fixe dans le corps S, la position fixe P qu'il occupe dans ce corps décrit dans le corps S' une trajectoire (e') qui apparaît ainsi comme conjuguée d'une ligne (e) infiniment petite réduite à un point P : dans le mouvement inverse de S' par rapport à S, cette courbe (e') glisse constamment sur le point fixe P.

En faisant au contraire $\lambda = 0$ ou $\mu = r'$, on constaterait que le point M coïncide alors avec un point P' fixe dans le corps S' et le lieu de ce point P' dans le corps S est une courbe (e) qui, au cours du mouvement de S par rapport à S', glisse sur ce point fixe P'.

Ainsi, dans cette théorie, les trajectoires des points de l'un ou l'autre corps dans le second corps apparaissent comme les courbes conjuguées de courbes infiniment petites réduites à des points.

§ 20.

LES COURBES À ENVELOPPES DÉFINIES COMME TRAJECTOIRES DES POINTS D'UN CORPS AUXILIAIRE MOBILE.

Pour interpréter dans le cas le plus général les équations (25), nous allons chercher à résoudre le problème suivant :

Est-il possible de trouver un corps auxiliaire S_1 *mobile par rapport aux corps* S *et* S', *de telle façon que les trajectoires* (e) *et* (e') *d'un point quelconque* P_1 *de ce corps* S_1 *soient des courbes conjuguées?*

Pour définir le corps S_1, il suffit de se donner les éléments ξ_1, η_1, ζ_1, p_1, q_1, r_1 de la torsion tangente dans le mouvement $\boxed{T, S_1}$ du trièdre T par rapport à S_1.

Le point P_1 étant fixe dans le corps S_1 on aura, par analogie avec les équations (9) :

$$(26)\qquad \begin{cases} \xi_1 + q_1 z - r_1 y + \dfrac{dx}{dt} = 0, \\ \eta_1 + r_1 x - p_1 z + \dfrac{dy}{dt} = 0, \\ \zeta_1 + p_1 y - q_1 x + \dfrac{dz}{dt} = 0, \end{cases}$$

qui expriment que les projections de la vitesse du point P_1 dans son mouvement supposé par rapport au corps S_1 sont nulles.

Il faudra que toutes les solutions de ces équations (26) vérifient les équations (25) par un choix convenable de la fonction μ. Or, en éliminant $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ entre les équations (25) et (26), ce qui se fait par simple soustraction, on trouve :

$$(27)\qquad \begin{cases} \xi_1 - \xi + q_1 z - (r_1 - \mu) y = 0, \\ \eta_1 + (r_1 - \mu) x - (p_1 - p) z = 0, \\ \zeta_1 + e - h\mu + (p_1 - p) y - q_1 x = 0. \end{cases}$$

Multiplions par x la première de ces équations et par y la seconde, puis ajoutons, il viendra :

$$(28)\qquad (\xi_1 - \xi) x + \eta_1 y + q_1 zx - (p_1 - p) zy = 0.$$

Or, puisque ceci doit avoir lieu pour tout point P_1, solidaire du corps S_1, une pareille relation doit être une identité.

On a donc forcément :

$$(29)\qquad \xi_1 = \xi, \qquad \eta_1 = 0, \qquad q_1 = 0, \qquad p_1 = p.$$

IMPRIMERIE NATIONALE.

Alors les équations (27) entraînent les suivantes :

$$(29\ bis)\qquad \begin{cases} r_1 - \mu = 0, \\ \zeta_1 + e - h\mu = 0. \end{cases}$$

En sorte que l'on a en résumé :

$$(30)\qquad \begin{cases} \xi_1 = \xi, \quad \eta_1 = 0, \quad \zeta_1 = h\mu - e, \\ p_1 = p, \quad q_1 = 0, \quad r_1 = \mu. \end{cases}$$

Ceci prouve que, si l'on prend pour μ une fonction quelconque, mais déterminée du temps, les formules (30) définissent le mouvement d'un corps que nous n'appellerons plus S_η mais S_μ jouissant de la propriété que les trajectoires de tous ses points dans le corps S et dans le corps S′ sont des courbes respectivement conjuguées (e) et (e').

En prenant pour μ toutes les déterminations on obtiendra tous les corps tels que S_μ et tous les couples de courbes conjuguées.

§ 21.

DÉTERMINATION DES ÉLÉMENTS DE VIRATION DU CORPS AUXILIAIRE. — MOUVEMENTS HÉLICOÏDAUX TANGENTS SUR LA MÊME VIS. — VIRATION SIMULTANÉE DES TROIS AXOÏDES (Φ), (Φ'), (Φ_μ).

Cherchons la vitesse d'entraînement du point $P_1\ (x, y, z)$ du corps S_μ, μ ayant été choisi et fixé, par rapport à S dans le mouvement $\boxed{S_\mu, S}$.

Il suffit d'écrire les formules générales (8):

$$v_x = \xi - ry + \frac{dx}{dt},$$
$$v_y = rx - pz + \frac{dy}{dt},$$
$$v_z = \zeta + py + \frac{dz}{dt},$$

où x, y, z vérifient les équations (25) qui expriment maintenant la fixité du point $P_1(x, y, z)$ dans le corps S_μ.

En tirant $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ des équations (25), les équations qui expriment v_x, v_y, v_z deviennent :

$$v_x = -(r-\mu)y, \qquad v_y = (r-\mu)x, \qquad v_z = h(r-\mu).$$

En conséquence, dans le mouvement $\boxed{S_\mu, S}$, le mouvement hélicoïdal tangent a même axe (d) et même pas h que le mouvement hélicoïdal tangent au mouvement $\boxed{S', S}$.

On dit dans ce cas que les deux mouvements hélicoïdaux ont lieu sur la même *vis*. Ils ne diffèrent que par la valeur de la vitesse angulaire qui est $(r-\mu)$ dans le cas du mouvement $\boxed{S_\mu, S}$ et qui est $r-r'$ dans le mouvement $\boxed{S', S}$.

La forme même des équations (30) manifeste que le lieu de l'axe (d) dans le corps S_μ est un axoïde (Φ_μ) dont O est le point central, zOx le plan central et dont le paramètre de distribution est

$$-\frac{\xi_1}{p_1} = -\frac{\xi}{p} = k,$$

c'est-à-dire égal au paramètre de distribution des axoïdes (Φ), (Φ'). En conséquence, au cours du mouvement $\boxed{S_\mu, S}$, les surfaces (Φ), (Φ_μ) virent l'une sur l'autre. Il en est du reste évidemment de même de (Φ') et de (Φ_μ); en sorte qu'au cours du mouvement les trois surfaces (Φ), (Φ'), (Φ_μ) virent simultanément les unes sur les autres, en se raccordant à chaque instant suivant la même génératrice, à savoir l'axe (d) de la torsion tangente.

On retrouve ainsi la généralisation de ce fait de trois courbes planes (C), (C'), (C_1) roulant simultanément l'une sur l'autre en se touchant toujours au même point, le roulement ayant lieu sans

glissement. On sait que tout point P_1 lié à (C_1) décrit, par rapport aux courbes (C), (C'), deux courbes qui sont deux profils conjugués dans le mouvement défini par le roulement réciproque des courbes (C), (C').

§ 22.

EXTENSION COMPLÈTE DES PROPRIÉTÉS DU MOUVEMENT PLAN.

Mais il y a plus. On sait que, si l'on considère une courbe plane (A_1) solidaire d'une autre courbe plane (C_1) que l'on fait rouler successivement sur deux courbes (C), (C') et les enveloppes de (A_1) par rapport à deux figures planes invariables solidaires des courbes (C), (C'), respectivement, ces enveloppes se trouvent être deux profils conjugués dans le roulement réciproque des courbes (C), (C'). La même propriété se retrouve ici.

Prenons en effet pour μ une fonction particulière μ_1. Nous définissons ainsi le mouvement d'un corps auxiliaire S_{μ_1} dans les conditions précédemment indiquées. Définissons alors le mouvement d'un point M par rapport au trièdre T, au moyen des équations (25) où μ a une détermination quelconque, différente toutefois de μ_1. Ce point a trois trajectoires, savoir : (e) dans S, (e') dans S′ et (e_1) dans S_{μ_1}. Il est aisé de se rendre compte que ces trois courbes restent tangentes entre elles au cours du mouvement.

D'abord pour (e) et (e'), cela résulte de ce que les équations (25) définissent par rapport à T une courbe d'engrènement. Pour ce qui concerne (e) et (e_1), c'est la même chose, car les équations (25) ne changent pas si l'on remplace le corps S′ par le corps S_{μ_1}. Cela revient en effet à changer r', ζ' en μ_1 et $h\mu_1 - e$, ce qui ne modifie en rien les équations (25), car r' et ζ' n'y figurent que par la combinaison $e = hr' - \zeta'$; or, si l'on veut former cette combinaison dans le cas du couple de corps S et S_{μ_1}, il faudra former, en tenant compte des formules (30):

$$hr_1 - \zeta_1 = h\mu_1 - (h\mu_1 - e) = e,$$

autrement dit, les courbes d'engrènement sont les mêmes pour les mouvements $\boxed{S', S}$ et $\boxed{S_{\mu_1}, S}$. Ainsi, les courbes (e) et (e_1) restent bien tangentes entre elles. Même remarque pour (e') et (e_1).

La proposition générale se trouve donc bien établie :

Si l'on considère le corps auxiliaire S_{μ_1} et dans ce corps une courbe (e_1) douée d'une enveloppe (e) dans le corps S, elle a aussi une enveloppe (e') dans le corps S′ et les courbes (e), (e') sont conjuguées dans le mouvement $\boxed{S, S'}$.

§ 23.

FILES DE CERCLES. — FILES D'HÉLICES.

Enfin, on sait que dans le cas du mouvement relatif de deux figures planes dans un même plan, la considération des profils conjugués donne lieu à des files de cercles dont les centres sont répartis sur les courbes roulantes en sorte que l'on passe d'un profil à son conjugué en déformant la ligne des centres de ces cercles sans altérer sa longueur et sans altérer les rayons des cercles.

La généralisation de cette belle propriété se fait de la façon la plus aisée.

Remarquons d'abord qu'au point P où la courbe (e) touche son enveloppe (e') il passe une hélice circulaire (f) de pas h et d'axe (d), qui est tangente en P à la courbe (e). Cela tient à ce que la vitesse d'entraînement du point P, laquelle est tangente à l'hélice (f), est aussi tangente en P à la courbe (e). On retrouve ici la propriété d'après laquelle ces hélices (f) sont des intégrales exceptionnelles du cône des vitesses. La courbe (e) se trouve donc être l'enveloppe d'une file d'hélices (f) qui ont chacune pour axe l'axe actuel (d) de la torsion instantanée et pour pas le pas h de cette torsion. Le lieu des axes de ces hélices est l'axoïde (Φ).

La courbe (e') donne lieu à la même remarque, avec cette circonstance que c'est *la même* hélice (f) qui se trouve *actuellement* tangente à la fois aux courbes (e), (e') au point P où elles se touchent.

Il en résulte que, si l'on considère la file des hélices (f) dont (Φ) est le lieu des axes et qui enveloppent la courbe (e), on passera à la file des hélices qui enveloppent la courbe (e') en déformant la surface (Φ) qui est le lieu des axes de ces hélices de façon à en faire la surface (Φ'), tout en conservant sa forme à chacune des hélices. Il faut pour cela imaginer que chaque génératrice (d) de (Φ) entraîne avec elle le trièdre T constitué par la génératrice d (ou Oz), le point central O, le plan central zOx et la normale Oy à la surface en O, ce trièdre entraînant à son tour l'hélice (f) regardée comme lui étant invariablement liée.

On retrouve là toutes les circonstances que présentent les files de cercles et même les éléments de la construction de Poncelet pour les profils conjugués.

§ 24.

REMARQUE IMPORTANTE SUR LES CONDITIONS NÉCESSAIRES POUR DÉFINIR L'ÉQUIPAGE DES COURBES (e).

Nous ferons en terminant dans cet ordre d'idées une remarque générale.

Supposons que l'on se donne dans le corps S l'axoïde (Φ), supposons en outre qu'à chaque génératrice (d) de cet axoïde on fasse correspondre une valeur h du pas. Le mouvement $\boxed{S, S'}$ n'est point encore pour cela déterminé, car il faut, pour le déterminer complètement, connaître, en outre, la vitesse angulaire ω.

Cependant, l'équipage des courbes (e) se trouve entièrement

déterminé. En effet, d'après une remarque déjà faite, les quantités r', ζ' n'entrent dans les formules que par la combinaison

$$e = hr' - \zeta'$$

en sorte que la rotation $\omega = r' - r$ demeure arbitraire.

En prenant pour ω diverses déterminations, on obtient divers corps S′, S_μ, etc., mobiles par rapport à S et, dans chacun de ces corps, toute courbe (e) du corps S a son enveloppe (e'), (e_μ), . . A leur tour, ces courbes (e'), (e_μ), . . s'enveloppent entre elles dans les mouvements relatifs des corps S′, S_μ, . .

§ 25.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DES COURBES D'ENGRÈNEMENT. LEUR RÉDUCTION AUX QUADRATURES.

La détermination des courbes (ε) ayant été ramenée à l'intégration des équations (25), il est naturel que nous nous occupions maintenant des conditions d'intégration de ces équations.

Écrivons d'abord les équations (25) privées de seconds membres

$$(31)\qquad \begin{cases} \dfrac{dX}{dt} - \mu Y = 0, \qquad \dfrac{dY}{dt} - pZ + \mu X = 0, \\ \dfrac{dZ}{dt} + pY = 0. \end{cases}$$

Divisons par $-p$, posons $\frac{\mu}{p} = -\nu$ et souvenons-nous [formule (10)] que l'on a posé :

$$d\sigma = -p\,dt.$$

Les équations (31) deviendront :

$$(32)\qquad \begin{cases} \dfrac{dX}{d\sigma} - vY = 0, \qquad \dfrac{dY}{d\sigma} + Z + vX = 0, \\ \dfrac{dZ}{d\sigma} - Y = 0. \end{cases}$$

On peut prendre σ comme variable indépendante. En multipliant par X, Y, Z et ajoutant, il vient :

$$X\frac{dX}{d\sigma} + Y\frac{dY}{d\sigma} + Z\frac{dZ}{d\sigma} = 0,$$

ou

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \text{constante}.$$

Faisant abstraction du cas où la constante est nulle, il suffit de diviser X, Y, Z par sa racine carrée pour être ramené au cas où elle est égale à l'unité, en sorte que l'on aura :

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1.$$

On vérifie cette équation en posant :

$$(33)\qquad X = \frac{1 - uv}{u - v}, \qquad Y = i\frac{1 + uv}{u - v}, \qquad Z = \frac{u + v}{u - v},$$

où $i = \sqrt{-1}$.

Suivant un résultat trouvé dans un cas analogue par M. G. Darboux (*Leçons sur la théorie des surfaces*, t. I, p. 22 et suivantes), on constate que u, v vérifient alors une même équation de Riccati :

$$(34)\qquad \frac{d\theta}{d\sigma} = -\frac{i}{2}(\theta^2 + 2v\theta - 1).$$

Mais ici on peut profiter de ce que ν est arbitraire (comme μ l'était déjà) pour se donner *a priori* une solution de l'équation (34). Soit Le^{iM}, où L et M sont des fonctions réelles, une solution de l'équation (34).

On aura, en exprimant qu'elle vérifie cette équation :

$$\frac{dL}{d\sigma}e^{iM}+iLe^{iM}\frac{dM}{d\sigma}=-\frac{i}{2}\left(L^2e^{2iM}+2\nu Le^{iM}-1\right),$$

d'où l'on tire :

$$(35)\qquad \left\{\begin{array}{l} \nu=i\left(\dfrac{dL}{Ld\sigma}+i\dfrac{dM}{d\sigma}\right)-\dfrac{1}{2}\left(Le^{iM}-\dfrac{1}{L}e^{-iM}\right) \\ \quad=-\dfrac{dM}{d\sigma}-\dfrac{1}{2}\left(L-\dfrac{1}{L}\right)\cos M \\ \quad\quad+i\left[\dfrac{dL}{Ld\sigma}-\dfrac{1}{2}\left(L+\dfrac{1}{L}\right)\sin M\right]. \end{array}\right.$$

Maintenant, puisque ν doit être une quantité réelle, il faut que la partie imaginaire se réduise à zéro; on a ainsi :

$$\frac{dL}{Ld\sigma}-\frac{1}{2}\left(L+\frac{1}{L}\right)\sin M=0,$$

ou

$$(36)\qquad \sin M=\frac{2\dfrac{dL}{d\sigma}}{1+L^2}$$

et

$$(37)\qquad \nu=-\frac{dM}{d\sigma}-\frac{1}{2}\left(L-\frac{1}{L}\right)\cos M.$$

Posons alors, Ψ désignant une fonction arbitraire de t :

$$(38)\qquad L=\operatorname{tang}\frac{1}{2}\Psi.$$

IMPRIMERIE NATIONALE.

L'équation (36) devient :

$$\sin M = \frac{d\Psi}{d\sigma} \tag{36 bis}$$

et ν a la valeur :

$$\nu = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{d\Psi}{d\sigma}\right)^2}} \frac{d^2\Psi}{d\sigma^2} + \sqrt{1-\left(\frac{d\Psi}{d\sigma}\right)^2} \operatorname{colg} \Psi. \tag{37 bis}$$

Si l'on prend ν sous cette forme, l'équation de Riccati admet la solution :

$$\Omega = Le^{iM} = \operatorname{tang} \frac{\Psi}{2} \left[\sqrt{1-\left(\frac{d\Psi}{d\sigma}\right)^2} + i \frac{d\Psi}{d\sigma} \right].$$

Il suffira alors de poser

$$\theta = \Omega + \frac{1}{\theta_1}, \tag{39}$$

pour ramener l'équation de Riccati à la forme linéaire :

$$\frac{d\theta_1}{d\sigma} = i\left(\Omega + \nu\right)\theta_1 + \frac{i}{2}. \tag{40}$$

Cette équation s'intègre par quadratures.

Ayant alors l'intégration des équations (25) sans second membre, de simples quadratures donneront aussi l'intégration complète.

En résumé, le problème du mouvement d'un point M *qui décrit dans*

le trièdre T *une courbe d'engrènement et dans les corps* S, S′ *un couple de courbes conjuguées se ramène aux quadratures*[1].

Il peut même arriver que la détermination des courbes d'engrènement se fasse sans quadrature et qu'une seule quadrature achève de définir sur chacune d'elles le mouvement du point M.

[1] Il est clair qu'ayant obtenu par quadratures le mouvement le plus général du point M qui décrit dans le trièdre T une courbe d'engrènement, la connaissance des mouvements $\boxed{T, S}$, $\boxed{T, S'}$ permettra, par simple voie de composition des mouvements, d'obtenir les mouvements de M dans le corps S et dans le corps S′ et d'avoir ainsi le couple de courbes conjuguées (e) (e'), puisque ces courbes sont les trajectoires du point M dans les corps S et S′.

CHAPITRE IV.

APPLICATION

A LA VIRATION DE DEUX HYPERBOLOÏDES DE RÉVOLUTION.

§ 26.

FORMULES ET NOTATIONS.

A titre d'application, nous allons traiter un cas particulier, celui où les deux axoïdes (Φ), (Φ') sont deux hyperboloïdes de révolution. Cette circonstance se présente lorsqu'il s'agit de transmission uniforme par roues dentées entre deux arbres non situés dans un même plan et en particulier dans l'engrenage hyperboloïdique de Bélanger.

Considérons l'hyperboloïde (Φ), sa ligne de striction n'est autre que son cercle de gorge. L'axe Oy a ici la direction du rayon du cercle de gorge; l'axe (a) de l'hyperboloïde coupe Oy au centre C de la surface (Φ) à la distance b, constante, du point O : de plus, l'axe (a) coupe à angle droit l'axe Oy, en sorte que (a) est dans le plan

$$y = b. \tag{41}$$

Si l'on appelle α l'angle constant que l'axe (a) fait avec la génératrice (d) ou Oz, l'axe (a) est aussi dans le plan

$$x\cos\alpha - z\sin\alpha = 0. \tag{42}$$

Il faut exprimer que tout point de l'axe (a) est fixe dans le trièdre T et aussi dans le corps S; or, d'après les deux équations

qui précèdent, si l'on appelle l la distance d'un point de l'axe (a) au centre, les coordonnées de ce point ont les valeurs constantes :

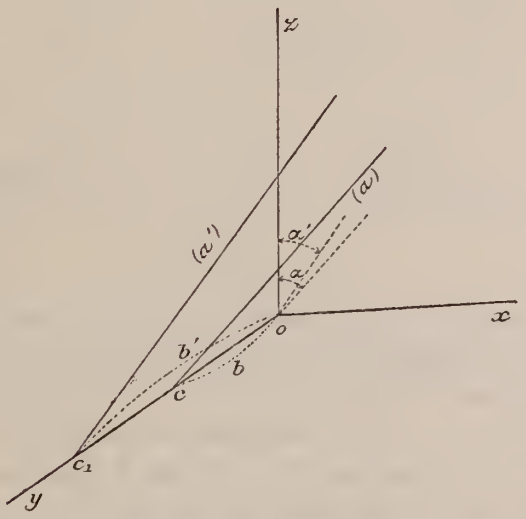
$$x = l \sin \alpha, \qquad y = b, \qquad z = l \cos \alpha.$$

En exprimant que ces quantités vérifient les équations (9), on trouve sans peine :

$$\xi - rb = 0, \qquad r \sin \alpha - p \cos \alpha = 0, \qquad \zeta + pb = 0,$$

d'où l'on tire :

$$\xi = pb \operatorname{cotg} \alpha, \qquad \zeta = -pb, \qquad r = p \operatorname{cotg} \alpha.$$



En désignant de même par l'accent prime les éléments analogues relatifs au corps S′ et à l'hyperboloïde (Φ'), nous aurions :

$$\xi' = p'b' \operatorname{cotg} \alpha', \qquad \zeta' = -p'b', \qquad r' = p' \operatorname{cotg} \alpha'.$$

Mais nous savons qu'il existe les relations :

$$\xi' = \xi, \qquad p' = p,$$

et par suite :

$$b \operatorname{cotg} \alpha = b' \operatorname{cotg} \alpha' = c, \tag{43}$$

en appelant c la valeur commune de ces quantités $b \operatorname{cotg} \alpha$ et $b' \operatorname{cotg} \alpha'$. Il en résulte :

$$b = c \operatorname{tang} \alpha, \qquad b' = c \operatorname{tang} \alpha'. \tag{44}$$

D'après la valeur $k = -\frac{\xi}{p}$ du paramètre de distribution, on voit que :

$$k = -c; \tag{45}$$

en outre :

$$\left\{ \begin{array}{l} r = p \operatorname{cotg} \alpha, \qquad \xi = cp, \qquad \zeta = -cp \operatorname{tg} \alpha, \\ \xi' = \xi, \quad p' = p, \quad r' = p \operatorname{cotg} \alpha', \quad \zeta' = -cp \operatorname{tg} \alpha'. \end{array} \right. \tag{45 bis}$$

Si, par le centre C de l'hyperboloïde (Φ) on mène à (d) ou Oz une parallèle CU de longueur 1, la droite CU décrit autour de l'axe (a) le cône asymptote de l'hyperboloïde (Φ) et le point U décrit un cercle dont le rayon est $\sin \alpha$. Introduisons l'angle φ dont le corps S tourne autour de (a) par rapport au trièdre T [qui, lui, est lié invariablement au bâti, lequel porte les deux axes (a), (a') des deux hyperboloïdes (Φ), (Φ')]. L'arc σ du cercle lieu de U est lié à φ par la relation :

$$d\sigma = d\varphi \sin \alpha, \tag{46}$$

et comme on a [formule (10)] :

$$d\sigma = -p\, dt,$$

il en résulte :

$$p\,dt = -\,d\varphi \sin\alpha = -\,d\sigma, \tag{47}$$

ou

$$p = -\frac{d\varphi}{dt}\sin\alpha, \tag{48}$$

et de même :

$$r = -\frac{d\varphi}{dt}\cos\alpha, \tag{49}$$

formules que l'on peut établir directement. Elles expriment en effet que les rotations p, q, r du trièdre T dans le mouvement $\boxed{\text{T, S}}$ sont les composantes de la rotation $-\frac{d\varphi}{dt}$ autour de l'axe (a) dont $(\sin\alpha,\ 0,\ \cos\alpha)$ sont les cosinus directeurs.

Ajoutons que le calcul de h et de e donne sans peine :

$$h = \frac{\zeta' - \zeta}{r' - r} = c\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha', \tag{50}$$

$$e = \frac{r\zeta' - r'\zeta}{r' - r} = cp\,(\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\alpha'). \tag{51}$$

§ 27.

INTÉGRATION COMPLÈTE DANS CE CAS DES ÉQUATIONS DES COURBES D'ENGRÈNEMENT.

En conséquence, les équations (25) qui définissent les lignes d'engrènement seront :

$$\frac{dx}{dt} = -cp + \mu y, \qquad \frac{dy}{dt} = pz - \mu x,$$
$$\frac{dz}{dt} = -py + cp\,(\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\alpha') - c\mu\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha'.$$

Divisons par $-p$, posons $\frac{\mu}{p} = -\nu$, il viendra :

$$(52)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{d\sigma} = c + \nu y, \qquad \dfrac{dy}{d\sigma} = -z - \nu x, \\ \dfrac{dz}{d\sigma} = y - c(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha') - c\nu \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\alpha'. \end{cases}$$

Dans ces équations linéaires tous les coefficients sont constants, sauf ν; mais ν est arbitraire comme μ.

En combinant les deux premières équations, nous avons :

$$x\frac{dx}{d\sigma} + y\frac{dy}{d\sigma} = cx - zy,$$

$$x\frac{dy}{d\sigma} - y\frac{dx}{d\sigma} = -zx - cy - \nu(x^2 + y^2).$$

Posons :

$$\sqrt{x^2+y^2} = \rho, \qquad \frac{x}{\rho} = \cos\Psi, \qquad \frac{y}{\rho} = \sin\Psi,$$

ce qui revient à substituer à x, y les coordonnées polaires, les équations ci-dessus deviennent :

$$(53)\qquad \frac{d\rho}{d\sigma} = c\cos\Psi - z\sin\Psi,$$

$$(54)\qquad -\nu = \frac{d\Psi}{d\sigma} + \frac{z}{\rho}\cos\Psi + \frac{c}{\rho}\sin\Psi.$$

En portant cette valeur de ν dans la dernière des équations différentielles (52), il vient :

$$(55)\qquad \begin{cases} \dfrac{dz}{d\sigma} = \rho\sin\Psi - c(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha') \\ \qquad\qquad + c\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\alpha'\left(\dfrac{d\Psi}{d\sigma} + \dfrac{z}{\rho}\cos\Psi + \dfrac{c}{\rho}\sin\Psi\right), \end{cases}$$

d'où :

$$(56)\quad \begin{cases} \dfrac{d(z - c\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha'\,\Psi)}{d\sigma} = \rho\sin\Psi - c(\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\alpha') \\ \qquad\qquad + \dfrac{c\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha'}{\rho}(z\cos\Psi + c\sin\Psi). \end{cases}$$

En éliminant σ entre les équations (53) et (56), il viendra :

$$(57)\quad \frac{d(z - c\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha'\cdot\Psi)}{d\rho} = \frac{\rho\sin\Psi - c(\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\alpha') + \dfrac{c\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha'}{\rho}(z\cos\Psi + c\sin\Psi)}{c\cos\Psi - z\sin\Psi}.$$

Si nous remarquons que le long de toute courbe les coordonnées z, ρ, Ψ sont fonctions d'un même paramètre, que l'on peut supposer être la variable ρ, il nous est loisible de poser :

$$(58)\qquad z - c\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha'\,\Psi = \mathrm{F}(\rho),$$

où $\mathrm{F}(\rho)$ représente une fonction arbitraire de ρ, et alors l'équation (57) devient :

$$(59)\quad \begin{cases} \rho\sin\Psi - c(\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\alpha') + \dfrac{c\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha'}{\rho}(z\cos\Psi + c\sin\Psi) \\ \qquad = \mathrm{F}'(\rho)(c\cos\Psi - z\sin\Psi), \end{cases}$$

équation finie qui, jointe à l'équation (58), définit sans intégration toute courbe d'engrènement.

On voit que, dans ce cas, par l'élimination de σ, il nous a été possible de définir sans intégration les courbes d'engrènement. Mais il reste à définir le mouvement du point M sur les courbes d'engrènement qu'il décrit.

Supposons la fonction $\mathrm{F}(\rho)$ choisie, il reste à chercher suivant quelle loi doit se mouvoir un point M (ρ, Ψ, z) sur la courbe (ε)

IMPRIMERIE NATIONALE.

définie par les équations (58), (59), pour qu'il engendre dans les corps S et S′ deux courbes conjuguées (e), (e'). Autrement dit, il faut lier la variable σ aux variables ρ, Ψ, z. L'équation (53) donnera la solution de ce problème. Elle s'écrit en effet :

$$d\sigma = \frac{d\rho}{c\cos\Psi - z\sin\Psi}, \tag{60}$$

et comme $c\cos\Psi - z\sin\Psi$ est une fonction de ρ en vertu des équations (58), (59), on est réduit en dernière analyse à une quadrature.

§ 28.

INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS.

Nous allons donner une première interprétation immédiate de ces résultats. En premier lieu on remarquera que $h = c\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha'$ est le pas dans le mouvement hélicoïdal tangent au mouvement $\boxed{S, S'}$, en sorte que l'équation (58) n'est autre que celle de l'hélicoïde qu'engendrerait la courbe (ε) dans le mouvement hélicoïdal tangent. Se donner $F(\rho)$ revient donc à se donner le profil de cette surface hélicoïde. Alors l'équation (59) exprime une propriété qui suffit à définir la courbe (ε) sur cette surface.

Il est aisé de se rendre compte que l'équation (59) exprime que la normale à l'hélicoïde (58), en tous les points de la courbe (ε), coupe les axes (a) et (a') des deux hyperboloïdes (Φ), (Φ').

Il semble que cela fasse deux conditions, mais, en réalité, cela n'en fait qu'une, car toutes les normales à l'hélicoïde (58) appartiennent au complexe linéaire $\mathcal{L}$ et par suite, comme (a) et (a') sont ici conjuguées dans ce complexe, il en résulte que les normales de l'hélicoïde qui coupent (a) coupent aussi (a').

La démonstration de cette proposition est facile à donner. Si

l'on appelle P, Q les coefficients $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ tirés de l'équation (58), on trouve sans peine :

$$\begin{cases} P = -\frac{hy}{x^2+y^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} F'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) x, \\ Q = +\frac{hx}{x^2+y^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} F'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) y, \end{cases}$$

ou encore :

$$\begin{cases} P = -\frac{h}{\rho} \sin \Psi + F'(\rho) \cos \Psi, \\ Q = \frac{h}{\rho} \cos \Psi + F'(\rho) \sin \Psi. \end{cases}$$

Par l'introduction de ces expressions, les termes de l'équation (59) se condensent et celle-ci devient :

$$y - c(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha') - cP + zQ = 0. \tag{61}$$

Or les équations d'une normale au point x, y, z étant :

$$X - x + P(Z - z) = 0, \qquad Y - y + Q(Z - z) = 0,$$

la condition de rencontre de cette droite avec l'axe (a) dont les équations sont

$$X = Z \operatorname{tang}\alpha, \qquad Y = c \operatorname{tang}\alpha$$

s'obtient en éliminant X, Y, Z entre ces quatre équations.

On trouve précisément l'équation (61).

§ 29.

JUSTIFICATION DIRECTE DE CES RÉSULTATS. NOUVELLE DÉFINITION DES COURBES D'ENGRÈNEMENT.

Au reste, un raisonnement direct permet de justifier ce résultat. Cette justification repose sur une remarque qui est vraie, même dans le cas général, mais qui n'a de réelle utilité que dans le cas particulier qui nous occupe.

Considérons le mobile M déjà considéré à maintes reprises, qui coïncide à chaque instant avec le point de contact des deux courbes conjuguées (e), (e') : les trajectoires de M sont (e) dans le corps S, (e') dans le corps S', (ε) la courbe d'engrènement dans le trièdre T.

Désignons par $\overline{V_e}$, $\overline{V_{e'}}$, $\overline{V_\varepsilon}$ les vitesses de M sur ces trois courbes. Comme $\overline{V_\varepsilon}$ est en somme la vitesse de M dans le trièdre T, ses composantes étant $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, les différences géométriques

$$\overline{V_e} - \overline{V_\varepsilon} = \overline{U_e}, \qquad \overline{V_{e'}} - \overline{V_\varepsilon} = \overline{U_{e'}}$$

sont les vitesses d'entraînement du point M dans les mouvements $\boxed{\text{T, S}}$, $\boxed{\text{T, S'}}$.

Or, lorsque l'on a voulu exprimer le contact des courbes (e) et (e') au n° 17, on a posé, comme on sait :

$$\overline{V_{e'}} = \lambda \overline{V_e},$$

ou encore, puisque $\overline{V_e} = \overline{V_\varepsilon} + \overline{U_e}$, $\overline{V_{e'}} = \overline{V_\varepsilon} + \overline{U_{e'}}$,

$$\overline{V_\varepsilon} + \overline{U_{e'}} = \lambda (\overline{V_\varepsilon} + \overline{U_e}),$$

d'où :

$$\overline{V_\varepsilon} = \frac{\lambda}{1-\lambda}\overline{U_e} + \frac{-1}{1-\lambda}\overline{U_{e'}}.$$

Ainsi la vitesse $\overline{V_\varepsilon}$ du point M sur la courbe d'engrènement est la somme géométrique de deux vecteurs provenant du produit par $\frac{\lambda}{1-\lambda}$ de la vitesse d'entraînement $\overline{U_e}$ et du produit par $\frac{-1}{1-\lambda}$ de la vitesse d'entraînement $\overline{U_{e'}}$.

Or, considérons le complexe linéaire $\mathcal{L}\boxed{T, S}$ constitué par les droites normales aux trajectoires dans le mouvement hélicoïdal tangent au mouvement $\boxed{T, S}$ et le complexe linéaire $\mathcal{L}\boxed{T, S'}$ attaché de même au mouvement $\boxed{T, S'}$. Toutes les normales issues de M à $\overline{U_e}$ appartiennent au premier complexe, toutes les normales issues de M à $\overline{U_{e'}}$ au second et la droite normale à la fois à $\overline{U_e}$ et à $\overline{U_{e'}}$ est la droite de la congruence linéaire commune aux complexes linéaires $\mathcal{L}\boxed{T, S}$ et $\mathcal{L}\boxed{T, S'}$. Mais vu la propriété de $\overline{V_\varepsilon}$ d'être la somme de deux vecteurs provenant du produit des vecteurs $\overline{U_e}$, $\overline{U_{e'}}$ par les nombres $\frac{\lambda}{1-\lambda}$ et $\frac{-1}{1-\lambda}$, le vecteur $\overline{V_\varepsilon}$ est dans un même plan avec $\overline{U_e}$, $\overline{U_e}$ et la vitesse $\overline{V_\varepsilon}$ est ainsi normale à la droite de la congruence linéaire définie plus haut.

En résumé :

Une courbe d'engrènement est définie par la condition d'être, en chacun de ses points, normale à la droite de la congruence linéaire qui est commune aux deux complexes linéaires $\mathcal{L}\boxed{T, S}$, $\mathcal{L}\boxed{T, S'}$.

§ 30.

USAGE SPÉCIAL DE CETTE NOUVELLE DÉFINITION. COURBES DE CIRCONSCRIPTION DE DEUX SURFACES ROTOÏDES.

Dans le cas général, ces deux complexes sont variables d'un instant à l'autre dans le trièdre T et cette propriété ne peut efficacement concourir à la détermination des courbes (ε). Mais, dans le cas particulier qui nous occupe, le complexe $\mathcal{L}\boxed{\mathrm{T,\ S}}$ est l'ensemble des sécantes de la droite (a) et le complexe $\mathcal{L}\boxed{\mathrm{T,S'}}$ est l'ensemble des sécantes de (a'). Par suite :

Dans le cas spécial des hyperboloïdes virants, les courbes d'engrènement (ε) *sont les courbes dont une normale coupe les deux axes* (a) *et* (a') *des hyperboloïdes.*

Considérons un mouvement hélicoïdal résultant d'une rotation élémentaire arbitraire autour de (a) et d'une rotation élémentaire arbitraire autour de (a'). Soit $\mathfrak{M}$ ce mouvement hélicoïdal et H l'hélicoïde engendré par la courbe (ε) au cours de ce mouvement $\mathfrak{M}$; les normales à H appartiennent toutes au complexe linéaire $\mathcal{L}\mathfrak{M}$ des droites qui sont normales au cours du mouvement $\mathfrak{M}$. Celles de ces droites qui coupent (a) coupent aussi (a'), car (a) et (a') sont conjuguées dans le complexe $\mathcal{L}\mathfrak{M}$. En conséquence, les normales à l'hélicoïde H en tous les points de (ε) doivent couper les droites (a) et (a').

Car si la normale à la surface ne coïncidait pas avec la droite de la congruence qui est normale à la courbe (ε), il y aurait, dans le plan normal à cette courbe, deux droites du complexe $\mathcal{L}\mathfrak{M}$. Ce plan normal serait le plan polaire du point de la courbe. Celle-ci étant alors tangente en tout point à la vitesse d'entraînement de

ce point dans le mouvement $\mathfrak{M}$ serait une des hélices qui glissent sur elles-mêmes au cours de ce mouvement. On peut toujours choisir le mouvement $\mathfrak{M}$ de façon qu'il n'en soit pas ainsi, même si la courbe (ε) est une hélice.

Comme le mouvement hélicoïdal tangent au mouvement $\boxed{S, S'}$ est l'un des mouvements $\mathfrak{M}$, on voit que le résultat précédent comprend, comme cas particulier, celui qui concerne l'hélicoïde (58).

Mais on peut déduire de là une propriété simple et intéressante des courbes (ε). Considérons en effet deux systèmes différents de rotations élémentaires autour de (a), (a') et les deux mouvements hélicoïdaux $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$ correspondants différents. Considérons les hélicoïdes H, H′ décrits par (ε) dans ces deux mouvements. En chaque point de (ε) ces surfaces ont pour normale la sécante des droites (a), (a') qui passe par ce point. Elles ont même normale et *se raccordent*, par conséquent, *tout le long de la courbe* (ε).

Or il y a, entre autres, deux mouvements hélicoïdaux singuliers remarquables, l'un qui se réduit à une rotation autour de (a), l'autre à une rotation autour de (a'). Les hélicoïdes H, H′ se réduisent ici aux deux surfaces de révolution engendrées par la rotation de la courbe (ε) autour des droites (a), (a') respectivement.

En conséquence :

Les deux surfaces de révolution engendrées par la rotation d'une courbe d'engrènement autour des axes (a), (a') *sont circonscrites l'une à l'autre le long de cette courbe.*

Ceci permettrait de construire par points une courbe (ε). Il suffirait de se donner une surface de révolution arbitraire autour de l'axe (a) et de chercher les pieds des normales à cette surface qui coupent la droite (a'). A cet effet, on mènera un plan méridien qui coupera (a') en un point Q; de Q on abaissera une nor-

male QM sur la courbe méridienne, le pied M de cette normale sera un point de la courbe (ε); en faisant tourner le plan méridien autour de (a), on aura une génération par points de la courbe (ε).

Une fois la courbe (ε) définie, la quadrature (60) permettra de relier le paramètre σ du mouvement au paramètre ρ de la courbe (ε).

§ 31.

EXEMPLES PARTICULIERS.

Par exemple, en prenant pour la surface H une sphère ayant son centre K sur l'axe (a), la courbe (ε) n'est autre que le cercle de centre K situé dans le plan mené par (a') et le point K et qui résulte de l'intersection de la sphère proposée par ce plan. Dans ce cas H′ est le tore d'axe (a') circonscrit à la sphère suivant ce cercle.

Ainsi, l'on voit par là que : *tout cercle qui a son centre sur* (a) [*ou* (a')] *et dont le plan passe par* (a') [*ou* (a)] *est une courbe d'engrènement.*

Il est du reste aisé de se rendre compte que, dans ce cas, l'équation (60), qui établit la loi du mouvement du point M sur la courbe (ε), s'intègre complètement, la quadrature portant sur des fonctions rationnelles.

Les coordonnées du point K pris sur l'axe (a) seront, en effet, u étant un paramètre constant :

$$x = u \operatorname{tang} \alpha, \qquad y = r \operatorname{tang} \alpha, \qquad z = u.$$

Le plan mené par (a') et par le point K aura pour équation :

$$\frac{x - z \operatorname{tang} \alpha'}{u} = \frac{y - c \operatorname{tang} \alpha'}{c}$$

ou

$$z-u=\frac{1}{c\tang\alpha'}(cx-uy). \tag{63}$$

D'autre part la sphère de centre K, qui contient le cercle (ε), aura pour équation :

$$x^2+y^2-2u\tang\alpha\,.\,x-2c\tang\alpha\,.\,y+(z-u)^2=\mathrm{D}, \tag{64}$$

où D désigne un paramètre arbitraire.

Posons alors pour abréger :

$$\begin{cases} cx-uy=m, \\ ux+cy=n; \end{cases} \tag{65}$$

on a d'abord :

$$\rho^2=x^2+y^2=\frac{m^2+n^2}{u^2+c^2}, \tag{66}$$

et ensuite, en transformant (63) et (64) :

$$z-u=\frac{m}{c\tang\alpha'}, \tag{67}$$

$$\frac{m^2+n^2}{u^2+c^2}-2n\,.\tang\alpha+\frac{m^2}{c^2\tang^2\alpha'}=\mathrm{D}. \tag{68}$$

On a, d'autre part, équation (60) :

$$d\sigma=\frac{d\rho}{c\cos\Psi-z\sin\Psi}=\frac{\rho\,d\rho}{cx-zy};$$

IMPRIMERIE NATIONALE.

or, d'après (66) et (65), (67) :

$$\rho d\rho = \frac{m dm + n dn}{u^2 + c^2},$$

$$cr - zy = cx - y\left(u + \frac{m}{c \operatorname{tang} \alpha'}\right) = m - \frac{my}{c \operatorname{tang} \alpha'} = -\frac{m(y - c \operatorname{tang} \alpha')}{c \operatorname{tang} \alpha'},$$

et, comme d'après les équations (65) on a :

$$y = \frac{cn - um}{c^2 + u^2},$$

il vient, en définitive :

$$cx - zy = \frac{m[c \operatorname{tang} \alpha' (u^2 + c^2) + um - cn]}{c(c^2 + u^2) \operatorname{tang} \alpha'},$$

en sorte que, finalement :

$$d\sigma = \frac{c \operatorname{tang} \alpha' (m dm + n dn)}{m[um - cn + c(c^2 + u^2) \operatorname{tang} \alpha']}, \tag{69}$$

m et n étant des variables liées par l'équation du second degré (68) :

$$\frac{m^2 + n^2}{u^2 + c^2} - 2n \operatorname{tang} \alpha + \frac{m^2}{c^2 \operatorname{tang}^2 \alpha'} = D. \tag{70}$$

La quadrature (69) se ramène donc aux fonctions rationnelles.

§ 32.

REPRÉSENTATION DES COURBES (e), (e').

Nous terminerons ce sujet par une remarque générale.
Une fois obtenu le mouvement d'un point M par rapport au

trièdre T sur une courbe d'engrènement, la connaissance supposée des mouvements $\boxed{T, S}$ $\boxed{T, S'}$ permettra, par voie de composition des mouvements, d'en conclure les mouvements par rapport aux corps S et S′ et par suite de réaliser la représentation des courbes (e), (e').

CHAPITRE V.

AXES DE COURBURE. — POINTS ASSOCIÉS.

§ 33.

LE PROBLÈME DES COURBURES. RECHERCHE DES AXES DE COURBURE.

Une des questions les plus étudiées, la plus classique, c'est celle de la distribution des courburesentre profils conjugués, dans les mouvements plans ou sphériques. Il n'est pasb esoin de rappeler ici la formule d'Euler et Savary, la construction de Bobillier. Ces résultats se retrouvent, en leurs traits essentiels, dans le cas général. Les considérations plus générales où nous allons entrer offrent en outre l'avantage de présenter sous leur vraie forme et en leur vraie place les résultats particuliers déjà connus.

Nous montrerons, par exemple, que, faute d'être écrite dans une forme convenable, la formule d'Euler perd souvent son caractère véritable, qui est celui d'une homographie à points doubles confondus.

Notre méthode consistera d'abord à rechercher les axes de courbure, c'est-à-dire les droites caractéristiques du plan normal à chacune des courbes (e), (e'). Pour cela, nous conserverons l'usage de ce point mobile M qui décrit à la fois dans le corps S la courbe (e) et dans le corps S′ la courbe (e') en coïncidant constamment avec leur point de contact actuel. Si l'on appelle P le point de la courbe (e) avec lequel M coïncide à une époque déterminée, la tangente commune aux courbes (e), (e') n'est autre que la droite qui porte la vitesse d'entraînement du point P dans le mouvement $\boxed{S, S'}$. Le plan normal commun Π_P est le plan polaire du

point P dans le complexe $\mathcal{L}$, ainsi qu'on l'a du reste déjà vu. Au n° 14, équation (17), nous avons déjà donné l'équation de ce plan qui est la suivante :

$$-y\mathrm{X}+x\mathrm{Y}+h(\mathrm{Z}-z)=0. \tag{72}$$

Dans ces équations, (x, y, z) sont les coordonnées du point (M) qui décrit la courbe d'engrènement (ε) par rapport au trièdre T et ces coordonnées vérifient de la sorte le système d'équation (25). L'axe de courbure δ de la courbe (e) sera la caractéristique de ce plan normal Π_p dans son mouvement par rapport au corps S.

Ce n'est pas la première fois que nous cherchons la caractéristique d'un plan dans le corps S. Nous avons même déjà, au n° 14, cherché la caractéristique du plan Π_p, mais en supposant le point M fixé en P dans le corps S : c'est quand nous avons voulu définir la normale stationnaire. L'hypothèse en ce qui concerne le point M est toute différente ici puisque nous venons de dire que M doit actuellement décrire la courbe (e) dans le corps S.

A ce même numéro (14) nous avons du reste traité d'avance la recherche de la caractéristique d'un plan

$$u\mathrm{X}+v\mathrm{Y}+w\mathrm{Z}+s=0,$$

où u, v, w, s sont des fonctions du temps, et nous avons vu que sa caractéristique s'obtient en coupant le plan proposé par un second plan qui a pour équation [formule (19)]

$$\left(rv-\frac{du}{dt}\right)\mathrm{X}+\left(pw-ru-\frac{dv}{dt}\right)\mathrm{Y}-\left(pv+\frac{dw}{dt}\right)\mathrm{Z}+u\xi+w\zeta-\frac{ds}{dt}=0.$$

Appliquons ceci au plan (72) pour lequel on a

$$u=-y, \qquad v=x, \qquad w=h, \qquad s=-hz,$$

il viendra :

$$\left(rx+\frac{dy}{dt}\right)X+\left(ph+ry-\frac{dx}{dt}\right)Y-\left(px+\frac{dh}{dt}\right)Z$$
$$-\xi y+\zeta h+h\frac{dz}{dt}+\frac{dh}{dt}z=0.$$

Exprimons alors que x, y, z vérifient les équations (25) :

$$\frac{dx}{dt}=-\xi+\mu y,\qquad \frac{dy}{dt}=pz-\mu r,\qquad \frac{dz}{dt}=-py+e-h\mu;$$

par la substitution de ces expressions de $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ l'équation précédente deviendra :

$$[(r-\mu)x+pz]X+[ph+\xi+(r-\mu)y]Y-\left(px+\frac{dh}{dt}\right)Z$$
$$-\xi y+\zeta h+\frac{dh}{dt}z+h(-py+e-h\mu)=0.$$

Divisons cette équation par p et rappelons qu'au n° 14 nous avons posé, outre $\xi=-pk$,

$$h_1=-\frac{dh}{pdt}=\frac{dh}{d\sigma},$$

l'équation précédente deviendra définitivement :

$$(73)\qquad \begin{cases} z(X-x)+(h-k)(Y-y)-(x-h_1)(Z-z) \\ \qquad +\rho(xX+yY+h^2)=0, \end{cases}$$

en ayant posé

$$(74)\qquad \rho=\frac{r-\mu}{p}.$$

Ainsi, le plan (73) coupe le plan normal (72) suivant l'axe de courbure δ de la courbe (e).

Il est clair que la même méthode employée pour le corps S′ nous eût donné l'axe de courbure δ' de la courbe (e'). Alors, au lieu de l'équation (73), nous aurions eu la suivante

$$(75)\qquad \begin{cases} z(X-x)+(h-k)(Y-y)-(x-h_1)(Z-z) \\ \qquad +\rho'(xX+yY+h^2)=0, \end{cases}$$

après avoir posé :

$$(76)\qquad \rho'=\frac{r'-\mu}{p}.$$

§ 34.

INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS. — POINT ASSOCIÉ.

Interprétons géométriquement ces résultats.

Nous voyons en premier lieu que les plans (73), (75) font partie d'un même faisceau et qu'ils passent tous par la droite d'intersection des plans

$$(77)\qquad zX-xZ+(h-k)(Y-y)+h_1(Z-z)=0,$$

$$(78)\qquad xX+yY+h^2=0.$$

Cette droite coupe le plan normal Π_P en un point P_1 et il est clair que *les droites* δ, δ' *appartiennent au faisceau plan* (P_1, Π_P), *c'est-à-dire à l'ensemble des droites qui sont issues du point* P_1 *dans le plan* Π_P.

A ce point P_1 qui s'offre ainsi à nous, nous donnerons le nom de point *associé* au point P.

La correspondance entre les points P, P_1 offre des circonstances particulières que nous aurons à rechercher.

Observons d'abord que si nous prenons pour la courbe (e) un simple point P, solidaire du corps S, la caractéristique δ devra se confondre avec la normale stationnaire d_P^{nn} déjà définie au n° 14, en sorte que le point P_1 doit être déjà sur cette droite d_P^{nn}.

C'est ce que l'on peut vérifier autrement. Nous avons vu en effet au n° 19 que regarder M comme solidaire du corps S revient à faire $\mu = r$ dans les formules (25). Or le plan (73), ρ étant nul, se réduit alors au plan (77) qui coïncide avec le plan auxiliaire (21) du n° 14.

Pour achever de déterminer le point P_1 il faut interpréter aussi la signification de la droite d_P qui est l'intersection du plan normal avec le plan (78).

On vérifie sans peine que cette droite d_P n'est autre que la conjuguée de la droite t_P (normale en P au plan Π_P) par rapport au complexe $\mathcal{L}$. En effet le plan (78) est le plan polaire dans le complexe $\mathcal{L}$ du point I à l'infini sur la droite t_P. La trace de ce plan sur le plan Π_P est donc la conjuguée de la droite PI ou t_P qui joint les pôles des deux plans, conformément à une des propriétés fondamentales des droites conjuguées dans un complexe linéaire.

Cette droite d_P serait la caractéristique du plan Π_P si on le considérait comme invariablement lié au corps S : c'est elle que nous avons déjà appelée *la caractéristique d'entraînement* du plan Π_P.

En résumé : *Le point* P_1 *associé du point* P *est à l'intersection de la normale stationnaire* d_P^{nn} *issue de* P *avec la conjuguée* d_P *dans le complexe* $\mathcal{L}$ *de la droite* t_P *normale en* P *au plan* Π_P.

§ 35.

CARACTÈRE RÉCIPROQUE DE LA CORRESPONDANCE ENTRE UN POINT ET SON ASSOCIÉ. — PLANS POLAIRES DE DEUX POINTS ASSOCIÉS. — INTERVENTION DU CYLINDRE POLAIRE RÉCIPROQUE DU CERCLE DE L'INFINI.

Si l'on rapproche les équations des trois plans qui par leur intersection donnent le point P_1, savoir :

$$-yX+xY+h(Z-z)=0,$$
$$zX-xZ+(h-k)(Y-y)+h_1(Z-z)=0,$$
$$xX+yY+h^2=0,$$

on constate que les premiers membres de ces équations ne changent pas ou changent seulement de signes, quand on y échange les points P et P_1. Ces points P et P_1 y figurent symétriquement. Par là on peut conclure que *la correspondance entre un point et son associé est réciproque.*

On peut du reste s'en rendre compte directement et par la même occasion mettre en évidence une propriété nouvelle des points P, P_1.

Cherchons l'associé du point P_1.

Cet associé doit être sur la normale stationnaire issue de P_1, donc déjà sur d_P^{nn}, car une seule normale stationnaire passe par le point P_1. L'associé de P_1 doit se trouver au point où d_P^{nn} est coupée par la droite d_{P_1}, conjuguée dans le complexe $\mathcal{L}$ de la droite t_{P_1} qui porte la vitesse d'entraînement de P_1. Si je parviens à montrer que d_{P_1} passe au point P le théorème sera démontré. Or il suffit pour cela que je prouve que la droite t_{P_1} est dans le plan Π_P, polaire du point P. Mais ceci est évident car P_1 est sur d_P, caractéristique

IMPRIMERIE NATIONALE.

d'entraînement du plan Π_P, et tous les points de d_P ont leur vitesse d'entraînement dans le plan Π_P, donc t_{P_1} est bien dans le plan Π_P.

Maintenant on peut ajouter quelque chose de plus. Appelons Π_{P_1} le plan polaire de P_1 dans le complexe $\mathcal{L}$; ce plan est normal en P_1 à la droite t_{P_1}, ci-dessus considérée. Or on vient de voir que t_{P_1} est dans le plan Π_P, il en résulte que le plan Π_{P_1} est rectangulaire avec le plan Π_P.

Comme d_P^{nn} appartient au complexe $\mathcal{L}$ et qu'elle est la droite de jonction des points P, P_1 elle est aussi l'intersection des plans polaires Π_P, Π_{P_1} de ces points dans le complexe $\mathcal{L}$, donc :

Deux points associés P, P_1 *ont comme plans polaires dans le complexe* $\mathcal{L}$ *deux plans rectangulaires qui se coupent suivant la normale stationnaire* d_P^{nn} *qui est la droite* PP_1.

En conséquence pour obtenir les couples de points associés sur une même normale stationnaire d_P^{nn} donnée, il suffira de faire tourner autour de cette droite deux plans rectangulaires : les pôles de ces plans fourniront les couples de points associés *sur la normale stationnaire.*

Mais dire que deux plans sont rectangulaires, c'est dire qu'ils sont conjugués par rapport au cercle de l'infini. Dès lors les pôles de ces plans sont conjugués par rapport au cylindre de révolution

$$x^2 + y^2 + h^2 = 0,$$

qui est le polaire réciproque du cercle de l'infini par rapport au complexe $\mathcal{L}$. Donc :

Deux points associés sont conjugués par rapport au cylindre polaire réciproque du cercle de l'infini par rapport au complexe $\mathcal{L}$.

C'est précisément ce qu'exprime l'équation (78).

§ 36.

CORRESPONDANCE BIRATIONNELLE, RÉCIPROQUE ET CUBIQUE. EXPRESSION ANALYTIQUE DE LA CORRESPONDANCE.

Il résulte de ce qui précède que la correspondance entre les points P, P_1 associés constitue une transformation birationnelle et réciproque, comme l'est l'inversion. Il est ainsi aisé de se rendre compte que la transformation actuelle est, non pas quadratique, mais *cubique*.

Écrivons les trois équations qui définissent le point P_1, savoir les équations (72), (77) et (78), en appelant maintenant x_1, y_1, z_1 les coordonnées de P_1, ces équations s'écrivent

$$(79)\quad \begin{cases} -y(x_1-x)+x(y_1-y)+h(z_1-z)=0, \\ z(x_1-x)+(h-k)(y_1-y)+(h_1-x)(z_1-z)=0, \\ x(x_1-x)+y(y_1-y)+(x^2+y^2+h^2)=0. \end{cases}$$

Reprenons les notations du n° 16

$$(80)\quad \begin{cases} A=x^2-h_1x+h(h-k), \\ B=y(x-h_1)-hz, \\ C=zx+(h-k)y. \end{cases}$$

Ces quantités donnent lieu aux identités

$$(81)\quad \begin{cases} -yA+xB+hC=0, \\ zA+(h-k)B+(h_1-x)C=0. \end{cases}$$

Or des équations (79) on tire d'abord :

$$\frac{x_1-x}{A}=\frac{y_1-y}{B}=\frac{z_1-z}{C}. \tag{82}$$

Posons en outre

$$\begin{cases} H=x^2+y^2+h^2, \\ \Phi=xA+yB=h\Xi-(h_1-x)H, \\ \Xi=-yz-kx+hh_1. \end{cases} \tag{83}$$

On trouve

$$\frac{x_1-x}{A}=\frac{y_1-y}{B}=\frac{z_1-z}{C}=-\frac{H}{\Phi}, \tag{84}$$

ou

$$x_1=\frac{x\Phi-AH}{\Phi}, \qquad y_1=\frac{y\Phi-AH}{\Phi}, \qquad z_1=\frac{z\Phi-CH}{\Phi}. \tag{85}$$

Ces formules pourraient faire croire que les numérateurs de ces fractions sont du quatrième degré en x, y, z. Mais en réalité, on a les identités suivantes :

$$\begin{cases} x\Phi-AH=hx\Xi-[x(h_1-x)+A]H, \\ y\Phi-BH=hy\Xi-[y(h_1-x)+B]H, \\ z\Phi-CH=hz\Xi-[z(h-x)+C]H. \end{cases} \tag{86}$$

On a de plus

$$\begin{cases} x(h_1-x)+A=h(h-k), \\ y(h_1-x)+B=-hz, \\ z(h_1-x)+C=(h-k)y+h_1z. \end{cases} \tag{87}$$

Il en résulte que les formules (85) peuvent s'écrire encore :

$$(88)\qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{xh\Xi - h(h-k)\,\mathrm{H}}{h\Xi - (h_1 - x)\,\mathrm{H}}, \\ y_1 = \dfrac{yh\Xi + hz\mathrm{H}}{h\Xi - (h_1 - x)\,\mathrm{H}}, \\ z_1 = \dfrac{zh\Xi - [(h-k)\,y + h_1 z]\,\mathrm{H}}{h\Xi - (h_1 - x)\,\mathrm{H}}. \end{cases}$$

Dans ces formules, les numérateurs et dénominateurs sont du troisième degré en x, y, z. La transformation est donc bien *cubique*.

§ 37.

POINTS QUI COÏNCIDENT AVEC LEUR ASSOCIÉ.

La discussion des singularités de la correspondance se fait aisément, soit au moyen des formules précédentes, soit directement.

En premier lieu, puisque les points P, P_1 sont conjugués par rapport au cylindre H, réciproque du cercle de l'infini par rapport au complexe $\mathcal{L}$, on voit que :

Le cylindre H *est le lieu des points qui coïncident avec leurs associés.*

Ce résultat apparaît sur les formules (84). Seulement ces formules sembleraient indiquer que cela a lieu aussi pour le cas où A, B, C s'annuleraient en même temps. Mais alors, en vertu d'une identité (83), Φ est nul aussi, en sorte que, dans ce cas, le point P_1 est, en réalité, indéterminé.

§ 38.

POINTS DONT L'ASSOCIÉ EST INDÉTERMINÉ. — PREMIER CAS D'INDÉTERMINATION. — SECOND CAS D'INDÉTERMINATION. — LA COURBE (c^4). — LES DIRECTRICES DE LA CONGRUENCE DES NORMALES STATIONNAIRES SONT DES CORDES DE (c^4).

Ceci nous amène naturellement à examiner les cas d'indétermination.

Comme nous venons de le dire, il y a indétermination si A, B, C sont nuls simultanément. Or d'après le n° 16, cela aura lieu si le point P est pris sur l'une des deux directrices de la congruence des normales stationnaires.

Dans ce cas la droite d_P^{nn} qui passe au point P est indéterminée et il ne faut pas s'étonner que le point P_1 qui doit se trouver sur d_P^{nn} soit lui-même indéterminé. Le point P a alors une infinité d'associés qui sont sur la droite d_P conjuguée de la droite t_P normale en P au point polaire Π_P du point P.

Mais ce cas d'indétermination n'est pas le seul. Le point P n'étant plus pris sur l'une des directrices de la congruence des normales stationnaires, la normale stationnaire d_P^{nn} est parfaitement déterminée.

Il n'y aura d'indétermination possible que si la droite d_P se confond avec la droite d_P^{nn}.

D'après cette coïncidence, d_P appartient au complexe et coïncide dès lors avec sa conjuguée t_P; le plan Π_P, polaire du point P, doit donc contenir t_P qui lui est perpendiculaire. Il est donc *isotrope*, c'est-à-dire tangent au cercle de l'infini et, par conséquent, son pôle P doit appartenir au cylindre H déjà considéré.

D'un autre côté, le plan polaire de P dans le complexe linéaire auxiliaire $\mathcal{L}_1$ qui contient d_P^{nn} doit contenir d_P puisque d_P coïncide avec d_P^{nn}, et par suite doit contenir t_P, puisque d_P coïncide aussi avec t_P. Dès lors, puisque ce plan polaire contient t_P normale à Π_P,

il est normal au plan Π_P, le point P a donc ses deux plans polaires par rapport aux complexes $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1$ rectangulaires.

Or si l'on cherche le lieu des points P dont les plans polaires dans les complexes $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1$ sont rectangulaires, on trouve le paraboloïde

$$\Xi = -yz - kx + hh_1 = 0.$$

En résumé, outre les deux directrices de la congruence des normales stationnaires, on trouve que le lieu des points P dont l'associé est indéterminé est la courbe (c^4) du quatrième degré commune au cylindre H et au paraboloïde Ξ.

Du reste, c'est ce que montrent bien les équations (88) qui donnent pour lieu du point d'indétermination, en dehors de l'hypothèse $A = B = C = 0$, l'hypothèse $H = 0$, $\Phi = 0$.

On peut se rendre compte que la courbe du quatrième ordre (c^4) que nous venons de rencontrer admet comme cordes les directrices de la congruence des normales stationnaires.

On a en effet l'identité :

$$\Phi = xA + yB = h\Xi - (h_1 - x)H.$$

Si donc on cherche les points de rencontre de l'une des droites directrices $(A = 0, B = 0)$ avec le cylindre $H = 0$, on trouve $\Xi = 0$.

§ 39.

LIEU DES ASSOCIÉS DES POINTS D'UN PLAN. — SURFACE CUBIQUE Σ^3_Ω. — GÉNÉRATION DE LA SURFACE PAR DEUX FAISCEAUX HOMOGRAPHIQUES DE PLANS ET DE QUADRIQUES. — BASES DES DEUX FAISCEAUX. — DÉFINITION DE QUATRE COUPLES D'ÉLÉMENTS HOMOLOGUES PARTICULIERS.

Considérons un plan quelconque

$$\Omega = uX + vY + wZ + s = 0.$$

Cherchons la surface cubique qui est le lieu des associés des points du plan Ω. Posons pour abréger

$$\Omega_1 = h(h-k)u - hvz + [(h-k)y + h_1 z]w + (h-x)s.$$

Le plan $\Omega_1 = 0$ *est le plan qui a dans le complexe* $\mathcal{L}_1$ *le même pôle que le plan* $\Omega = 0$ *dans le complexe* $\mathcal{L}$.

Ceci étant, si l'on a égard aux équations (88) qui définissent x_1, y_1, z_1 en x, y, z, et si l'on exprime que le point P_1 est dans le plan Ω, à savoir :

$$ux_1 + vy_1 + wz_1 + s = 0,$$

on aura pour la surface cubique Σ^3_Ω transformée du plan Ω l'équation :

$$u[hx\Xi - h(h-k)H] + v[hy\Xi + hzH] + w[hz\Xi - (h-ky+h_1 z)H] + s[h\Xi - (h_1 - x)H] = 0,$$

c'est-à-dire, avec les notations adoptées :

$$h\Omega\Xi - \Omega_1 H = 0. \tag{89}$$

On peut donner une génération par faisceaux homographiques de cette surface cubique.

Son équation résulte en effet de l'élimination de λ entre les deux équations

$$\Omega_1 - \lambda\Omega = 0, \qquad h\Xi - \lambda H = 0. \tag{90}$$

Elle est le lieu des coniques d'intersection d'un faisceau de quadriques et d'un faisceau homographique de plans.

La base du faisceau de plans est la droite d'intersection du plan Ω et du plan Ω_1, c'est donc la droite d^{nn}_{Ω}, normale stationnaire contenue dans le plan Ω.

D'un autre côté, la biquadratique qui sert de base au faisceau de quadriques est la courbe (c^4) commune au cylindre H et au paraboloïde Ξ, courbe déjà considérée.

Pour définir la correspondance il suffirait de se donner trois couples correspondants. En réalité, nous pouvons en donner quatre.

D'abord en faisant $\lambda = \infty$, on reconnaît que le plan Ω et le cylindre H se correspondent. De même en faisant $\lambda = 0$, on voit que le plan Ω_1 et le paraboloïde Ξ se correspondent.

Maintenant reportons-nous aux directrices de la congruence des normales stationnaires. On a pour ces droites

$$A = 0, \qquad B = 0, \qquad C = 0.$$

Or $A = 0$, c'est

$$x^2 - h_1 x + h(h - k) = 0.$$

Soient λ_0, λ'_0 les racines de cette équation. Il y a une directrice l_0 dans le plan $x = \lambda_0$ et une directrice l'_0 dans le plan $x = \lambda'_0$; nous pouvons remarquer de plus que

$$\lambda'_0 = h_1 - \lambda_0.$$

Considérons à présent la quadrique

$$h\Xi - \lambda'_0 H = 0.$$

Si l'on se reporte à l'identité (83)

$$\Phi = xA + yB = h\Xi - (h_1 - x)H,$$

IMPRIMERIE NATIONALE.

puisque le long de la droite l_0 on a $A=0$, $B=0$ (voir n° 16), on a aussi, x étant égal à λ_0 le long de l_0,

$$h\Xi-(h_1-\lambda_0)H=0,$$

c'est-à-dire,

$$h\Xi-\lambda_0'H=0.$$

Donc la quadrique $h\Xi-\lambda_0'H=0$ contient l_0.

Considérons alors le plan

$$\Omega_1-\lambda_0'\Omega=0,$$

qui correspond dans le faisceau à cette quadrique. L'équation développée de ce plan s'écrit

$$h(h-k)u-hvz+[(h-k)y+h_1z]w$$
$$+(h_1-x)s-\lambda_0'(ux+vy+wz+s)=0.$$

Ce plan contient la directrice l_0 qui a pour équations

$$x=\lambda_0=h_1-\lambda_0',$$
$$\lambda_0'y+hz=0,$$

ou

$$(h-k)y+\lambda_0z=0.$$

On vérifie cela aisément.

On voit donc qu'il y a une quadrique du faisceau qui contient l_0 et qu'il lui correspond le plan du faisceau qui contient cette droite.

Il en est évidemment de même pour la droite l_0'.

En résumé :

La surface associée d'un plan Ω *est une surface cubique* Σ^3_Ω *lieu des coniques d'intersection des plans d'un faisceau et des quadriques correspondantes d'un faisceau qui correspondent homographiquement aux plans du faisceau.*

Les bases de ces deux faisceaux sont : pour les plans, la normale stationnaire d^{nn}_Ω *contenue dans le plan* Ω*; pour les quadriques, la biquadratique* (c^4) *commune au cylindre* H *et au paraboloïde* Ξ.

Forment un couple d'éléments correspondants :

1° Le plan Ω *lui-même et le cylindre* H;

2° Le plan Ω_1 *qui a dans le complexe* $\mathcal{L}_1$ *même pôle que le plan* Ω *dans le complexe* $\mathcal{L}$ *et le paraboloïde* Ξ;

3° La quadrique du faisceau qui contient la directrice l_0 *de la congruence des normales stationnaires et le plan du faisceau qui contient la même droite;*

4° Même chose avec la seconde directrice l'_0 *de la congruence des normales stationnaires.*

Comme conséquence nous voyons que la surface Σ^3_Ω contient outre la biquadratique (c^4) les deux directrices l_0, l'_0, ainsi que la droite d^{nn}_Ω, la trace du cylindre H sur le plan Ω et la trace du paraboloïde Ξ sur le plan Ω_1.

§ 40.

DÉCOMPOSITION DE Σ^3_Ω.

Pour certains plans spéciaux la surface Σ^3_Ω se décompose.

Supposons par exemple que le plan Ω passe par la directrice l_0. Son pôle P est au point où il coupe l'_0 : le plan Ω_1, polaire de P dans $\mathcal{L}_1$, sera le plan mené par P et par l_0; ce sera donc le plan Ω lui-même. Ainsi dans ce cas le plan Ω_1 coïncide avec le plan Ω.

Un calcul aisé nous donnera un résultat plus complet.

Prenons l'équation du plan Ω sous la forme

$$\Omega = -x + vy + wz + s = 0.$$

S'il contient la droite l_0 on a :

$$s = \lambda_0, \qquad \frac{v}{\lambda'_0} = \frac{w}{h},$$

et si l'on calcule alors Ω_1, on trouve exactement :

$$\Omega_1 = -h(h-k) - hvz + [(h-k)y + h_1 z]w + (h_1 - x)\lambda_0,$$

et en tenant compte des relations précédentes :

$$\Omega_1 = \lambda_0 \Omega;$$

dès lors l'équation de la surface cubique Σ^3_Ω devient

$$\Omega[h\Xi - \lambda_0 H] = 0.$$

Elle se décompose dans le plan Ω lui-même et la surface quadrique fixe qui contient, outre la courbe (c^4), la directrice l'_0.

Du reste il est bien évident encore que puisque P et son associé P_1 sont sur la droite d^{nn}_P, laquelle coupe l_0 et l'_0, le plan Ω mené par P et par l_0 contient le point P_1, en sorte que si P se meut dans un tel plan, P_1 s'y meut aussi. Donc :

Tout plan Ω mené par une des deux directrices l_0, l'_0 est à lui-même son propre associé, c'est-à-dire est le lieu des associés de ses propres points.

Il est naturel de chercher à se rendre compte à quoi correspond la quadrique parasite

$$h\Xi - \lambda_0 H = 0,$$

qui passe par la courbe (c^1) et par la droite l'_0.

Des équations (85) on tire aisément

$$x_1 - \lambda_0 = (x - \lambda_0)\frac{h\Xi - \lambda_0 H}{h\Xi - (h_1 - x)H},$$

$$\lambda_0 z_1 + (h-k)y_1 = [\lambda_0 z + (h-k)y]\frac{h\Xi - \lambda_0 H}{h\Xi - (h_1 - x)H}.$$

Si le point P est sur la surface $h\Xi - \lambda_0 H = 0$, on a

$$x_1 - \lambda_0 = 0, \qquad \lambda_0 z_1 + (h-k)y_1 = 0,$$

c'est-à-dire que son associé P_1 est sur la droite l_0.

Dans ce cas, où l'un des points P, P_1 est sur la droite l_0, l'associé est indéterminé et a pour lieu une droite qui, lorsque le point P_1 décrit l_0, engendre la quadrique considérée.

§ 41.

CUBIQUE GAUCHE.

Pour terminer l'étude de cette correspondance, nous dirons un mot de la cubique gauche associée à une droite, c'est-à-dire qui est le lieu des associés des points d'une droite.

La forme cubique des expressions x_1, y_1, z_1 en x, y, z montre que si le point P (x, y, z) décrit une droite, auquel cas : x, y, z sont des fonctions linéaires entières d'un paramètre ρ, les coor-

données x_1, y_1, z_1 du point P_1 sont des fonctions rationnelles du troisième degré en ρ. Le lieu de P_1 est une courbe cubique.

On peut s'en rendre compte autrement; grâce à la symétrie de la correspondance on peut supposer que la droite est décrite soit par le point P, soit par le point P_1.

Si P_1 décrit un plan Ω, le point P décrit la surface Σ^3_Ω

$$h\Omega\Xi - \Omega_1 H = 0.$$

Cette surface cubique contient la courbe (c^4) et les droites l_0, l'_0.

Si P_1 décrit la droite commune à deux plans $\Omega = 0$, $\Omega' = 0$, le point P décrit la courbe commune aux deux surfaces cubiques

$$h\Omega\Xi - \Omega_1 H = 0, \qquad h\Omega'\Xi - \Omega'_1 H = 0.$$

La courbe du neuvième ordre commune à ces deux surfaces comprend une partie fixe constituée par (c^4), l_0 et l'_0 et une courbe du degré $9 - 4 - 1 - 1 = 3$ qui, elle, est variable avec les plans Ω et Ω'.

Si la droite considérée coupe la droite l_0, on peut prendre pour l'un des plans Ω, Ω' le plan mené par la droite et par l_0 : par exemple Ω'. Alors la cubique est une cubique plane unicursale tracée dans le plan Ω'.

Enfin si la droite est une normale stationnaire, la cubique plane se décompose à son tour car *toute normale stationnaire est le lieu des associés de ses points.*

Nous laissons de côté l'étude plus minutieuse des diverses circonstances de la remarquable correspondance cubique que nous avons rencontrée dans ces recherches et nous allons poursuivre l'étude générale en nous occupant de la question des courbures.

CHAPITRE VI.

FAISCEAUX HOMOGRAPHIQUES DES AXES DE COURBURE DES COURBES CONJUGUÉES. CENTRES DE COURBURE.

§ 42.

CORRESPONDANCE HOMOGRAPHIQUE ENTRE LES AXES DE COURBURE. CARACTÈRE SINGULIER DE LA CORRESPONDANCE HOMOGRAPHIQUE. LA DROITE d_P EST LE RAYON DOUBLE UNIQUE.

Nous avons vu au n° 34 que si l'on considère deux courbes conjuguées (e), (e') tangentes entre elles au point P à une même droite t_P et normales au plan Π_P, polaire de P dans le complexe $\mathcal{L}$, les axes de courbure δ, δ' de ces deux courbes appartiennent à un même faisceau de droites dans le plan Π_P et que le centre de ce faisceau plan de droites est précisément le point P_1, associé du point P.

De là l'étude que nous avons tout d'abord faite de la correspondance entre les points P et P_1.

Il nous reste à étudier comment dans ce faisceau plan parfaitement défini, se correspondent les axes de courbure δ et δ', lorsque l'on considère tous les couples de courbes (e), (e') qui sont tangentes entre elles au point P et à la droite t_P.

Les deux plans qui déterminent par leur intersection avec Π_P les axes δ, δ' ont pour équation respectivement (n° 33)

$$z\mathrm{X} - x\mathrm{Z} + (h-k)(\mathrm{Y}-y) + h_1(\mathrm{Z}-z) + \rho(x\mathrm{X} + y\mathrm{Y} + h^2) = 0,$$

et

$$zX - xZ + (h-k)(Y-y) + h_1(Z-z) + \rho'(xX + yY + h^2) = 0.$$

Les paramètres des axes δ, δ' dans le faisceau sont donc ρ et ρ'. Mais on a posé [équations (74), (76)] :

$$\rho = \frac{r-\mu}{p}, \qquad \rho' = \frac{r'-\mu}{p}.$$

Si alors on imagine toutes les courbes (e) issues de P tangentiellement à t_p, ces diverses courbes pourront différer par la valeur de μ et δ décrira alors le faisceau plan à mesure que μ recevra diverses déterminations.

Mais à chaque courbe (e) correspondra une courbe (e'), en sorte qu'à une position de δ, axe de courbure de (e), correspondra une position de δ', axe de courbure de (e').

Pour avoir la nature de la correspondance entre δ et δ' il suffit d'éliminer μ entre les deux équations précédentes : on trouve ainsi :

$$\rho' - \rho = \frac{r'-r}{p} = \text{constante}. \tag{91}$$

De là résulte que *les axes* δ, δ' *de courbure des courbes* (e), (e') *se correspondent homographiquement.*

Mais il convient d'ajouter que cette correspondance homographique présente un caractère singulier. En effet si l'on y cherche les éléments doubles en faisant $\rho' - \rho = 0$, l'équation en ρ qui devrait être du second degré se réduit à l'impossibilité

$$\frac{r'-r}{p} = 0,$$

ce qui signifie que *les éléments doubles sont confondus* et correspondent à la valeur infinie de ρ.

Or si l'on se reporte aux équations du faisceau, on voit que ρ infini correspond à l'équation $x\mathrm{X}+y\mathrm{Y}+h^2=0$, c'est-à-dire à la droite d_P.

Ainsi :

L'homographie qui relie les axes δ, δ' est singulière et le rayon double unique est la droite d_P.

§ 13.

FORMES MÉTRIQUES DE LA CORRESPONDANCE HOMOGRAPHIQUE.

Ce résultat prête à des formes métriques précises dont l'une est la généralisation directe de la formule d'Euler-Savary.

Désignons par θ l'angle de l'axe δ avec la droite d_P, par θ' l'angle de l'axe δ' avec la même droite; une homographie entre les droites δ, δ' se traduira par une équation de forme

$$m \operatorname{tang}\theta \operatorname{tang}\theta' + n \operatorname{tang}\theta + n' \operatorname{tang}\theta' + p = 0,$$

où m, n, n', p sont des constantes.

Les rayons doubles s'obtiennent en faisant $\theta'=\theta$, d'où

$$m \operatorname{tang}^2\theta + (n+n') \operatorname{tang}\theta + p = 0.$$

Puisque le rayon double est unique et coïncide avec d_P, $\operatorname{tang}\theta = 0$ doit être racine double, d'où résulte $p=0$, $n'+n=0$, en sorte que la relation homographique prend la forme

$$m \operatorname{tang}\theta \operatorname{tang}\theta' + n(\operatorname{tang}\theta - \operatorname{tang}\theta') = 0;$$

ou encore

$$\operatorname{cotg}\theta' - \operatorname{cotg}\theta = f_\mathrm{P},$$

où f_P est une constante qui ne dépend que du point P.

IMPRIMERIE NATIONALE.

On peut du reste bien aisément arriver directement à un résultat plus complet.

Si, en effet, on cherche au moyen des équations (72), (73) les paramètres de direction de l'axe δ, on trouve facilement, en employant les notations A, B, C du n° 16, que ces paramètres directeurs ont pour expressions :

$$A+hy\rho, \qquad B-hx\rho, \qquad C+(x^2+y^2)\rho,$$

tandis que ceux de d_p sont

$$hy, \qquad -hx, \qquad (x^2+y^2).$$

L'expression de la cotangente de l'angle θ que forme δ avec d_p se calcule sans peine et après quelques réductions on trouve :

$$\operatorname{cotg}\theta=\frac{\sqrt{x^2+y^2+h^2}}{\Phi}\left(C+\rho\sqrt{x^2+y^2}\right).$$

On aurait de la même façon :

$$\operatorname{cotg}\theta'=\frac{\sqrt{x^2+y^2+h^2}}{\Phi}\left(C+\rho'\sqrt{x^2+y^2}\right),$$

d'où

$$\operatorname{cotg}\theta'-\operatorname{cotg}\theta=\frac{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+h^2}}{\Phi}(\rho'-\rho),$$

et comme

$$\rho'-\rho=\frac{r'-r}{p},$$

il vient en définitive :

$$\operatorname{cotg}\theta'-\operatorname{cotg}\theta=J_p, \tag{92}$$

avec

$$(92\ bis) \qquad f_P = \frac{r' - r}{p} \frac{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+h^2}}{\Phi}.$$

Le paramètre f_P se trouve ainsi complètement défini en fonction des coordonnés x, y, z du point P.

§ 44.

AUTRE FORME MÉTRIQUE. — SIGNIFICATION DES POINTS P_2, P'_2. AXES DES TRAJECTOIRES DANS LE MOUVEMENT DIRECT ET DANS LE MOUVEMENT INVERSE.

On peut donner une autre forme métrique à la correspondance qui relie les axes de courbure δ, δ' des courbes (e), (e'). Considérons une parallèle d'_P quelconque à la droite d_P dans le plan normal commun et soient Δ, Δ' les points où les axes δ, δ' viennent couper cette droite. La correspondance entre les points Δ, Δ' est une homographie singulière dont le point double unique n'est autre que la trace sur d'_P du rayon double unique, c'est-à-dire de d_P; mais puisque d'_P est parallèle à d_P, le point double est à l'infini. Or, lorsqu'une homographie est singulière et a pour point double unique le point à l'infini, la distance de deux points homologues est constante.

Ici par conséquent :

Le vecteur $\overline{\Delta\Delta'}$ *intercepté sur la droite* d'_P *par les axes de courbure homologues* δ, δ' *a une longueur et un sens constants.* Il est assez naturel de choisir pour d'_P la parallèle à d_P issue de P. Dans ces conditions, si sur la droite d'_P, ainsi définie, le point Δ est en P, le point Δ' vient quelque part en P'_2 sur d'_P. La connaissance de P'_2 suffit

alors pour définir le vecteur $\overline{\Delta\Delta'}$, puisqu'il doit être constamment égal et parallèle (avec même sens) au vecteur $\overline{PP'_2}$.

La question se trouve ainsi ramenée à la détermination du point P'_2.

On pourrait aussi dire que lorsque Δ' est en P, Δ est quelque part en P_2 sur la même droite d'_P. Le vecteur $\overline{P_2P}$ doit être alors égal et parallèle (avec même sens) au vecteur $\overline{PP'_2}$, puisque ces deux vecteurs sont deux positions particulières de $\overline{\Delta\Delta'}$. Le point P est le milieu du vecteur $\overline{P_2P'_2}$.

Il revient donc au même de déterminer le point P_2 ou le point P'_2.

Mais avant de procéder à cette détermination, on peut chercher à se rendre compte de la signification des points P_2 et P'_2.

D'abord on sait qu'un cas particulier de courbe (e) est celui où cette courbe se réduit à un point dont (e') est alors la trajectoire. Analytiquement ce cas est caractérisé par $\mu = r$ (n° 19) d'où résulte (éq. 74, n° 33) $\rho = 0$. La droite δ coïncide alors avec la normale stationnaire d_P^{nn}, ce qui signifie que la droite P_1P joue le rôle d'axe de courbure ou que le point Δ se trouve en P et par suite le point Δ' en P'_2.

En considérant au contraire la trajectoire dans le corps S du point P regardé comme fixe dans le corps S', c'est-à-dire la trajectoire du point P dans le mouvement inverse, cela revient à supposer que c'est (e') qui se réduit à un point et δ est alors l'axe de courbure de la trajectoire (e) de ce point. Analytiquement, ceci correspond à l'hypothèse $\mu = r'$ (n° 19) ou $\rho' = 0$ (éq. 76, n° 33), en sorte que, dans ce cas, c'est l'axe δ' qui coïncide avec la normale stationnaire d_P^{nn}. Par contre, la droite P_1P_2 est alors l'axe de la courbe (e).

En résumé :

Si l'on considère le point P *comme solidaire successivement du corps* S *et du corps* S' *et si l'on considère ses trajectoires dans le mou-*

vement $\boxed{S, S'}$ *et dans le mouvement inverse* $\boxed{S', S}$, *les droites* $P_1P'_2$ et P_1P_2 *sont les axes de courbure de ces trajectoires.*

Les vecteurs $\overline{PP'_2}$, $\overline{P_2P}$ *déterminés par ces axes sur la parallèle* d'_P *à la droite* d_P *issue de* P *sont égaux et égaux au vecteur constant en grandeur et sens qu'interceptent sur* d'_P *tous les couples d'axes de courbures* δ, δ' *des couples de courbes conjuguées.*

§ 45.

DÉTERMINATION DU POINT P'_2. — LE POINT Q.

Maintenant que nous avons donné l'interprétation de ces deux points P_2, P'_2 nous allons procéder à leur détermination. Cherchons par exemple le point P'_2. On vient de voir que $P_1P'_2$ est l'axe δ' dans l'hypothèse où l'on prend $\mu = r$.

D'après cela le plan (75) qui coupe le plan Π_P suivant $P_1P'_2$ sera représenté par l'équation

$$(93)\qquad \begin{cases} zX - xZ + (h-k)(Y-y) + h_1(Z-z) \\ \qquad + \dfrac{r'-r}{p}(xX + yY + h^2) = 0. \end{cases}$$

Il nous faut chercher le point P'_2 où la droite d'_P coupe ce plan. Or la droite d_P a comme équations

$$\begin{cases} -yX + xY + h(Z-z) = 0, \\ xX + yY + h^2 = 0. \end{cases}$$

(Voir éq. 78, n° 34.)

La parallèle d'_P à d_P issue de P sera donc représentée par les équations

$$(94)\qquad \begin{cases} -y\mathrm{X}+x\mathrm{Y}+h(\mathrm{Z}-z)=0, \\ x\mathrm{X}+y\mathrm{Y}-(x^2+y^2)=0. \end{cases}$$

En tenant compte de la dernière de ces équations, l'équation (94) se transforme en la suivante :

$$(95)\qquad \begin{cases} z\mathrm{X}-x\mathrm{Z}+(h-k)(\mathrm{Y}-y)+h_1(\mathrm{Z}-z) \\ \quad +\frac{r'-r}{p}(x^2+y^2+h^2)=0. \end{cases}$$

Le point P'_2 est celui où le plan précédent est coupé par la droite (94).

Or on remarquera que le plan (95) est parallèle au plan polaire du point P dans le complexe $\mathcal{L}_1$, déjà défini et dont l'axe d_1 est parallèle, comme on sait, à Oy.

Si donc on mène par P une parallèle à Oy, le point Q où cette parallèle coupera le plan (95) sera justement le pôle de ce plan dans le complexe $\mathcal{L}_1$.

Pour avoir ce point Q, il suffit de faire $\mathrm{X}=x$, $\mathrm{Z}=z$ dans l'équation (95). On trouve ainsi :

$$\mathrm{Y}-y=-\frac{r'-r}{p}\frac{x^2+y^2+h^2}{h-k}.$$

Mais $\mathrm{Y}-y$ n'est autre chose que le nombre qui mesure le vecteur $\overline{\mathrm{PQ}}$ suivant l'axe Oy; en représentant ce nombre par $(\overline{\mathrm{PQ}})$ on a :

$$(\overline{\mathrm{PQ}})=-\frac{r'-r}{p}\frac{x^2+y^2+h^2}{h-k}.$$

Si l'on appelle $d\chi$ l'angle de la rotation élémentaire dans le mouvement $\boxed{S, S'}$, on a

$$r' - r = \frac{d\chi}{dt},$$

tandis que l'on trouve [(10) n° 6] :

$$p = -\frac{d\sigma}{dt};$$

il viendra donc :

$$(96) \qquad (\overline{PQ}) = \frac{d\chi}{d\sigma}\frac{x^2+y^2+h^2}{h-k}.$$

En résumé :

Pour construire le vecteur constant $\overline{\Delta\Delta'}$ *que les axes de courbure* δ, δ' *conjugués déterminent sur la droite* d'_P *parallèle à* d_P *issue de* P, *on mène par* P *une parallèle à* Oy, *normale aux surfaces* $(\Phi), (\Phi')$ *au point* O *et sur cette parallèle on prend le point* Q *tel que le vecteur* $\overline{PQ}$ *soit mesuré par le nombre* (96).

On prend le plan polaire de Q *dans le complexe* $\mathcal{L}_1$: *ce plan polaire coupe la droite* d'_P *en un point* P'_2 *et le vecteur* PP'_2 *est le vecteur constant cherché.*

Comme application des résultats précédents, le lecteur trouvera aisément que les coordonnées du point P'_2, (x'_2, y'_2, z'_2), ont pour expressions, en conservant les notations H, Φ déjà utilisées dans les paragraphes précédents :

$$(97) \qquad \begin{cases} x'_2 = x - \dfrac{d\chi}{d\sigma}\dfrac{hyH}{\Phi}, \\ y'_2 = y + \dfrac{d\chi}{d\sigma}\dfrac{hxH}{\Phi}, \\ z'_2 = z - \dfrac{d\chi}{d\sigma}\dfrac{(x^2+y^2)H}{\Phi}. \end{cases}$$

Le carré de la longueur $\overline{\Delta\Delta'}$ ou $\overline{PP'_2}$ est dès lors

$$\left(\frac{d\chi}{d\sigma}\right)^2 \frac{(x^2+y^2)(x^2+y^2+h^2)\,H^2}{\Phi^2},$$

d'où, pour la valeur absolue de la longueur $\overline{PP'_2}$,

$$\pm\left(\frac{d\chi}{d\sigma}\right)\frac{\sqrt{(x^2+y^2)(x^2+y^2+h^2)}\,H}{\Phi}.$$

§ 46.

EXPRESSION DU QUOTIENT $\frac{r'-r}{p}$.

On peut observer que, dans les formules précédentes, il est possible de mettre sous une autre forme le quotient

$$\frac{r'-r}{p} = -\frac{d\chi}{d\sigma}.$$

Soit α l'angle avec Oz de la ligne de striction de la surface (Φ) et pareillement α' l'angle avec Oz de la ligne de striction (Φ').

On a, d'après la définition même :

$$\frac{\zeta}{\cos\alpha} = \frac{\xi}{\sin\alpha}, \qquad \frac{\zeta'}{\cos\alpha'} = \frac{\xi'}{\sin\alpha'},$$

et, puisque $\xi' = \xi$,

$$\zeta = \xi\operatorname{cotg}\alpha, \qquad \zeta' = \xi\operatorname{cotg}\alpha',$$

d'où

$$\frac{\zeta'-\zeta}{\xi} = \operatorname{cotg}\alpha' - \operatorname{cotg}\alpha,$$

ce qui s'écrit

$$\frac{\zeta'-\zeta}{r-r'}\cdot\frac{-p}{\xi}\cdot\frac{r'-r}{-p}=\operatorname{cotg}\alpha'-\operatorname{cotg}\alpha.$$

Mais

$$\frac{\zeta'-\zeta}{r'-r}=h,\qquad -\frac{p}{\xi}=\frac{1}{k},$$

donc

$$\frac{d\chi}{d\sigma}=\frac{r'-r}{-p}=\frac{k}{h}(\operatorname{cotg}\alpha'-\operatorname{cotg}\alpha), \tag{98}$$

expression remarquable du coefficient qui figure dans les formules des numéros précédents.

Avec ces notations, la formule fondamentale qui relie les axes de courbure δ, δ' s'écrit (voir n° 43, formule 92)

$$\operatorname{cotg}\theta'-\operatorname{cotg}\theta=-\frac{k}{h}(\operatorname{cotg}\alpha'-\operatorname{cotg}\alpha)\frac{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+h^2}}{\Phi}. \tag{99}$$

§ 47.

PLANS OSCULATEURS. — FAISCEAUX HOMOGRAPHIQUES QU'ILS FORMENT. HOMOGRAPHIE SUR d_p DES PÔLES DES PLANS OSCULATEURS.

Les plans osculateurs de courbes (e), (e') sont les plans menés par la droite t_p normalement aux axes de courbure δ, δ'. Ces plans, que nous désignerons par les notations respectives Λ, Λ', décrivent, autour de la droite t_p, deux faisceaux homographiques présentant les mêmes singularités que les faisceaux des axes δ et δ'. Les éléments doubles coïncideront avec le plan mené par t_p normalement à d_p, puisque c'est d_p qui est le rayon double singulier des axes. La trace de ce plan double sur le plan Π_p sera la perpendiculaire g_p com-

IMPRIMERIE NATIONALE.

mune aux droites t_P et d_P, en sorte que t_P et d_P étant deux droites conjuguées, g_P n'est autre que la perpendiculaire abaissée de P sur l'axe (d) du mouvement hélicoïdal tangent.

Il suit de là que, si l'on considère une droite quelconque g'_P parallèle à g_P, les plans osculateurs Λ, Λ' coupent cette droite en deux points N, N′ qui décrivent sur g'_P deux divisions homographiques dont le point double est unique et rejeté à l'infini. Cela veut dire que le vecteur $\overline{NN'}$ a une grandeur constante et une direction constante.

Le lecteur vérifiera aisément que le plan osculateur à la courbe (e), le plan Λ, par conséquent normal à δ, a pour équation, en employant les notations précédentes :

$$(100)\qquad \begin{cases} (A+\rho hy)(X-x)+(B-\rho hx)(Y-y) \\ \quad +[C+\rho(x^2+y^2)](Z-z)=0. \end{cases}$$

Le plan Λ' s'en déduit par le changement de ρ en ρ'.

Prenons pour g'_P la droite issue de l'origine parallèle à g_P. L'équation de cette droite dans le plan $Z=0$ est $\frac{X}{x}=\frac{Y}{y}$. En cherchant les traces N, N′ des plans Λ, Λ', on trouve sans peine que sur l'axe dont $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ sont les cosinus directeurs, le vecteur $\overline{NN'}$ est mesuré par le nombre :

$$(101)\qquad \left(\overline{NN'}\right)=\frac{r'-r}{p}\cdot\frac{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}z}{\Phi}.$$

On pourrait encore prendre les pôles dans le complexe $\mathcal{L}$ des plans osculateurs qui sont les points où ces plans coupent la droite d_P; en effet, ces plans passent par t_P, donc d_P est le lieu de leurs pôles. Soient L, L′ les pôles des plans Λ, Λ', et D le pied de la perpendiculaire commune à d et à d_P; D est le point où la droite appelée g_P coupe d_P. D'après ce qui précède, D sera sur la droite d_P

le point double (unique) de l'homographie décrite par les pôles L, L′ des plans osculateurs. Si l'on appelle l, l' les distances DL, DL′ prises en un sens convenable sur d_p, on trouve par un calcul qui n'offre aucune difficulté que l'équation d'homographie qui relie les points L, L′ a la forme simple

$$\frac{1}{l'} - \frac{1}{l} = -\frac{r' - r}{p} \cdot \frac{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{\Phi \sqrt{\mathrm{H}}}, \tag{102}$$

en continuant à adopter pour Φ, H les notations des numéros antérieurs.

§ 48.

CENTRES DE COURBURE. THÉORÈME REMARQUABLE CONCERNANT CES CENTRES.

La détermination des centres de courbure E, E′ des courbes (e), (e'), ainsi que leur correspondance, dérivent de ce qui précède. Le point E est le point où l'axe δ perce le plan osculateur Λ et de même pour E′, δ', Λ'. D'après cela:

Le lieu des centres de courbure des courbes (e), (e') *qui s'enveloppent et se touchent* ACTUELLEMENT *au point* P, *en sorte que* t_p *est leur tangente commune, n'est autre que le cercle décrit sur* PP_1 *comme diamètre dans le plan normal commun* II_p.

Ces points E, E′ *se correspondant homographiquement sur ce cercle, le point double de cette homographie est unique: c'est le point* P_1.

On voit que *les points* E, E′ *sont les projections du point* P_1 *sur les plans osculateurs aux courbes* (e), (e'); *on peut ajouter que: les rayons de courbure* PE, PE′ *des courbes* (e), (e') *sont les projections du vecteur* $\overline{\mathrm{PP}_1}$ *sur les plans osculateurs* Λ, Λ'.

Au chapitre suivant on verra la raison générale de ces curieuses propriétés, qui tiennent à ce que les courbes (e), (e') sont définies par une propriété de leur tangente.

§ 49.

TOUTE DROITE PEUT-ELLE ÊTRE AXE DE COURBURE D'UNE COURBE (e) ?

Nous ne saurions développer ici les nombreuses conséquences géométriques des résultats qui viennent d'être obtenus.

Après avoir étudié les propriétés des axes et des plans osculateurs pour les courbes (e), (e') qui se touchent à un instant donné en un même point P, il y aurait lieu de rechercher le genre de relations que l'on obtient lorsque l'on considère simultanément diverses positions du point P.

Dans cet ordre d'idées, nous traiterons seulement la question suivante :

Toute droite (m) prise dans le corps S *à un instant donné* peut-elle être considérée comme l'axe de courbure δ d'une courbe (e) douée d'enveloppe et solidaire de ce corps ?

Voici un raisonnement qui permet de résoudre la question.

Si (m) est un tel axe, il y a un plan Π_P mené par (m) dont le pôle P, pris par rapport au complexe $\mathcal{L}$, est l'associé d'un point P_1 de cette même droite.

La condition est nécessaire et suffisante.

Soit $m_{\mathcal{L}}$ la conjuguée de (m) dans le complexe linéaire $\mathcal{L}$. Le point P est sur la droite $m_{\mathcal{L}}$. En outre, la droite PP_1 est une normale stationnaire, qui coupe par conséquent les directrices l_0, l'_0 de la congruence formée par ces droites. Les droites l_0, l'_0 sont conjuguées dans le complexe $\mathcal{L}$; les droites (m), $m_{\mathcal{L}}$ également. Les quatre droites $l_0, l'_0, (m), m_{\mathcal{L}}$ sont quatre génératrices d'un même système d'une quadrique Q_m. Les génératrices du second système

sont les normales stationnaires qui coupent la droite (m) [et la droite $m_{\mathcal{C}}$ par conséquent].

Soit (u) une des génératrices de ce second système et P_1, P les points où elle coupe les droites (m) et $m_{\mathcal{C}}$. Il faudra pour que (m) apparaisse comme un axe de courbure que P, P_1 soient associés, c'est-à-dire que leurs plans polaires dans le complexe $\mathcal{C}$ soient rectangulaires (voir le n° 35).

Or ces plans polaires sont les plans menés par (u) et (m), (u) et $m_{\mathcal{C}}$ respectivement, en sorte que (u) est alors l'intersection de deux plans rectangulaires menés par (m) et $m_{\mathcal{C}}$ respectivement.

Considérons le lieu des droites (v) d'intersection des plans menés par (m) et des plans perpendiculaires à ceux-là menés par $m_{\mathcal{C}}$. Le lieu de ces droites (v) est une quadrique que nous représenterons par Q'_m.

Cette quadrique Q'_m admet comme génératrices du système autre que les droites (v) les droites (m) et $m_{\mathcal{C}}$.

Dès lors les quadriques Q_m et Q'_m ont en commun les deux droites (m), $m_{\mathcal{C}}$ d'un même système; elles ont donc en commun deux autres droites du système opposé.

Ainsi il y a deux droites (u) sur la quadrique Q_m telles que les plans menés par (u) et (m) et par (u) et $m_{\mathcal{C}}$ soient rectangulaires.

Il en résulte, d'après ce qui précède, que :

En général, toute droite (m) du corps S peut, à un instant donné, être considérée de deux manières comme l'axe de courbure d'une courbe douée d'enveloppe.

§ 49 *bis*.

REMARQUE SUR LA COURBURE DES HÉLICES EXCEPTIONNELLES.

Je ferai, en terminant ce chapitre, une remarque sur les hélices exceptionnelles; prenons une des hélices exceptionnelles correspondant, par exemple, à l'époque t, d'axe (d), de pas h. Le long de cette

hélice l reste constant et les coordonnées d'un point peuvent être représentées par

$$x = a\cos\theta, \qquad y = a\sin\theta, \qquad z = h\theta + b,$$

où a, b désignent deux quantités constantes.

Le plan normal à une telle hélice au point P (x, y, z) a pour équation :

$$-y\mathrm{X} + x\mathrm{Y} + h(\mathrm{Z} - z) = 0.$$

Ce plan normal est encore le plan Π_P, seulement les conditions de son déplacement ne sont plus les mêmes que précédemment. En remplaçant x, y, z par leurs valeurs, l'équation du plan Π_P devient

$$-a\sin\theta\,\mathrm{X} + a\cos\theta\,\mathrm{Y} + h(\mathrm{Z} - h\theta + b) = 0.$$

En prenant la dérivée par rapport au paramètre θ, on aura l'axe de courbure de l'hélice, on trouve ainsi :

$$-a\cos\theta\,\mathrm{X} - a\sin\theta\,\mathrm{Y} - h^2 = 0.$$

En remettant x, y on aura :

$$x\mathrm{X} + y\mathrm{Y} + h^2 = 0.$$

Ce plan coupe le plan Π_P suivant l'axe de courbure de l'hélice. Mais ce plan auxiliaire nous est connu : c'est le plan (78) du n° 34, qui coupe le plan Π_P suivant la droite d_P. Ainsi la droite d_P est l'axe de courbure de l'hélice. Résultat du reste bien connu.

Si nous l'énonçons ici, c'est afin de remarquer que les hélices exceptionnelles rentrent cependant dans la règle en ce qui concerne

la courbure, et que les axes de courbure font partie, comme ceux des courbes (e), du faisceau plan (P_1, Π_P).

Dans la formule (73), c'est l'hélice exceptionnelle qui fournit l'interprétation de $\rho = \infty$, que les courbes douées d'enveloppes ne pourraient fournir.

Le chapitre suivant nous fera comprendre pourquoi la loi des courbures doit s'étendre aux hélices exceptionnelles aussi bien qu'aux autres courbes intégrales.

CHAPITRE VII.

SUR L'EXTENSION DES PROPRIÉTÉS DE COURBURE DES COURBES DOUÉES D'ENVELOPPE À UNE CLASSE ÉTENDUE DE COURBES.

§ 50.

RETOUR AU CÔNE DES VITESSES. COURBES DÉFINIES PAR UNE PROPRIÉTÉ DE LEUR TANGENTE.

Nous avons vu que les courbes (e) douées d'enveloppe, au cours du mouvement d'un corps S dont elles sont solidaires, se trouvent définies par la propriété qu'en chacun de leurs points la tangente doit se trouver sur un cône défini *a priori* et qui a pour sommet ce point. Ce cône est le cône des vitesses.

Nous avons reconnu ensuite que toutes celles de ces courbes qui, passant en un point P, y admettent une tangente donnée t_P, ont comme axes de courbure les droites d'un faisceau plan; le plan du faisceau est naturellement le plan normal Π_P en P aux courbes proposées et le sommet du faisceau est un certain point P_1 que nous avons appelé l'associé du point P.

Il en résultait que le centre de courbure n'était autre que la projection du point P_1 sur le plan osculateur.

Cette remarquable propriété n'est point spéciale aux courbes douées d'enveloppes. Nous avons en effet constaté que les hélices exceptionnelles, qui sont aussi des courbes intégrales du cône des vitesses, suivent la même loi des axes de courbure. Il y a à cela une raison profonde, c'est parce que cette loi des courbures résulte de la propriété de la tangente à ces courbes que nous avons rappelée et s'applique à toutes les courbes qui présentent une définition analogue.

Monge, il y a longtemps, a considéré, semble-t-il, le premier, les courbes dont les coordonnées rectangulaires x, y, z d'un point vérifient une équation différentielle de la forme :

$$f(x, y, z, dx, dy, dz) = 0, \tag{103}$$

où f est une fonction homogène des différentielles dx, dy, dz.

Cette équation exprime que la tangente à l'une de ces courbes (c) en un quelconque de ses points est une génératrice du cône Γ_P qui a pour sommet ce point et dont l'équation en coordonnées courantes X, Y, Z serait :

$$f(x, y, z, \mathrm{Z}-x, \mathrm{Y}-y, \mathrm{Z}-z) = 0. \tag{103 bis}$$

On sait que M. Darboux a repris l'étude de ces courbes dans son mémoire : *Sur les solutions singulières,* inséré au *Recueil des Savants étrangers.* Ces courbes jouent un rôle important dans l'intégration de l'équation différentielle des surfaces dont le plan tangent en chaque point est tangent au cône proposé.

§ 51.

EXTENSION DE LA NOTION DU POINT ASSOCIÉ.

Considérons [1] donc une de ces courbes (c) et soient α, β, γ les cosinus directeurs de la tangente au point P de cette courbe.

Si ds est l'élément d'arc, on aura :

$$dx = \alpha ds, \qquad dy = \beta ds, \qquad dz = \gamma ds, \tag{104}$$

[1] J'ai déjà fait connaître une partie des résultats qui vont suivre dans les *Comptes Rendus* (t. CXLIV).

IMPRIMERIE NATIONALE.

et l'équation (103) s'écrit alors :

$$f(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

Dérivons cette équation par rapport à l'arc s, il viendra :

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{ds} + \frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{ds} + \frac{\partial f}{\partial \beta}\frac{d\beta}{ds} + \frac{\partial f}{\partial \gamma}\frac{d\gamma}{ds} = 0.$$

Or, si α', β', γ' sont les cosinus directeurs de la normale principale et R le rayon de courbure, on a aussi :

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha'}{R}, \qquad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\beta'}{R}, \qquad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\gamma'}{R}. \tag{105}$$

En sorte qu'au moyen de ces équations et des équations (104), l'équation précédente devient :

$$\frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\gamma + \frac{1}{R}\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\alpha' + \frac{\partial f}{\partial \beta}\beta' + \frac{\partial f}{\partial \gamma}\gamma'\right) = 0. \tag{106}$$

Écrivons maintenant l'équation du plan normal à la courbe (c) au point P, on aura :

$$\alpha(X - x) + \beta(Y - y) + \gamma(Z - z) = 0. \tag{107}$$

Cherchons la caractéristique de ce plan, qui sera l'axe de courbure δ de la courbe (c), il viendra, en différentiant (107) par rapport au paramètre s :

$$\frac{d\alpha}{ds}(X - x) + \frac{d\beta}{ds}(Y - y) + \frac{d\gamma}{ds}(Z - z) - \left(\alpha\frac{dx}{ds} + \beta\frac{dy}{ds} + \gamma\frac{dz}{ds}\right) = 0,$$

c'est-à-dire, en tenant compte des équations (103), (105) :

$$\frac{1}{R}[\alpha'(X - x) + \beta'(Y - y) + \gamma'(Z - z)] - 1 = 0. \tag{108}$$

Les équations (107), (108) représentent ainsi l'axe δ.

Or, définissons un point P_1, de coordonnées x_1, y_1, z_1, par les équations suivantes :

$$(109)\qquad \frac{x_1-x}{\frac{\partial f}{\partial \alpha}}=\frac{y_1-y}{\frac{\partial f}{\beta}}=\frac{z_1-z}{\frac{\partial f}{\partial \gamma}}=\frac{-1}{\alpha\frac{\partial f}{\partial x}+\beta\frac{\partial f}{\partial y}+\gamma\frac{\partial f}{\partial z}}.$$

§ 52.

FAISCEAU DES AXES DE COURBURE. — PLANS OSCULATEURS.

Le point P_1 ainsi défini est dans le plan normal; on a, en effet :

$$\alpha(x_1-x)+\beta(y_1-y)+\gamma(z_1-z)=-\frac{\alpha\frac{\partial f}{\partial \alpha}+\beta\frac{\partial f}{\partial \beta}+\gamma\frac{\partial f}{\partial \gamma}}{\alpha\frac{\partial f}{\partial x}+\beta\frac{\partial f}{\partial y}+\gamma\frac{\partial f}{\partial z}}.$$

Or, si m est le degré d'homogénéité de la fonction $f(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$ en α, β, γ, on a l'identité :

$$\alpha\frac{\partial f}{\partial \alpha}+\beta\frac{\partial f}{\partial \beta}+\gamma\frac{\partial f}{\partial \gamma}=mf(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)=0.$$

J'ajoute que le point P_1 est aussi dans le plan (108) qui définit δ. En effet, on a :

$$\frac{\alpha'}{R}(x_1-x)+\frac{\beta'}{R}(y_1-y)+\frac{\gamma'}{R}(z_1-z)$$
$$=-\frac{\frac{\alpha'}{R}\frac{\partial f}{\partial \alpha}+\frac{\beta'}{R}\frac{\partial f}{\partial \beta}+\frac{\gamma'}{R}\frac{\partial f}{\partial \gamma}}{\alpha\frac{\partial f}{\partial x}+\beta\frac{\partial f}{\partial y}+\gamma\frac{\partial f}{\partial z}}.$$

Or, cela est égal à 1 en vertu de l'équation (106).

Il est ainsi établi que le point P_1 est un point de l'axe de courbure δ.

On a donc ce théorème :

Si l'on considère toutes les courbes (c) *qui vérifient l'équation différentielle* (104), *et parmi elles toutes celles qui, passant au point* P (x, y, z), *y admettent la même tangente* PT, *génératrice du cône* Γ_P *défini par l'équation* $(102\ bis)$, *les axes de courbure de ces courbes passent tous par un même point* P_1 *et forment ainsi dans le plan normal commun* Π_P *un faisceau plan dont* P_1 *est le sommet.*

Le plan osculateur Λ n'est autre que le plan mené par P normalement à l'axe δ : le point L où cet axe perce le plan Λ est le centre de courbure de la courbe (c). Donc :

Le centre de courbure d'une courbe (c) *est la projection du point* P_1 *sur le plan osculateur* Λ. *Le rayon de courbure est la projection du vecteur* $\overline{PP_1}$ *sur ce même plan.*

Nous verrons plus loin que cette proposition est une généralisation très directe du théorème de Meusnier.

Si maintenant on considère les diverses courbes (c) qui ont en P la même tangente PT, on voit que *le lieu de leur centre* L *de courbure est la circonférence de cercle décrite sur* PP_1 *comme diamètre dans le plan normal.*

Ces propriétés reproduisent celles que les courbes (e) nous ont déjà manifestées.

§ 53.

REMARQUES SUR LA DÉFINITION DU POINT P_1. LE CÔNE SUPPLÉMENTAIRE. CAS OÙ P_1 EST À L'INFINI. — CAS D'UN COMPLEXE DE DROITES.

Les équations (109) mettent en évidence ce fait que *la droite* $\overline{PP_1}$ *est la génératrice du cône* G_P, *supplémentaire du cône* Γ_P.

Ces équations montrent en effet que $\overline{PP_1}$ est normale au plan tangent au cône Γ_P le long de la tangente $\overline{PT}$.

Une propriété essentielle de la droite d_P^{nn} se trouve donc conservée.

Les singularités que peut présenter l'existence du point P_1 vont encore rattacher d'autres considérations à la présente théorie.

Si l'expression :

$$\alpha\frac{\partial f}{\partial x}+\beta\frac{\partial f}{\partial y}+\gamma\frac{\partial \gamma}{\partial z}=0 \tag{110}$$

est nulle, les formules (109) donnent pour le point P_1 une position à l'infini, dans la direction de la génératrice g_P du cône G_P. Tous les axes de courbure sont alors parallèles à g_P.

Si, en effet, on exclut le cas exceptionnel où $\frac{1}{R}$ serait nul, l'équation (106) donne, en vertu de (110) :

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}\alpha'+\frac{\partial f}{\partial \beta}\beta'+\frac{\partial f}{\partial \gamma}\gamma'=0. \tag{111}$$

On a du reste aussi :

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}\alpha+\frac{\partial f}{\partial \beta}\beta+\frac{\partial f}{\partial \gamma}\gamma=0. \tag{112}$$

Si α'', β'', γ'' sont les cosinus directeurs de l'axe de courbure, on doit avoir :

$$\alpha''\alpha' + \beta''\beta' + \gamma''\gamma' = 0, \qquad \alpha''\alpha + \beta''\beta + \gamma''\gamma = 0,$$

d'où, par comparaison avec (111), (112) :

$$\frac{\alpha''}{\frac{\partial f}{\partial \alpha}} = \frac{\beta''}{\frac{\partial f}{\partial \beta}} = \frac{\gamma''}{\frac{\partial f}{\partial \gamma}}, \tag{113}$$

ce qui démontre le théorème.

On voit que, en même temps :

Dans ce cas, le plan osculateur est le même pour toutes les courbes (c) tangentes à la génératrice PT *du cône* Γ_P *et ce plan osculateur est justement le plan tangent suivant* PT *à ce cône.*

Supposons que l'équation (110) ait lieu identiquement pour tous les cônes Γ_P et pour toutes leurs génératrices. On démontre aisément que, dans ce cas, le cône Γ_P est celui d'un complexe de droites et la proposition précédente devient alors le théorème connu dans la théorie des complexes :

Toute courbe qui admet pour tangentes les droites d'un complexe admet en chaque point comme plan osculateur le plan qui est tangent au cône du complexe le long de la tangente à la courbe.

Cette proposition, déjà ancienne et classique, trouve ainsi sa place dans une théorie plus générale et, au lieu d'être isolée, elle se trouve rattachée à un ordre d'idées beaucoup plus étendu.

§ 54.

EXAMEN DE L'ÉQUATION LINÉAIRE. EXTENSION DES THÉORÈMES DE MEUSNIER ET D'EULER.

Nous terminerons ces remarques en traitant un cas particulier, celui où la relation $f = 0$ est linéaire par rapport aux différentielles et a la forme :

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0, \tag{114}$$

A, B, C étant des fonctions de x, y, z.

Si le premier membre de (114) admet un facteur intégrant ou, ce qui revient au même [car un facteur fonction de x, y, z par lequel on multiplierait (114) est sans importance], si le premier membre de (114) est une différentielle exacte, l'équation (114) s'écrit :

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz = d\mathrm{U}(x, y, z) = 0,$$

ou

$$\mathrm{U}(x, y, z) = \text{constante}.$$

On tombe sur les lois de courbure des courbes tracées sur une surface.

On doit donc s'attendre à voir les résultats généraux qui précèdent devenir identiques dans ce cas particulier aux théorèmes de Meusnier et d'Euler.

C'est ce que nous pourrons constater, même sans supposer l'intégrabilité.

On a en effet, ici :

$$f(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = A\alpha + B\beta + C\gamma = 0.$$

Si l'on pose :

$$\Theta = \frac{\partial A}{\partial x}\alpha^2 + \frac{\partial B}{\partial y}\beta^2 + \frac{\partial C}{\partial z}\gamma^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial z} + \frac{\partial C}{\partial y}\right)\beta\gamma + \left(\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial z}\right)\gamma\alpha + \left(\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial x}\right)\alpha\beta,$$

les équations qui définissent le point P_1 donneront :

$$(115) \qquad \frac{x_1 - x}{A} = \frac{y_1 - y}{B} = \frac{z_1 - z}{C} = \frac{-1}{\Theta}.$$

Ici le cône Γ_P se réduit à un plan et le cône supplémentaire se réduit à la normale PN à ce plan.

Le point P_1 est un point de $\overline{PN}$ dont les coordonnées sont définies par les formules suivantes, cas particulier de (109) :

$$(116) \qquad x_1 = x + A\lambda, \qquad y_1 = y + B\lambda, \qquad z_1 = z + C\lambda,$$

avec la correspondance suivante entre le paramètre de position λ de P_1 sur PN et la direction de la tangente PT :

$$(117) \qquad \lambda = -\frac{1}{\Theta} = -\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{\Theta}.$$

La proposition d'après laquelle le centre de courbure est la projection du point P_1 sur le plan osculateur apparaît alors bien clairement comme une généralisation du théorème de Meusnier et devient ce théorème lui-même dans le cas de l'intégrabilité.

Quant à P_1, si l'on considère une courbe dont le plan osculateur passe par PN et par PT, il est clair que P_1 est le centre de courbure de cette courbe. De la sorte P_1 apparaît comme le centre de courbure de la section normale et l'est en effet dans le cas de l'intégrabilité.

Enfin, l'équation (117) qui règle la correspondance entre le point P_1 et la direction de la tangente PT (α, β, γ) dans le plan Γ_P doit apparaître comme généralisant la relation d'Euler et s'y réduit en effet dans le cas de l'intégrabilité.

En effet, λ se présente comme le quotient de deux formes quadratiques en α, β, γ dont l'une est $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$. Un même point P_1 (ou, si l'on veut, une même valeur de λ) correspond à deux tangentes différentes PT, PT′ qui, lorsque λ (ou P_1) varie, engendrent un faisceau involutif, dont font partie les droites

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0,$$

c'est-à-dire les droites isotropes et les droites $\Theta=0$, qui jouent le rôle des tangentes asymptotiques. Il résulte de là que les rayons doubles de cette involution PU, PV sont non seulement réels, mais rectangulaires et qu'ils bissectent l'angle des tangentes $\Theta=0$.

Les tangentes PU, PV représentent les directions principales, ou ce qui serait les directions principales dans le cas de l'intégrabilité. Les maxima et minima de $\overline{PP_1}$ ont lieu pour ces directions PU, PV.

Si l'on considère les deux tangentes PT, PT′ auxquelles correspond une même position de P_1, elles sont également inclinées sur les tangentes PU, PV, qui sont les bissectrices de leur angle.

En partant de là, le lecteur démontrera aisément que si θ est l'angle de la tangente PT avec PU, la distance $(\overline{PP_1})$ prise avec un signe convenable sur PN satisfait à une relation :

$$\frac{1}{(\overline{PP_1})}=\frac{\cos^2\theta}{(\overline{PA})}+\frac{\sin^2\theta}{(\overline{PB})}, \tag{118}$$

où A, B sont deux points sur PN qui généralisent les centres de courbure principaux et s'y réduisent dans le cas de l'intégrabilité.

Il n'entre pas dans notre pensée de développer à fond les consi-

IMPRIMERIE NATIONALE.

dérations qui précèdent, d'autant plus que divers auteurs ont étudié, sous un point de vue analogue, l'équation linéaire :

$$A dx + B dy + C dz = 0.$$

Ce que nous voulions, surtout, c'était montrer comment les résultats classiques de la théorie des surfaces trouvent une extension directe dans la théorie plus générale que nous avons présentée.

CHAPITRE VIII.

CAS PARTICULIER OÙ LES AXOÏDES ROULENT SANS GLISSER. CAS PLUS SPÉCIAL DES DÉVELOPPABLES.

§ 55.

CAS DE LA ROTATION TANGENTE. — DÉGÉNÉRESCENCES AFFÉRENTES À CE CAS. — CONGRUENCE DES NORMALES STATIONNAIRES DEVENUE SINGULIÈRE. — SITUATION SINGULIÈRE DU POINT ASSOCIÉ.

Nous allons actuellement revenir à nos courbes enveloppes (e), (e') et examiner divers cas particuliers où les résultats généraux reçoivent des simplifications qui méritent d'être mentionnées.

Nous traiterons en premier lieu le cas où le glissement est nul et où le mouvement hélicoïdal tangent se réduit à une simple rotation tangente.

Si nous nous reportons aux notations du paragraphe 7, cela revient à supposer $\zeta' = \zeta$, ou :

$$\zeta' - \zeta = 0. \tag{119}$$

Le complexe $\mathcal{C}$ se réduit à l'ensemble des sécantes de l'axe (d) de la rotation tangente; les surfaces (Φ), (Φ'), qui virent l'une sur l'autre, sont ici applicables l'une sur l'autre.

Le plan normal Π_P devient le plan passant par l'axe (d) et le point P, c'est donc un plan tangent à la surface (Φ). Le cône qu'il enveloppe dans le corps S quand, P restant fixe dans S, celui-ci se déplace en entraînant P, est le cône circonscrit à (Φ) ayant P pour sommet.

Le cône des vitesses Γ_P est le supplémentaire de ce cône circonscrit.

Les courbes (e) douées d'enveloppe sont dès lors définies par la propriété que *leur plan normal doit être toujours tangent à la surface* (Φ).

Les hélices exceptionnelles deviennent les cercles qui ont pour axes les génératrices rectilignes de la surface (Φ).

Quant aux normales stationnaires, si l'on envisage les génératrices consécutives (d), (d') de la surface (Φ), ces normales sont les droites qui coupent à la fois (d) et (d'), ce sont donc *les tangentes à* (Φ) *et à* (Φ') *en tous les points de la génératrice* (d).

Si donc on cherche la normale stationnaire d_P^{nn} qui passe au point P, il faudra mener par (d) et le point P le plan Π_P qui se trouve être le plan normal, prendre son point de contact P_1 avec la surface (Φ), et tirer la droite P_1P. Ce sera la normale stationnaire cherchée.

Du reste, dans ce cas, la droite d_P conjuguée de t_P est l'axe (d) lui-même; le point P_1 où il est coupé par la droite d_P^{nn} est donc bien le point associé du point P.

Il est clair qu'ici la correspondance entre P et P_1 perd le caractère qu'elle avait précédemment, puisque P_1, associé de P, pris lui arbitrairement, est un point de la surface (Φ).

Du reste, si l'on se reporte aux formules (88) qui définissent le point associé, en remarquant que l'on a ici $h=0$, $h_1=0$, on trouve pour les coordonnées x_1, y_1, z_1 des points P_1 :

$$x_1=0, \qquad y_1=0, \qquad z_1=k\frac{y}{x}. \tag{120}$$

Ce qui exprime bien que le point P_1 est le point de contact du plan Π_P avec la surface (Φ).

§ 56.

ÉLÉMENTS DE L'HOMOGRAPHIE QUI RELIE LES AXES. CONSTRUCTION SIMPLE DANS CE CAS DU VECTEUR $\overline{PP'_2}$.

En ce qui concerne l'homographie qui relie les axes δ, δ' tout subsiste, sauf certaines simplifications.

D'abord ces axes δ, δ' sont tangents au point P_1 à la surface (Φ) et forment deux faisceaux homographiques dont l'unique rayon double est d_P, c'est-à-dire la droite (d) elle-même. La droite d'_P est la droite (d') parallèle à (d) issue de P.

Justement, dans le cas actuel, le vecteur constant intercepté sur (d') par les axes δ, δ' a une interprétation particulièrement simple.

Les formules (97) qui donnent les coordonnées x'_2, y'_2, z'_2 du point P'_2 se réduisent à :

$$(121) \qquad x'_2 = x, \qquad y'_2 = y, \qquad z'_2 = z - \frac{d\chi}{d\sigma}\frac{x^2+y^2}{x};$$

en effet, on a trouvé, formules (97) :

$$z'_2 = z - \frac{d\chi}{d\sigma}\frac{(x^2+y^2)H}{\Phi},$$

or, ici :

$$\Phi = h\Xi - (h_1 - x)H = xH,$$

puisque $h = 0$, $h_1 = 0$.

Il en résulte que la mesure suivant Oz [ou (d)] du vecteur parallèle $\overline{PP'_2}$ est égale à :

$$(122) \qquad (\overline{PP'_2}) = z'_2 - z = -\frac{d\chi}{d\sigma}\frac{x^2+y^2}{x}.$$

La tangente t_P, normale en P au plan Π_P, est parallèle au plan $Z = o$ et a pour équations :

$$Z = z, \qquad xX + yY = x^2 + y^2.$$

Cette tangente coupe le plan central $Y = o$ en un point T dont l'x, que nous représentons par x_T, a pour expression :

$$x_T = \frac{x^2 + y^2}{x}; \tag{123}$$

on a, avec cette notation :

$$(\overline{PP'_2}) = -\frac{d\chi}{d\sigma} x_T. \tag{124}$$

Le vecteur constant intercepté par les axes de courbure δ, δ' sur la parallèle à l'axe (d) issue du point P *est mesuré sur* Oz [*ou* (d)] *par le produit :*

$$(\overline{PP'_2}) = -\frac{d\chi}{d\sigma} x_T,$$

où x_T mesure la distance, prise avec son signe, à l'axe (d) du pied T *de la tangente t_P sur le plan central.*

§ 57.

FORME PARTICULIÈREMENT SIMPLE DE L'ÉQUATION D'HOMOGRAPHIE DANS CE CAS. CONSÉQUENCES DIVERSES.

Mais là où la simplification apparaît le plus, c'est dans la formule dérivée de l'équation (§ 43) qui relie les angles θ, θ' des axes δ, δ' avec d_P, c'est-à-dire, ici, avec (d).

Nous avons trouvé (§ 43) :

$$\operatorname{cotg}\theta' - \operatorname{cotg}\theta = f_{\mathrm{P}},$$

avec

$$f_{\mathrm{P}} = -\frac{d\chi}{d\sigma}\frac{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+h^2}}{\Phi}.$$

Or, ici, Φ se réduit à $x(x^2+y^2)$ et :

$$f_{\mathrm{P}} = -\frac{d\chi}{d\sigma}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}. \tag{125}$$

Considérons le demi-plan Π_{P} mené par (d) et par P, soit Ψ l'angle que fait avec Oy sa trace sur le plan zOy, on a :

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\Psi, \tag{126}$$

et par suite :

$$f_{\mathrm{P}} = -\frac{d\chi}{d\sigma}\frac{1}{\sin\Psi}. \tag{127}$$

De la sorte, la formule fondamentale prend la forme très remarquable :

$$\operatorname{cotg}\theta' - \operatorname{cotg}\theta = -\frac{d\chi}{d\sigma}\frac{1}{\sin\Psi}, \tag{128}$$

qui *RAPPELLE TOUT À FAIT LA FORMULE de Savary.*

Ce résultat appelle plusieurs remarques.

En premier lieu, si l'on considère tous les points P situés dans un même plan Π mené par (d), tous ces points ont le même associé P_1, à savoir le point où le plan Π est tangent à la sur-

face (Φ) [et (Φ')]. En conséquence, le faisceau des axes δ, δ' est le même pour tous ces points.

En second lieu, l'angle Ψ est aussi le même et par suite la correspondance entre les axes δ, δ' est la même pour tous ces points.

Il suit de là que toute droite δ, issue de P_1 dans le plan Π, est un axe de courbure pour une infinité de courbes (e) coupant le plan Π orthogonalement et que l'axe conjugué δ' est de son côté axe de courbure pour toutes les courbes (e') enveloppes des courbes (e) précédentes.

On remarquera que, contrairement à ce qui se passe dans le cas général, toute droite (m) de l'espace n'est pas ici un axe de courbure d'une courbe (e).

Pour qu'une droite (m) soit axe de courbure à un instant donné, il faut et il suffit qu'elle touche la surface (Φ) en un point de l'axe (d). Autrement dit, *il faut que (m) soit une normale stationnaire.*

On reconnaît par là la différence profonde que crée l'hypothèse d'une rotation tangente.

§ 58.

CAS PLUS PARTICULIER OÙ LES SURFACES ROULANTES (Φ), (Φ') SONT DES DÉVELOPPABLES. — NOUVELLES DÉGÉNÉRESCENCES. — POSITION DU POINT ASSOCIÉ. — EXPLICATION DE CE RÉSULTAT. — DÉCOMPOSITION DE LA CONGRUENCE DES NORMALES STATIONNAIRES.

On peut particulariser plus encore et supposer que les surfaces (Φ), (Φ'), qui virent l'une sur l'autre, sont des développables (non cylindriques).

Appelons, dans ce cas, (φ), (φ') les arêtes de rebroussement de ces deux développables. Ces arêtes touchent au même point O la

génératrice commune qui est l'axe Oz ou (d) : zOy est le plan tangent commun aux deux surfaces tout du long de Oz.

Aux hypothèses $h=0$, $h_1=0$ qui caractérisent l'absence de glissement, il faut ajouter l'équation :

$$k=0. \tag{129}$$

En sorte que l'on a ici :

$$\xi'=\xi=0, \qquad \zeta'=\zeta. \tag{130}$$

Les deux mouvements $\boxed{\text{T, S}}$, $\boxed{\text{T, S}'}$ ne diffèrent que par les valeurs des rotations r et r'.

Mais les formules (88) qui fournissent les coordonnées du point P_1 donnent ici zéro pour x_1, y_1, z_1. Le point P_1 coïncide ici constamment avec le point O où les arêtes (φ), (φ'') se touchent et touchent l'axe (d). Il serait du reste bien facile de justifier *a priori* ce résultat.

Cependant, si l'on se reporte aux formules qui se rapportent au roulement sans glissement de deux axoïdes non développables, formules (120), que nous reproduisons ici :

$$x_1=0, \qquad y_1=0, \qquad z_1=k\frac{y}{x},$$

et qui donnent bien :

$$x_1=0,\ y_1=0,\ z_1=0,$$

si x, y, z étant quelconques, k devient nul, on voit que, si x s'annule en même temps que k, il peut y avoir indétermination pour z_1.

Cela s'explique aisément.

Appelons (d') la position voisine de (d) de l'axe de la rotation : (d') est une tangente à (φ) voisine de (d); les normales station-

IMPRIMERIE NATIONALE.

naires qui doivent couper à la fois (d), (d') forment ici une congruence singulière qui se compose de deux catégories de droites : les unes toutes tracées dans le plan tangent à la développable, les autres toutes issues du point O. C'est le cas singulier où les directrices d'une congruence linéaire sont tracées dans un même plan.

Si l'on se donne un point arbitraire P de l'espace, la normale stationnaire d_{P}^{nn} issue de P est donc bien la droite PO. Cependant, si le point P était pris dans le plan tangent $x = 0$, toute droite issue de P dans ce plan serait une normale stationnaire.

En excluant ce cas singulier, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Quand deux développables roulent l'une sur l'autre sans glisser, en sorte que l'axe de la rotation tangente soit leur génératrice rectiligne de contact (d), les courbes (c) douées d'enveloppe sont celles dont les plans normaux sont tangents, car ils passent par (d) à l'arête $(\mathcal{P})$ de la développable (Φ). De plus les axes de ces courbes, à un instant donné, concourent tous au point O *où les deux arêtes des développables touchent l'axe (d) de la rotation tangente.*

On voit que les axes de courbure présentent ici une propriété qui rappelle celle du centre instantané dans le mouvement d'une figure plane.

Ajoutons que, dans ce cas, f_{P}, le vecteur $\overline{\mathrm{PP}'_2}$ sont définis par les mêmes formules (124), (127) qui conviennent au cas des axoïdes généraux roulants.

§ 59.

DÉTERMINATION SANS AUCUNE INTÉGRATION DES LIGNES D'ENGRÈNEMENT DANS CE CAS.

En revanche, un fait important s'offre ici :

Les lignes d'engrènement se déterminent sans intégration lorsque les axoïdes (Φ), (Φ') sont des développantes roulantes.

Soient R, W les rayons de courbure et de torsion de la courbe (φ); R′, W′ ceux de l'arête (φ').

Le trièdre T est constitué par la tangente à la courbe (φ), (Oz), par sa normale principale Oy et sa binormale Ox. Dès lors, en vertu de résultats classiques, on a les relations suivantes (voir Darboux, *Leçons sur la géométrie des surfaces*, t. I, p. 9; et mes *Leçons de cinématique*, p. 125) :

$$(131)\quad \xi=0,\quad \eta=0,\quad \zeta=\zeta,\quad p=-\frac{\zeta}{R},\quad q=0,\quad r=\frac{\zeta}{W}.$$

Et, comme le trièdre a la même position par rapport à (φ') et vu que $\zeta'=\zeta$, $p'=p$:

$$(132)\quad \xi'=0,\quad \eta'=0,\quad \zeta'=\zeta,\quad p'=p=-\frac{\zeta}{R'},\quad q'=0,\quad r'=\frac{\zeta}{W'}.$$

On voit d'abord que la condition $p'=p$, $\zeta'=\zeta$ entraîne :

$$R'=R.$$

J'ai, du reste, analysé déjà ce mouvement remarquable dans lequel la courbe (φ') *se tord* sur la courbe (φ), sans rouler à proprement parler sur elle, puisque c'est la tangente et non une normale qui sert d'axe instantané. (Voir mes *Leçons de cinématique*, p. 210.)

Prenons pour mesure du temps l'arc s de la courbe (φ), qui est aussi l'arc de la courbe (φ'), cela revient à faire $\zeta'=\zeta=1$.

Les équations (25) des lignes d'engrènement deviennent alors :

$$(133)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{ds}=\mu y, \\ \dfrac{dy}{ds}=-\dfrac{z}{R}-\mu x, \\ \dfrac{dz}{ds}=\dfrac{y}{R}-1. \end{cases}$$

Il est à remarquer que *les torsions* W, W′ *n'interviennent pas.*

En éliminant μ, nous formerons le système d'équations différentielles :

$$(134)\qquad \begin{cases} \dfrac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{ds}=-z, \\ \dfrac{dz}{ds}=\dfrac{\gamma}{\mathrm{R}}-1. \end{cases}$$

Posons alors, u étant une fonction quelconque de s,

$$(135)\qquad x^2+y^2+z^2=2u.$$

Les équations (134) donnent :

$$(136)\qquad \begin{cases} z=-\dfrac{du}{ds}, \\ y=\mathrm{R}\left(1+\dfrac{dz}{ds}\right)=\mathrm{R}\left(1-\dfrac{d^2u}{ds^2}\right). \end{cases}$$

Les équations (135), (136) définissent ainsi x, y, z en fonction de s, au moyen d'une fonction arbitraire u de s.

§ 60.

PREMIER EXEMPLE.

Prenons, par exemple :

$$(137)\qquad u=\frac{s^2}{2}-as+b,$$

où a, b sont deux constantes arbitraires. Les formules (135), (136) donnent ici :

$$(138)\qquad x=\sqrt{2b-a^2},\qquad y=0,\qquad z=a-s.$$

La ligne (ε) est ici une parallèle à Oz ou (d) dans le plan zOx, plan rectifiant des arêtes (φ), (φ'); il est visible que le plan Λ, mené par la droite (ε) parallèle au plan zOy tangent à la développable (Φ), à une distance constante de ce plan zOy, enveloppe dans les corps S et S′ deux développables (Σ), (Σ') parallèles à (Φ) et (Φ'), et (ε) est la droite de contact des développables (Σ), (Σ') avec le plan Λ.

Nous allons montrer que le point M, défini par les équations (138), décrit dans S et dans S′ deux lignes (e), (e') conjuguées et qui sont des lignes de courbure des surfaces (Σ), (Σ').

Cherchons en effet la vitesse du point M dans son mouvement dans le corps S; ses projections, s désignant le temps, sont égales à :

$$\frac{dx}{ds}-\frac{y}{W},\qquad \frac{dy}{ds}+\frac{x}{W}+\frac{z}{R},\qquad 1-\frac{y}{R}+\frac{dz}{ds},$$

c'est-à-dire, tous calculs faits, en tenant compte des équations (138):

$$0,\qquad \frac{\sqrt{2b-ar}}{W}+\frac{a-s}{R},\qquad 0.$$

Sa vitesse est donc parallèle à Oy; ce qui veut dire que la courbe (e) est tracée sur la surface (Σ), puisque sa vitesse est constamment dans le plan tangent Λ à cette surface et, en second lieu, qu'elle est aussi normale à la génératrice (ε). Ainsi le lieu (e) de M dans le corps S est bien une ligne de courbure de la surface (Σ). Même démonstration pour la courbe (e'), lieu de M dans le corps S′; (e') est une ligne de courbure de la surface (Σ'). Les courbes (e), (e') ont une même tangente, à savoir la parallèle à Oy, et sont bien dès lors tangentes entre elles, c'est-à-dire conjuguées.

§ 61.

SECOND EXEMPLE.

Prenons encore :

$$u = \frac{a^2}{2}, \tag{139}$$

où a désigne une constante. On aura :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2u = a^2, \\ y = \mathrm{R}, \\ z = 0. \end{cases} \tag{140}$$

On trouve donc comme courbes d'engrènement tous les cercles décrits dans le plan xOy autour du point O comme centre.

On obtient sur ce cercle le (ou les) point M où se fait le contact en coupant ce cercle qui est tracé dans le plan normal commun aux courbes (φ), (φ') par l'axe de courbure commun à ces deux courbes.

Cherchons la vitesse du point M dans son mouvement par rapport à S, les projections auront comme expressions, comme on l'a déjà vu :

$$\frac{dx}{ds} - \frac{y}{\mathrm{W}}, \qquad \frac{dy}{ds} + \frac{x}{\mathrm{W}} + \frac{z}{\mathrm{R}}, \qquad \frac{dz}{ds} + 1 - \frac{y}{\mathrm{R}},$$

et, en tenant compte des équations (140), ces expressions se réduisent à :

$$-\left(\frac{1}{\mathrm{W}} + \frac{1}{x}\frac{d\mathrm{R}}{ds}\right)\mathrm{R}, \qquad \left(\frac{1}{\mathrm{W}} + \frac{1}{x}\frac{d\mathrm{R}}{ds}\right)x, \qquad 0.$$

Comme R est l'y du point M, ces projections sont proportionnelles à :

$$-y, \qquad x, \qquad 0.$$

La tangente à la courbe (e) est donc celle du cercle (ε) lui-même. De même pour (e').

On est ici dans le cas assez exceptionnel où la ligne d'engrènement est tangente aux courbes (e), (e') elles-mêmes.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Soient (Φ), (Φ') *deux développables qui roulent l'une sur l'autre sans glisser de façon que leurs arêtes* (φ), (φ') *soient constamment tangentes en ayant à chaque instant même plan osculateur et même axe de courbure. Considérons, dans le plan normal commun à ces courbes, un cercle* (ε) *de rayon constant ayant pour axe la tangente commune aux deux arêtes* (φ), (φ'), *et soient* M, M' *les points de rencontre du cercle* (ε) *avec l'axe de courbure commun aux arêtes* (φ), (φ'). *Si l'on considère le mouvement du cercle* (ε) *dans le corps* S, *dont* (Φ) *est solidaire, ce cercle enveloppe deux courbes* (e) *qu'il touche aux points* M, M'.

Dans son mouvement dans le corps S', *le même cercle* (ε) *enveloppe de même deux courbes* (e') *qu'il touche aux mêmes points* M, M' *en sorte que ces deux courbes* (e') *sont respectivement conjuguées des deux courbes* (e) *précédentes.*

En faisant varier le rayon du cercle (ε), on obtiendra deux familles infinies de couples de courbes conjuguées.

§ 62.

TROISIÈME EXEMPLE.

On peut généraliser ce résultat en prenant :

$$u = bs + \frac{a^2}{2}. \tag{141}$$

qui donne :

$$(142)\qquad \begin{cases} x^2+y^2+z^2=2bs+a^2, \\ y=\mathrm{R}, \qquad z=-b. \end{cases}$$

Considérons le plan $z=-b$, parallèle et à distance constante du plan normal aux courbes (φ), (φ'). Dans ce plan prenons le cercle Ω ayant Oz [ou (d)] pour axe, pour rayon :

$$\sqrt{2bs+a^2-b^2},$$

ce cercle Ω coupe en deux points M, M′ le plan parallèle au plan rectifiant mené par l'axe de courbure des courbes (φ), (φ'). Ce sont ces points dont les coordonnées sont données par les équations (142).

Nous savons qu'ils doivent engendrer chacun une courbe (e) dans S, une courbe (e') dans S′ et que ces deux courbes sont conjuguées.

Cherchons les vitesses de l'un de ces points M dans le corps S.

Nous partons encore des expressions :

$$\frac{dx}{ds}-\frac{y}{\mathrm{W}}, \qquad \frac{dy}{ds}+\frac{x}{\mathrm{W}}+\frac{z}{\mathrm{R}}, \qquad \frac{dz}{ds}+1-\frac{y}{\mathrm{R}}.$$

En tenant compte encore des équations (142), nous trouvons, pour ces quantités, les expressions suivantes :

$$-\mathrm{R}\left(\frac{1}{\mathrm{W}}+\frac{1}{x}\frac{d\mathrm{R}}{ds}-\frac{b}{\mathrm{R}x}\right), \qquad x\left(\frac{1}{\mathrm{W}}+\frac{1}{x}\frac{d\mathrm{R}}{ds}-\frac{b}{\mathrm{R}x}\right), \qquad 0,$$

les projections de la vitesse de M sont donc proportionnelles à $-\mathrm{R}$, x, 0, c'est-à-dire, puisque $y=\mathrm{R}$, proportionnelles à $-y$, x, 0. La vitesse est donc encore ici tangente à ce cercle variable Ω.

Le résultat précédemment établi peut donc être étendu à ce

cercle variable Ω, ce qui nous donne deux familles doublement infinies de couples de courbes conjuguées.

Nous réservons, pour un autre travail, d'autres déductions que nous pourrions tirer de la méthode générale qui précède.

Actuellement, pour suivre le développement des idées générales que nous avons exposées en ce Mémoire, il nous reste à montrer comment les cas classiques, les seuls étudiés jusqu'ici, peuvent être rattachés au cas général et quelle place ils tiennent dans l'ensemble.

IMPRIMERIE NATIONALE.

CHAPITRE IX.

CAS OÙ LES SURFACES QUI VIRENT SONT DES CYLINDRES, AVEC OU SANS GLISSEMENT.

§ 63.

CHOIX DES COORDONNÉES DANS CE CAS SPÉCIAL. VALEUR DES ROTATIONS. — ÉQUATIONS FONDAMENTALES.

Nous conserverons pour axe Oz l'axe (d) du mouvement hélicoïdal; ici l'origine O reste arbitraire, nous serons toujours libres de la déterminer selon les convenances. Le plan tangent commun aux deux cylindres sera toujours le plan zOy et zOx le plan normal.

Puisque Oy est la normale au cylindre (Φ) en O, on a $\xi = 0$; puis $p = 0$, $q = 0$, attendu que Oz est l'axe instantané pour le mouvement du cylindre.

On a, en définitive, pour les deux mouvements $\boxed{\text{T, S}}$, $\boxed{\text{T, S}'}$:

$$(143)\quad \begin{cases} \xi = 0, & \eta, & \zeta, & p = 0, & q = 0, & r, \\ \xi' = 0, & \eta', & \zeta', & p' = 0, & q' = 0, & r'. \end{cases}$$

De plus, si l'on cherche les éléments du mouvement hélicoïdal tangent au mouvement $\boxed{\text{S, S}'}$, on trouve naturellement :

$$\xi' - \xi, \quad \eta' - \eta, \quad \zeta' - \zeta, \quad p' - p, \quad q' - q, \quad r' - r,$$

et pour que Oz soit l'axe de ce mouvement, il faut et il suffit que l'on ait :

$$(144)\qquad \xi'-\xi=0,\quad \eta'-\eta=0,\quad p'-p=0,\quad q'-q=0,$$

et le pas du mouvement est alors donné par le quotient :

$$(145)\qquad h=\frac{\zeta'-\zeta}{r'-r}.$$

Les conditions (144) n'introduisent qu'une équation nouvelle :

$$(146)\qquad \eta'=\eta.$$

En définitive, les projections de la vitesse d'un point $M(x, y, z)$ dans son mouvement par rapport à S seront :

$$(147)\qquad \begin{cases} v_x=-ry+\dfrac{dx}{dt}, \\ v_y=\eta+rx+\dfrac{dy}{dt}, \\ v_z=\zeta+\dfrac{dz}{dt}. \end{cases}$$

$$(148)\qquad \begin{cases} v'_x=-r'y+\dfrac{dx}{dt}, \\ v'_y=\eta+r'x+\dfrac{dy}{dt}, \\ v'_z=\zeta'+\dfrac{dz}{dt}. \end{cases}$$

Si l'on exprime que les courbes (e), (e') décrites par le point M dans S et dans S′ sont tangentes, on trouve :

$$-r'y+\frac{dx}{dt}=\lambda\left(-ry+\frac{dx}{dt}\right),$$
$$\eta+r'x+\frac{dy}{dt}=\lambda\left(\eta+rx+\frac{dy}{dt}\right),$$
$$\zeta'+\frac{dz}{dt}=\lambda\left(\zeta+\frac{dz}{dt}\right).$$

ou encore :

$$(149)\qquad \begin{cases} (1-\lambda)\dfrac{dx}{dt} = (r'-\lambda r)\,y, \\ (1-\lambda)\dfrac{dy}{dt} = -(r'-\lambda r)\,x, \\ (1-\lambda)\dfrac{dz}{dt} = \lambda\zeta - \zeta'. \end{cases}$$

On pose alors :

$$(150)\qquad \mu = \frac{r'-r\lambda}{1-\lambda}.$$

$$(151)\qquad e = \frac{r\zeta'-r'\zeta}{r-r'} = hr-\zeta = hr'-\zeta',$$

et il vient :

$$(152)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \mu y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -\mu x - \eta, \\ \dfrac{dz}{dt} = e - h\mu. \end{cases}$$

Ces équations remplacent les équations (25) du n° 17, elles définissent les courbes d'engrènement.

Dans ce cas, une seule quadrature permet de trouver non seulement toutes les courbes d'engrènement, mais encore la loi du mouvement du point M sur la courbe d'engrènement qu'il décrit.

§ 64.

RECHERCHE DES AXES DE COURBURE.

L'équation du plan normal Π_P est comme dans le cas général :

$$(153)\qquad -y\mathrm{X} + x\mathrm{Y} + h(\mathrm{Z}-z) = 0,$$

si l'on cherche son enveloppe dans le corps S, en suivant la méthode déjà exposée au numéro 33, on trouve :

$$(154) \qquad -\eta(X-x)-\frac{dh}{dt}(Z-z)+(r-\mu)(xX+yY+h^2)=0$$

pour l'équation d'un plan qui coupe le plan normal suivant l'axe de courbure qui est sa caractéristique. Introduisons l'arc $d\sigma$ de la section droite du cylindre roulant (Φ), en posant :

$$(155) \qquad d\sigma=\eta dt,$$

en sorte que, à cause de $\eta'=\eta$, $d\sigma$ est aussi l'élément de l'arc de la section droite du cylindre (Φ').

En prenant σ comme variable indépendante, nous poserons :

$$(156) \qquad h_1=\frac{dh}{d\sigma}=\frac{dh}{\eta dt},$$

et aussi :

$$(157) \qquad \rho=\frac{r-\mu}{\eta}.$$

Alors l'équation (154) s'écrit :

$$(158) \qquad -(X-x)-h_1(Z-z)+\rho(xX+yY+h^2)=0.$$

De même pour le mouvement dans le corps S', nous trouverons pour la caractéristique du plan normal l'équation auxiliaire, analogue à (158) :

$$(159) \qquad -(X-x)-h_1(Z-z)+\rho'(xX+yY+h^2)=0,$$

en ayant posé :

$$\rho' = \frac{r' - \mu}{\eta}. \tag{160}$$

On reproduit alors la même marche que dans le cas général.

Les axes de courbure forment un faisceau dans le plan normal. Le centre P_1 de ce faisceau, le point associé au point $P(x, y, z)$, satisfait aux trois équations :

$$\left\{\begin{aligned} -y\mathrm{X} + x\mathrm{Y} + h(\mathrm{Z} - z) &= 0, \\ \mathrm{X} - x + h_1(\mathrm{Z} - z) &= 0, \\ x\mathrm{X} + y\mathrm{Y} + h^2 &= 0. \end{aligned}\right. \tag{161}$$

Les deux premières équations représentent la normale stationnaire d_P^{nn} issue de P.

Ici la congruence des normales stationnaires a une directrice à l'infini, car ces droites sont toutes parallèles au plan

$$\mathrm{X} + h_1\mathrm{Z} = 0; \tag{162}$$

la droite l_0 à l'infini de ce plan est une première directrice.

La seconde directrice l_0' est à distance finie, c'est la droite

$$\mathrm{X} = 0, \qquad \mathrm{Y} = -\frac{h}{h_1}. \tag{163}$$

La première et la dernière des équations (161) définissent d_P, c'est la conjuguée de t_P dans le complexe $\mathcal{C}$, lieu des normales, comme dans le cas général.

La dernière des équations (161) exprime que P, P_1 sont conjugués dans le cylindre $H = 0$, où

$$H = x^2 + y^2 + h^2.$$

Ce sont les circonstances du cas général.

§ 65.

CORRESPONDANCE ENTRE POINTS ASSOCIÉS. HOMOGRAPHIE DES AXES DE COURBURE. — LE VECTEUR $\overline{PP'_2}$.

La correspondance entre les points P, P_1, qui est encore ici manifestement symétrique, est encore cubique par le fait du numérateur de z_1; on a en effet :

$$(164)\qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{hx(y-hh_1)}{h_1H+h(y-hh_1)}, \\ y_1 = \dfrac{hy(y-hh_1)-hH}{h_1H+h(y-hh_1)}, \\ z_1 = \dfrac{hz(y-hh_1)+(x+h_1z)H}{h_1H+h(y-hh_1)}. \end{cases}$$

La correspondance homographique est analogue à celle du cas général. Si l'on cherche le vecteur constant $\overline{\Delta\Delta'}$ intercepté par les axes conjugués δ, δ' sur la parallèle d'_P à d_P issue de P, on peut mettre en évidence dans la formule les courbures des sections droites des deux cylindres.

D'abord la parallèle d'_P a pour équations :

$$(165)\qquad \begin{cases} -y\mathrm{X}+x\mathrm{Y}+h(\mathrm{Z}-z)=0, \\ x(\mathrm{X}-x)+y(\mathrm{Y}-y)=0. \end{cases}$$

Si l'on place Δ en P, Δ' vient au point appelé P'_2, obtenu en coupant la droite d'_P [équations (165)] par le plan (159) où l'on suppose $\rho' = \frac{r'-r}{\eta}$, ce qui donne l'équation :

$$(166)\qquad -(\mathrm{X}-x)-h_1(\mathrm{Z}-z)+\frac{r'-r}{\eta}(x\mathrm{X}+y\mathrm{Y}+h^2)=0,$$

qui se simplifie en vertu de la seconde des équations (165) et devient :

$$-(X-x)-h_1(Z-z)+\frac{(r'-r)}{\eta}H=0. \tag{167}$$

Il est aisé de se rendre compte que $\frac{r}{\eta}$, $\frac{r'}{\eta}$ sont les courbures des sections droites des deux cylindres :

$$\frac{r}{\eta}=\frac{1}{R},\qquad \frac{r'}{\eta}=\frac{1}{R'}. \tag{168}$$

Ces rayons doivent être comptés positivement dans le sens de la normale Ox :

La formule (167) s'écrit alors :

$$-(X-x)-h_1(Z-z)+\left(\frac{1}{R'}-\frac{1}{R}\right)H=0. \tag{169}$$

En calculant alors x_2', y_2', z_2', coordonnées du point P_2', on trouve :

$$\begin{cases} x_2'-x=\left(\frac{1}{R'}-\frac{1}{R}\right)\frac{hyH}{h_1H+h(y-hh_1)}, \\ y_2'-y=\left(\frac{1}{R'}-\frac{1}{R}\right)\frac{hxH}{h_1H+h(y-hh_1)}, \\ z_2'-z=\left(\frac{1}{R'}-\frac{1}{R}\right)\frac{(x^2+y^2)H}{h_1H+h(y-hh_1)}. \end{cases} \tag{170}$$

Ainsi le cas de deux cylindres qui virent l'un sur l'autre ne présente pas une bien grande simplification vis-à-vis du cas général.

§ 66.

CAS SPÉCIAL DU ROULEMENT SIMPLE. SIMPLIFICATIONS CONSIDÉRABLES. — AXES DE COURBURE.

Mais il en sera tout autrement si nous supposons que les cylindres, au lieu de glisser, roulent simplement l'un sur l'autre.

On peut alors prendre pour le plan xOy un plan de section droite fixe dans les deux cylindres en sorte que l'origine O a alors un déplacement nul dans le sens des génératrices dans les deux cylindres; autrement dit, on peut supposer :

$$\zeta = 0, \qquad \zeta' = 0. \tag{171}$$

Il en résulte :

$$e = 0, \qquad h = 0, \qquad h_1 = 0. \tag{172}$$

La dernière des équations (152) se réduit à :

$$\frac{dz}{dt} = 0, \tag{173}$$

qui exprime ce fait déjà prévu que, dans ce cas, les seules courbes douées d'enveloppes sont celles qui sont situées dans les plans des sections droites des cylindres.

Cependant la valeur infinie de μ laisse prise à une solution possible. Si nous nous reportons aux équations (149), (150), μ infini reviendrait à faire $\lambda = 1$; les deux premières équations donnent alors :

$$y = 0, \qquad x = 0,$$

et la dernière est identiquement vérifiée, ζ et ζ' étant nuls.

IMPRIMERIE NATIONALE.

Dans ce cas, en effet, toute courbe tracée sur l'un des cylindres a une enveloppe qui est une courbe tracée sur l'autre. C'est ce que nous avons rappelé déjà au numéro 17.

En laissant de côté les courbes tracées[1] sur les cylindres roulants, nous retrouvons donc les profils conjugués classiques dont l'étude fait l'objet ordinaire des cours de cinématique.

Le plan normal commun aux courbes (e), (e') situées dans un même plan de section droite des cylindres (Φ), (Φ') n'est autre que le plan mené par (d) [ou Oz] et le point P de contact actuel.

Son équation est évidemment :

$$-y\mathrm{X}+x\mathrm{Y}=0. \tag{174}$$

L'axe de courbure δ de la courbe (e) est parallèle à (d) [ou Oz]; le plan auxiliaire, équation (158), a une équation simplifiée qui se déduit de (158) en y supposant $h_1=0$, $h=0$, ce qui donne :

$$-(\mathrm{X}-x)+\rho(x\mathrm{X}+y\mathrm{Y})=0. \tag{175}$$

Tandis que l'axe δ' s'obtiendra en adjoignant à l'équation (174) l'équation

$$-(\mathrm{X}-x)+\rho'(x\mathrm{X}+y\mathrm{Y})=0. \tag{176}$$

Quant à ρ, ρ', vu les équations (157), (160), on a :

$$\rho'-\rho=\frac{r'-r}{\eta}. \tag{177}$$

Or, en appelant R, R' les rayons de courbure des sections droites

[1] On remarquera qu'on perd la notion de ces profils conjugués particuliers en se confinant comme on le fait habituellement à l'étude du roulement l'une sur l'autre de deux sections droites des cylindres.

du cylindre comptées positivement suivant Ox, on a déjà vu que :

$$(178) \qquad \frac{r'}{\eta} = \frac{1}{R'}, \qquad \frac{r}{\eta} = \frac{1}{R},$$

d'où l'on tire

$$(178) \qquad \rho' - \rho = \frac{1}{R'} - \frac{1}{R}.$$

Ici le complexe $\mathcal{L}$ est formé des droites qui coupent (d) [ou Oz], d_P coïncide avec (d); le point P_1 est le point à l'infini sur (d); d_P^{nn} est la parallèle à (d) issue de P.

Les axes δ, δ', passant encore par P_1, parce que parallèles à (d) dont P_1 est le point à l'infini, forment un faisceau dans le plan normal (174), mais un faisceau dont le sommet P_1 est à l'infini.

Ces axes δ, δ' vont encore se correspondre homographiquement et leur loi de correspondance sera une homographie singulière dont le rayon double sera encore d_P [c'est-à-dire (d) ici] et tout cela reproduit en somme les caractères essentiels du cas général.

Ces faits résultent, par les mêmes raisonnements produits déjà, de la forme particulière (178) de l'équation d'homographie.

§ 67.

RELATION CLASSIQUE D'EULER.

Considérons, pour nous placer dans les conditions habituelles, un plan fixe de section normale, par exemple le plan $Z = 0$, et soient C, C′ les traces sur ce plan des axes δ, δ'. Rien ne nous empêche aussi de supposer que le point P est lui aussi dans ce plan de section droite; alors C, C′ sont précisément les centres de courbure des profils conjugués (e), (e').

Désignons par X, Y les coordonnées du point C, par X′, Y′ celles du point C′ et, toujours, par x, y celles du point P.

Comme X, Y vérifient les équations (174), (175), on a :

$$(179)\qquad \begin{cases} -y\mathrm{X}+x\mathrm{Y}=0, \\ -(\mathrm{X}-x)+\rho\,(x\mathrm{X}+y\mathrm{Y})=0. \end{cases}$$

De même X′, Y′ vérifient les équations (174), (176) :

$$(180)\qquad \begin{cases} -y\mathrm{X}'+x\mathrm{Y}'=0, \\ -(\mathrm{X}'-x)+\rho'\,(x\mathrm{X}'+y\mathrm{Y}')=0. \end{cases}$$

Sur la normale contenue dans le plan Z = 0 qui est évidemment la droite OP, faisons choix d'un sens de parcours faisant avec Oy l'angle θ, et soient

$$r, \qquad r', \qquad \rho$$

les distances OC, OC′, OP prises avec leurs signes sur la normale ; on a :

$$x=\rho\sin\theta, \qquad y=\rho\cos\theta,$$
$$\mathrm{X}=r\sin\theta, \qquad \mathrm{Y}=r\cos\theta,$$
$$\mathrm{X}'=r'\sin\theta, \qquad \mathrm{Y}'=r'\cos\theta.$$

Les équations (179), (180), dont les premières de chaque groupe sont naturellement vérifiées, donnent :

$$(181)\qquad \frac{1}{\rho}-\frac{1}{r}=\frac{\rho}{\sin\theta}, \qquad \frac{1}{\rho}-\frac{1}{r'}=\frac{\rho'}{\sin\theta};$$

en retranchant il vient :

$$\frac{1}{r'}-\frac{1}{r}=-\frac{\rho'-\rho}{\sin\theta}=-\left(\frac{1}{R'}-\frac{1}{R}\right)\frac{\rho'}{\sin\theta}. \tag{182}$$

Cette équation diffère par le signe du second membre de la formule habituelle que l'on trouve écrite :

$$\frac{1}{r'}-\frac{1}{r}=\left(\frac{1}{R'}-\frac{1}{R}\right)\frac{1}{\sin\theta}.$$

Il faut observer que, eu égard au choix du sens direct pour les angles dans l'espace et dans le plan et à la discordance qui existe, comme on sait, entre ces deux choix, l'angle θ doit être changé de signe lorsque l'on passe de la considération des figures de l'espace à celles qui sont tracées dans un plan.

Remarquons encore que certains auteurs négligent d'observer la règle des signes et que, se fiant à certaines dispositions particulières de figures d'où ils tirent la démonstration, ils écrivent l'équation :

$$\frac{1}{r'}+\frac{1}{r}=\frac{1}{k\sin\theta},$$

où $\frac{1}{k}$ désigne une combinaison qui est, soit $\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}$, soit toute autre, suivant les auteurs.

Il suffit d'avoir suivi notre théorie pour se rendre compte de l'inconvénient qu'il y a à adopter une notation dictée par une disposition spéciale de la figure et de compter, dans un sens, sur la normale les distances r aux centres de courbure des courbes de l'une des figures et, dans le sens contraire, les distances r' aux centres de courbure des courbes enveloppes de la seconde figure mobile. La conséquence la plus immédiate est de faire perdre la notion de cette homographie singulière remarquable qui se conserve dans les cas les plus spéciaux comme dans le cas général.

§ 68.

CAS DU POINT FIXE.

Nous ne mentionnerons que pour mémoire le cas du mouvement autour d'un point fixe qui présente, avec le cas précédent, les plus grandes analogies. Deux cônes (Φ), (Φ') roulent alors l'un sur l'autre sans glisser. Ce cas rentre dans celui des développables roulantes (n^{os} 58 et suivants) en y supposant $\eta' = \eta = 0$, $\zeta' = \zeta = 0$. Les simplifications qui en résultent conduisent aux résultats classiques bien connus. Les seules courbes douées d'enveloppe sont naturellement les courbes tracées sur des sphères ayant leur centre au point fixe, auxquelles il faut adjoindre les courbes tracées sur les cônes roulants.

CHAPITRE X.

DÉVELOPPABLES CONJUGUÉES.

§ 69.

LE PROBLÈME DES DÉVELOPPABLES CONJUGUÉES.

Les courbes (e) solidaires d'un corps solide mobile S qui ont une enveloppe dans un mouvement donné de ce corps par rapport à un second corps solide S′, autrement dit, les couples de courbes conjuguées dans l'espace présentent comme élément dualistique les surfaces développables conjuguées, c'est-à-dire les surfaces développables solidaires du corps S qui ont chacune pour enveloppe, dans le corps S′, une développable qu'elles touchent à chaque instant le long d'une génératrice mobile rectiligne.

Ce problème n'offre pas cependant une symétrie parfaite à l'égard du premier; il est beaucoup plus facile. Cela tient à ce que les propriétés métriques euclidiennes n'obéissent pas exactement aux lois de la dualité par le fait que la base des propriétés métriques est le cercle de l'infini, c'est-à-dire une conique et non pas une quadrique générale.

Il y aura donc intérêt à entreprendre ce nouveau problème et à le traiter complètement.

§ 70.

CARACTÉRISTIQUES D'UN PLAN. COÏNCIDENCE DES DEUX CARACTÉRISTIQUES. ÉQUATIONS DU PROBLÈME.

Prenons donc un plan Ξ dont l'équation, par rapport à notre trièdre de référence T du numéro 2, sera :

$$\alpha x+\beta y+\gamma z+u=0, \tag{183}$$

α, β, γ étant es cosinus directeurs d'une normale au plan et u la distance de l'origine des coordonnées à ce plan. Nous supposons α, β, γ, u, fonctions du temps, en sorte que ce plan est mobile par rapport au trièdre T en même temps que par rapport aux corps S et S'. Dans S ce plan enveloppe une développable (ξ) et dans S' une développable (ξ'). En appliquant une méthode déjà suivie au numéro 14, nous chercherons la caractéristique de ce plan dans son mouvement dans le corps S, puis sa caractéristique dans le corps S' et nous exprimerons la coïncidence de ces deux droites.

Pour avoir la caractéristique dans le corps S on exprimera que, pour un point de cette droite, la vitesse v_x, v_y, v_z [formules (15), n° 7] de ce point par rapport à S est dans le plan Ξ, ce qui donne :

$$\alpha v_x+\beta v_y+\gamma v_z=0,$$

ou, en développant :

$$\alpha\left(\xi-ry+\frac{dx}{dt}\right)+\beta\left(rx-pz+\frac{dy}{dt}\right)+\gamma\left(\zeta+py+\frac{dz}{dt}\right)=0.$$

Or, en différentiant l'équation du plan, on trouve :

$$\alpha\frac{dx}{dt}+\beta\frac{dy}{dt}+\gamma\frac{dz}{dt}+\frac{d\alpha}{dt}x+\frac{d\beta}{dt}y+\frac{d\gamma}{dt}z+\frac{du}{dt}=0,$$

et, par soustraction, avec la précédente :

$$(184)\qquad \begin{cases} \left(\frac{d\alpha}{dt}-\beta r\right)x+\left(\frac{d\beta}{dt}+\alpha r-\gamma p\right)y+\left(\frac{d\gamma}{dt}+\beta p\right)z \\ \qquad +\frac{du}{dt}-\alpha\xi-\gamma\zeta=0. \end{cases}$$

Ce sont exactement les calculs du numéro 14. Cette équation est celle d'un plan qui coupe le plan Ξ suivant la caractéristique cherchée.

En appliquant les mêmes calculs à la caractéristique dans le corps S′, il faut changer r, ζ en r', ζ' et l'on obtient l'équation :

$$(184')\qquad \begin{cases} \left(\frac{d\alpha}{dt}-\beta r'\right)x+\left(\frac{d\beta}{dt}+\alpha r'-\gamma p\right)y \\ \qquad +\left(\frac{d\gamma}{dt}+\beta p\right)z+\frac{du}{dt}-\alpha\xi-\gamma\zeta'=0. \end{cases}$$

On exprimera les conditions du problème en écrivant que les trois plans (183), (184), (184′) appartiennent à un même faisceau, c'est-à-dire que l'on peut trouver deux multiplicateurs λ, θ tels que l'on ait :

$$\frac{d\alpha}{dt}-\beta r'=\lambda\left(\frac{d\alpha}{dt}-\beta r\right)+\theta\alpha,$$

$$\frac{d\beta}{dt}+r'\alpha-p\gamma=\lambda\left(\frac{d\beta}{dt}+r\alpha-p\gamma\right)+\theta\beta,$$

$$\frac{d\gamma}{dt}+p\beta=\lambda\left(\frac{d\gamma}{dt}+p\beta\right)+\theta\gamma,$$

$$\frac{du}{dt}-\xi\alpha-\zeta'\gamma=\lambda\left(\frac{du}{dt}-\xi\alpha-\zeta\gamma\right)+\theta u.$$

IMPRIMERIE NATIONALE.

Or, en multipliant par α, β, γ respectivement les trois premières équations, et ajoutant, on trouve :

$$\alpha\frac{d\alpha}{dt}+\beta\frac{d\beta}{dt}+\gamma\frac{d\gamma}{dt}=\lambda\left(\alpha\frac{d\alpha}{dt}+\beta\frac{d\beta}{dt}+\gamma\frac{d\gamma}{dt}\right)+\theta(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2).$$

Comme $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$, cette équation se réduit à

$$\theta=0;$$

en sorte que les équations précédentes se simplifient et se réduisent à

$$\begin{aligned}
&\frac{d\alpha}{dt}-\beta r'=\lambda\left(\frac{d\alpha}{dt}-\beta r\right),\\
&\frac{d\beta}{dt}+\alpha r'-\gamma p=\lambda\left(\frac{d\beta}{dt}+\alpha r-\gamma p\right),\\
&\frac{d\gamma}{dt}+p\beta=\lambda\left(\frac{d\gamma}{dt}+p\beta\right),\\
&\frac{du}{dt}-\xi\alpha-\zeta'\gamma=\lambda\left(\frac{du}{dt}-\xi\alpha-\zeta\gamma\right).
\end{aligned}$$

On peut écrire encore, en groupant les termes semblables :

$$\begin{aligned}
&(1-\lambda)\frac{d\alpha}{dt}=(r'-\lambda r)\beta,\\
&(1-\lambda)\left(\frac{d\beta}{dt}-\gamma p\right)=-(r'-\lambda r)\alpha,\\
&(1-\lambda)\left(\frac{d\gamma}{dt}+p\beta\right)=0,\\
&(1-\lambda)\left(\frac{du}{dt}-\xi\alpha\right)=(\zeta'-\lambda\zeta)\gamma.
\end{aligned}$$

Posons alors :

$$\mu=\frac{r'-\lambda r}{1-\lambda}.$$

ce qui exclut l'hypothèse inadmissible $1-\lambda=0$, nous trouverons, en faisant encore (n° 17) $e=\frac{r\zeta'-r'\zeta}{r'-r}$, $h=\frac{\zeta'-\zeta}{r'-r}$:

$$(185)\qquad \begin{cases} \frac{d\alpha}{dt}=\mu\beta, & \frac{d\beta}{dt}=p\gamma-\mu\alpha, \\ \frac{d\gamma}{dt}=-p\beta, & \frac{du}{dt}=\xi\alpha+(h\mu-e)\gamma. \end{cases}$$

Ces équations (185) remplacent dans ce problème les équations (25) des courbes d'engrènement. Mais leur intégration se réalise sans la moindre difficulté et par des procédés bien différents de ceux qui s'appliquent aux courbes d'engrènement.

Introduisons les angles θ, φ tels que :

$$(186)\qquad \alpha=\sin\theta\cos\varphi,\qquad \beta=\sin\theta\sin\varphi,\qquad \gamma=\cos\theta.$$

Les trois premières équations (185) se réduisent à ces deux :

$$(187)\qquad \frac{d\theta}{dt}=p\sin\varphi,$$

$$(188)\qquad \frac{d\varphi}{dt}+\mu=p\operatorname{cotg}\theta\cos\varphi.$$

La seconde de ces équations servira à définir μ; quant à la première, elle constitue la seule relation existant entre θ, φ, t. On y satisfera en prenant θ fonction du temps, et déterminant φ en fonction du temps par l'équation (187) elle-même.

Il ne restera plus qu'à déterminer u par la quadrature représentée par la dernière des équations (185).

Ainsi, la détermination générale des développables douées d'enveloppes développables dépend d'une seule quadrature. La constante additive à u s'explique, elle correspond à l'existence d'une famille de développables parallèles qui, toutes ensemble, sont douées

d'enveloppes développables qui forment elles aussi une famille de développables parallèles.

§ 71.

RÔLE DE LA CARACTÉRISTIQUE D'ENTRAÎNEMENT. HÉLICOÏDES DÉVELOPPABLES EXCEPTIONNELS.

Il ne sera pas hors de propos de chercher à nous rendre compte de la nature de cette droite caractéristique t_Ξ du plan Ξ, qui est la même dans les deux mouvements de Ξ par rapport à S et par rapport à S′, de même que, pour le cas des courbes douées d'enveloppe, une même droite t_p est tangente en P aux deux courbes (e), (e') qu'un même point décrit dans S et dans S′ respectivement (voir n° 17).

Si, dans l'équation (184), on remplace $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\beta}{dt}$, $\frac{d\gamma}{dt}$ par leurs valeurs (185), l'équation du plan (184) se simplifie et devient, après suppression du facteur $(\mu - r)$:

$$\beta x - \alpha y + h\gamma = 0. \tag{189}$$

On voit donc que la caractéristique t_Ξ est la trace du plan (189) sur le plan Ξ. Ce plan (189) est le plan polaire dans le complexe $\mathcal{L}$ du point à l'infini sur la normale au plan Ξ. Sa trace t_Ξ sur le plan Ξ est donc la droite conjuguée de la normale élevée au plan Ξ en son propre pôle.

Considérons le plan Ξ_0 de la figure S avec lequel coïncide le plan Ξ à l'instant considéré : dans le mouvement $\boxed{\text{S, S}'}$ ce plan Ξ_0 a une caractéristique qui est précisément la polaire de la normale au plan Ξ_0 en son pôle, polaire prise par rapport au complexe $\mathcal{L}$. Cette caractéristique, déjà appelée par nous *la caractéristique d'entraînement*, coïncide donc avec t_Ξ.

Ceci constitue le pendant dualistique du fait que deux courbes conjuguées (e), (e') admettent en leur point de contact actuel P une tangente commune t_P, qui porte la vitesse d'entraînement. De même ici, la droite de contact des deux développables conjuguées (ξ), (ξ') est la caractéristique d'entraînement t_Ξ de leur plan de raccordement.

On peut même introduire une notion dualistique du cône des vitesses.

Prenons un plan Ξ solidaire du corps S; à tout instant ce plan contient une droite (caractéristique d'entraînement) t_Ξ. Lorsque le mouvement s'accomplit, la droite enveloppe dans le plan Ξ une courbe (c_Ξ) qui peut servir à définir les développables (ξ) de la même façon que le cône des vitesses sert à définir les courbes (e).

Toute développable (ξ) se trouve en effet définie par la propriété que sa génératrice de contact avec chacun de ses plans tangents Ξ est une tangente à la courbe (c_Ξ) afférente au plan Ξ.

La réciproque est-elle vraie? La question est analogue à celle que nous avons posée au n° 9 à propos des courbes douées d'enveloppe et la réponse décèle encore un cas exceptionnel. Si une développable (φ) admet pour génératrice g une tangente de la courbe c_Ξ afférente à son plan tangent Ξ, à chaque plan Ξ correspond une valeur t du temps, à savoir celle qui fixe l'époque où g est la caractéristique d'entraînement du plan Ξ. Si t varie d'un plan Ξ à l'autre, la surface (φ) est une de nos développables douées d'enveloppe développable.

Mais si t est le même pour tous les plans Ξ, la surface (φ) est un hélicoïde développable ayant pour arête une hélice exceptionnelle et que l'on peut qualifier lui-même d'hélicoïde développable exceptionnel.

Lorsque nous traiterons des surfaces intégrales au chapitre XII, nous aurons occasion de revenir sur cette question et d'établir le lien étroit qui existe entre les cônes Γ_P et les courbes planes (c_Ξ).

§ 71 *bis*.

TRIÈDRE LIÉ À L'ARÊTE DE LA DÉVELOPPABLE (ξ). PROPRIÉTÉ REMARQUABLE DES ARÊTES DES DÉVELOPPABLES DOUÉES D'ENVELOPPE.

Nous allons compléter présentement les résultats précédents en établissant la position du trièdre lié à l'arête de l'une ou l'autre des développables (ξ), (ξ').

A tout point d'une courbe gauche est lié un trièdre trirectangle constitué par la binormale, la tangente et la normale principale.

Ce qui précède va nous permettre de déterminer les neuf cosinus directeurs de ce trièdre pour l'arête de rebroussement de (ξ). Nous connaissons déjà par les formules (186) les expressions de α, β, γ, cosinus de la bi-normale, liés d'ailleurs par la relation (187).

Comme, en vertu de ce qui précède, t_Ξ est la génératrice de la développable (ξ) ou la tangente à son arête, les cosinus α_1, β_1, γ_1 de t_Ξ seront fournis par les équations des deux plans qui déterminent t_Ξ, savoir :

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + u = 0,$$

$$\beta x - \alpha y + h\gamma = 0.$$

On a donc :

$$\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 = 0,$$

$$\beta\alpha_1 - \alpha\beta_1 = 0.$$

d'où :

$$\frac{\alpha_1}{\alpha} = \frac{\beta_1}{\beta} = \frac{\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{-\gamma\gamma_1}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{\gamma_1}{-\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\gamma}}.$$

En introduisant les angles θ, φ qui servent à exprimer α, β, γ [formules (186)], on trouve :

$$(190)\qquad \alpha_1 = \cos\theta\cos\varphi, \qquad \beta_1 = \cos\theta\sin\varphi, \qquad \gamma_1 = -\sin\theta.$$

On calculera ensuite α_2, β_2, γ_2 cosinus directeurs de la normale principale par la double condition :

$$\alpha\alpha_2+\beta\beta_2+\gamma\gamma_2=0, \qquad \alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2=0,$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = +1.$$

Ce qui donne :

$$(191)\qquad \alpha_2 = -\sin\varphi, \qquad \beta_2 = \cos\varphi, \qquad \gamma_2 = 0.$$

Ainsi : *toutes les arêtes des développables douées d'une enveloppe développable ont leur normale principale rectangulaire avec l'axe du mouvement hélicoïdal tangent.*

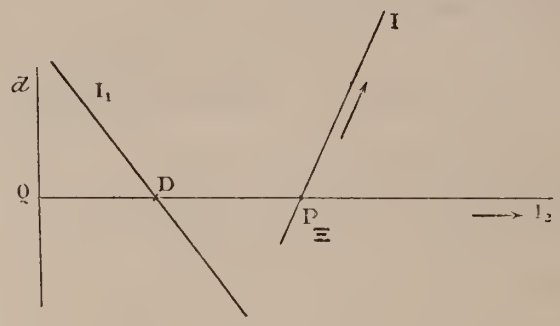
Appelons I le point à l'infini sur la normale au plan Ξ, I_1 le point à l'infini sur la droite t_Ξ, I_2 le point à l'infini sur la normale principale; ces trois directions sont celles des arêtes du trièdre lié à l'arête de la développable (ξ).

Nous pouvons réaliser une représentation très simple de ces trois directions.

Appelons Q le point où le plan Ξ coupe l'axe (d) du mouvement hélicoïdal tangent; le pôle P_Ξ du plan Ξ dans le complexe $\mathcal{L}$ est sur la perpendiculaire élevée à (d) dans le plan Ξ.

Au point P_Ξ, élevons la perpendiculaire au plan Ξ, le point I est à l'infini sur cette perpendiculaire.

Cette normale $P_\Xi I$ a pour conjuguée la droite DI_1, tracée dans le plan Ξ, le point I_1 est le point à l'infini de cette droite; elle coupe à angle droit la droite QP_Ξ. C'est la caractéristique t_Ξ elle-même. Enfin la droite QP_Ξ, qui coupe à angle droit les deux droites précédentes, a I_2 comme point à l'infini. Elle est parallèle à la normale principale.



On peut faire ici la remarque que, si l'on substitue au plan Ξ un plan parallèle, toute la configuration précédente se déplace à la façon d'un corps solide, et, de même, si on imprime à Ξ une rotation autour de l'axe (d) du mouvement hélicoïdal.

§ 72.

CORRESPONDANCE ENTRE LES POINTS DE CONTACT AVEC LA CARACTÉRISTIQUE DES ARÊTES DES COUPLES DE DÉVELOPPABLES CONJUGUÉES. — NOUVELLE INTERVENTION D'UNE HOMOGRAPHIE SINGULIÈRE. — DÉTERMINATION DU POINT DOUBLE.

Il nous est présentement facile d'étudier une question qui est la contre-partie de la distribution des plans osculateurs dans les courbes douées d'enveloppe, à savoir, la distribution dans les développables conjuguées des points de contact de la caractéristique avec les arêtes.

Considérons les couples des surfaces développables conjuguées (ξ), (ξ'), qui ont au même instant le même plan Ξ de raccordement et se touchent naturellement suivant la caractéristique d'entraînement t_Ξ de ce plan. Les arêtes a_ξ, $a_{\xi'}$ de ces développables touchent la caractéristique t_Ξ en deux points M_ξ, $M_{\xi'}$ qui se correspondent et varient simultanément suivant une loi qu'il s'agit de déterminer.

Notons en passant que les trièdres liés à ces deux arêtes a_ξ, $a_{\xi'}$ s'obtiendront en menant par M_ξ, $M_{\xi'}$ les parallèles aux directions déjà définies par les points à l'infini I, I_1, I_2.

La trajectoire du point M_ξ dans le corps S est la courbe a_ξ dont t_Ξ est la tangente. Or t_Ξ est l'intersection du plan Ξ avec le plan polaire du point I dans le complexe $\mathcal{L}$. Appelons Ξ_I ce plan auxiliaire. Pour tout point M de t_Ξ, puisque t_Ξ est la caractéristique, la vitesse de M sera dans le plan Ξ. La vitesse de M_ξ, en particulier, doit être dirigée elle-même suivant t_Ξ; il suffira donc d'exprimer que cette vitesse est contenue aussi dans le plan Ξ_I, qui a pour équation, comme on sait :

$$\beta x - \alpha y + h\gamma = 0.$$

Il faut donc avoir :

$$\beta v_x - \alpha v_y = 0. \tag{192}$$

Or, en différentiant l'équation $\beta x - \alpha y + h\gamma = 0$, on trouve :

$$\beta \frac{dx}{dt} - \alpha \frac{dy}{dt} + x\frac{d\beta}{dt} - y\frac{d\alpha}{dt} + h\frac{dy}{dt} + h'\gamma = 0,$$

c'est-à-dire, eu égard aux équations (185) :

$$\beta \frac{dx}{dt} - \alpha \frac{dy}{dt} + x(p\gamma - \mu\alpha) - \mu\gamma\beta - ph\beta + h'\gamma = 0.$$

IMPRIMERIE NATIONALE.

En retranchant cette équation de l'équation (192), il viendra :

$$\beta\left(v_x-\frac{dx}{dt}\right)-\alpha\left(v_y-\frac{dy}{dt}\right)-x(p\gamma-\mu\alpha)+\mu\gamma\beta+ph\beta-h'\gamma=0,$$

et comme [formules (15), n° 7] :

$$v_x=\frac{dx}{dt}+\xi-ry, \qquad v_y=\frac{dy}{dt}+rx-pz,$$

il viendra :

$$\beta(\xi-ry)-\alpha(rx-pz)-x(p\gamma-\mu\alpha)+\mu\gamma\beta+ph\beta+ph_1\gamma=0,$$

en se rappelant que $h'=\frac{dh}{dt}=-ph_1$.

En divisant par p et posant :

$$\rho=\frac{r-\mu}{p}, \tag{193}$$

cette équation devient :

$$\gamma x-\alpha z+(k-h)\beta-h_1\gamma+\rho(\alpha x+\beta y)=0. \tag{194}$$

C'est l'équation d'un plan qui coupe la droite t_Ξ au point M_ξ.

En faisant de même pour le corps S′ et l'arête $a_{\xi'}$ de la développable (ξ'), nous trouverons, après avoir posé

$$\rho'=\frac{r'-\mu}{p}, \tag{195}$$

que le point $M_{\xi'}$ se trouve à l'intersection de la droite t_Ξ avec le plan :

$$\gamma x-\alpha z+(k-h)\beta-h_1\gamma+\rho'(\alpha x+\beta y)=0. \tag{196}$$

Ces deux plans font partie d'un même faisceau défini par les deux plans particuliers :

$$(197)\qquad \begin{cases} \alpha x+\beta y=0, \\ \gamma x-\alpha z+(k-h)\beta-h_1\gamma=0. \end{cases}$$

Le premier des plans (197) n'est autre chose que le plan passant par l'axe (d) du mouvement hélicoïdal tangent et par la perpendiculaire commune à cet axe et à la droite t_Ξ : c'est aussi le plan mené par l'axe (d) et le pôle P_Ξ du plan Ξ dans le complexe $\mathcal{L}$. Son propre pôle est le point à l'infini I_2. Le second plan se définit simplement au moyen du complexe auxiliaire $\mathcal{L}_1$ déjà défini au numéro 15. Ce plan est en effet le plan polaire dans le complexe $\mathcal{L}_1$ du point I à l'infini sur la normale au plan Ξ.

Quand on prend pour μ diverses déterminations, en conservant toujours la même position actuelle du plan Ξ, on obtient les divers couples de surfaces développables conjuguées (ξ), (ξ') qui se touchent entre elles suivant t_Ξ et suivant le plan Ξ. Or, en éliminant μ entre les équations (193), (195), on trouve, entre les paramètres ρ, ρ' des plans (194), (196), la relation :

$$(198)\qquad \rho'-\rho=\frac{r'-r}{p}.$$

Cette équation caractérise encore *une correspondance homographique à éléments doubles coïncidants.* L'élément double unique correspond à $\rho=\infty$.

Ainsi :

La correspondance entre les points M_ξ, $M_{\xi'}$ *où les arêtes des couples de développables conjuguées touchent la caractéristique* t_Ξ *est une correspondance homographique à points doubles coïncidants.*

Le point double qui correspond à $\rho = \infty$ résulte de l'intersection de la caractéristique t_Ξ avec le plan $\alpha x + \beta y = 0$. Ce point est donc le point D, pied de la perpendiculaire commune à l'axe (d) et à la caractéristique t_Ξ. C'est aussi le pied de la perpendiculaire abaissée du pôle P_Ξ du plan Ξ dans le complexe $\mathcal{L}$, sur la caractéristique t_Ξ de ce même plan. Il est très aisé de calculer les coordonnées de ce point D au moyen des angles θ, φ; on trouve :

$$(199) \qquad x_D = -h \operatorname{cotg}\theta \sin\varphi, \qquad y_D = h \operatorname{cotg}\theta \cos\varphi.$$

$$z_D = -\frac{u}{\cos\theta}.$$

§ 73.

FORME MÉTRIQUE DE LA CORRESPONDANCE HOMOGRAPHIQUE.

Ceci permet de donner une forme métrique spéciale à la relation qui existe entre M_ξ, $M_{\xi'}$.

Soient l, l' les distances DM_ξ et $DM_{\xi'}$ prises avec leurs signes sur l'axe t_Ξ qui a comme cosinus directeurs α_1, β_1, γ_1, c'est-à-dire, ainsi qu'on l'a vu :

$$\alpha_1 = \cos\theta\cos\varphi, \qquad \beta_1 = \cos\theta\cos\varphi, \qquad \gamma_1 = -\sin\theta.$$

La droite t_Ξ est alors représentable par les équations

$$x = x_D + \alpha_1 l, \qquad y = y_D + \beta_1 l, \qquad z = z_D + \gamma_1 l,$$

et, en la coupant par le plan (194), on trouve l'équation :

$$(200) \qquad \rho l \sin\theta\cos\theta + l\cos\varphi + \Psi = 0,$$

où l'on a posé :

$$(201) \qquad \Psi = u \operatorname{tg}\theta \cos\varphi - h\frac{\sin\varphi}{\sin\theta} - h_1 \cos\theta + k \sin\theta \sin\varphi.$$

De même, en coupant la droite t_Ξ par le plan (196), on obtiendra :

$$(200') \qquad \rho' l' \sin\theta \cos\theta + l' \cos\varphi + \Psi = 0,$$

d'où l'on déduit, par soustraction de (200), après divisions respectives par l et par l' :

$$(\rho' - \rho)\sin\theta\cos\theta + \Psi\left(\frac{1}{l'} - \frac{1}{l}\right) = 0,$$

et comme

$$\rho' - \rho = \frac{r' - r}{p},$$

il viendra, en définitive :

$$(202) \qquad \frac{1}{l'} - \frac{1}{l} = -\frac{r' - r}{p}\frac{\sin\theta\cos\theta}{\Psi},$$

formule qui doit frapper, par son analogie, avec celle qui a trait aux courbures.

On observera que Ψ est formé linéairement au moyen de quatre quantités irréductibles u, h, h_1, k. Des simplifications se produiront s'il y a, à chaque instant, une rotation tangente $h = 0$, $h_1 = 0$ et si les axoïdes roulants sont des développables $k = 0$.

§ 74.

RAPPROCHEMENT AVEC DES RÉSULTATS DÉJÀ OBTENUS À L'OCCASION DES COUPLES DE COURBES CONJUGUÉES. — NOUVELLE INTERVENTION DES CORPS AUXILIAIRES.

Nous devons actuellement entreprendre certains rapprochements entre les résultats obtenus au cours de ce chapitre et ceux que nous avons rencontrés à propos des courbes douées d'enveloppes.

Aux numéros 20, 21, 22, nous avons interprété les équations des courbes d'engrènement en montrant que, si l'on considère un point M dont les coordonnées vérifient les équations (25)

$$\frac{dx}{dt}=-\xi+\mu y, \qquad \frac{dy}{dt}=pz-\mu x, \qquad \frac{dz}{dt}=-py+e-h\mu,$$

ce point M se trouvait solidaire d'un corps mobile que nous avons appelé S_μ, tel que dans le mouvement $\boxed{T, S_\mu}$ les rotations aient pour expressions [voir formules (30), n° 20, mais je remplace l'indice 1 par l'indice μ] :

$$\xi_\mu=\xi, \qquad \eta_\mu=0, \qquad \zeta_\mu=h\mu-e,$$
$$p_\mu=p, \qquad q_\mu=0, \qquad r_\mu=\mu.$$

Le corps S, d'après ces notations, devrait s'appeler S_r et le corps S', $S_{r'}$ ainsi qu'on l'a déjà fait observer.

Le mouvement $\boxed{S_\mu, S}$ a un mouvement hélicoïdal tangent d'axe (d), de pas h, mais de vitesse angulaire $r-\mu$ et plus généralement on peut dire que le mouvement relatif $\boxed{S_\lambda, S_\mu}$ de deux corps S_λ, S_μ admet comme mouvement hélicoïdal tangent un mouvement d'axe (d), de pas h, avec la vitesse angulaire $\mu-\lambda$.

Reste à savoir si la description des développables conjuguées se prête à la même interprétation.

Pour nous en rendre compte, considérons un point M lié au corps S_λ et dont les coordonnées x, y, z vérifient les équations (25) qui s'écrivent ici :

$$\frac{dx}{dt} = -\xi + \lambda y, \qquad \frac{dy}{dt} = pz - \lambda x, \qquad \frac{dz}{dt} = -px + e - h\lambda.$$

Prenons ensuite un plan Ξ dont les coordonnées vérifient les équations

$$\frac{d\alpha}{dt} = \mu\beta, \qquad \frac{d\beta}{dt} = p\gamma - \mu\alpha, \qquad \frac{d\gamma}{dt} = -p\beta, \qquad \frac{du}{dt} = \xi\alpha + (h\mu - e)\gamma.$$

Le point M engendre ainsi dans S et S′ un couple de courbes conjuguées (e), (e'); le plan Ξ engendre dans S, S′ un couple de développables conjuguées (ξ), (ξ').

La distance du point M au plan Ξ a pour expression :

$$\Delta = \alpha x + \beta y + \gamma z + u. \tag{203}$$

Nous allons former l'expression $\frac{d\Delta}{dt}$, en tenant compte des équations auxquelles sont assujetties les fonctions du temps x, y, z, α, β, γ, u.

Un calcul simple fournit le résultat :

$$\frac{d\Delta}{dt} = (\mu - \lambda)(\beta x - \alpha y + h\gamma). \tag{204}$$

Dès lors apparaît ce résultat que si $\mu = \lambda$, on a $\frac{d\Delta}{dt} = 0$ et Δ est constant.

Ainsi, si l'on considère tous les plans Ξ qui engendrent des couples de développables conjuguées et pour lesquels le paramètre μ

a la détermination $\mu = \lambda$, tous ces plans sont chacun à une distance constante des points M solidaires du corps S_λ; cela veut dire qu'ils sont *eux aussi* solidaires de ce corps S_λ.

De la sorte, la signification de la fonction λ peut être étendue des courbes trajectoires des points du corps S_λ aux développables enveloppes des plans solidaires de ce même corps. Se donner $\mu = \lambda$ revient à envisager un plan Ξ solidaire du corps S_λ dans la génération des couples de développables conjuguées, de même que cela revient à se donner un point solidaire de S_λ dans la génération des couples de courbes conjuguées.

Ainsi se trouvent complétés les résultats acquis aux numéros 20 et suivants.

Nous savons que les divers corps S (ou S_r), S' (ou $S_{r'}$), S_λ, S_μ, etc., ont, dans leur mouvement relatif, la même vis comme support de leur mouvement hélicoïdal tangent [axe (d), pas h] mais qu'ils diffèrent par l'expression de la rotation, par exemple $(\lambda - \mu)$ dans le mouvement $\boxed{S_\mu, S_\lambda}$ de S_μ par rapport à S_λ. Il faut en conclure que les vitesses d'entraînement ont la même direction dans tous ces corps (normale au plan polaire du point décrivant dans le complexe $\mathcal{L}$) et que les caractéristiques d'un même plan Ξ coïncident (droite conjuguée dans $\mathcal{L}$ de la normale au plan Ξ en son pôle).

Ces remarques sont bien évidentes d'après ce qui précède, mais, vu l'importance qu'elles ont et auront encore plus loin, il n'était pas mauvais de les rappeler expressément.

CHAPITRE XI.

DES COURBES DOUÉES D'ENVELOPPE QUI SONT TRACÉES SUR UNE SURFACE.

§ 75.

COURBE DE CONTACT D'UNE SURFACE AVEC SA CONJUGUÉE. PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE.

Si l'on prend une surface (F) solidaire du corps S, cette surface enveloppe dans le corps S′ une surface conjuguée (F′) qu'elle touche à tout instant t suivant une certaine *courbe de contact* (γ).

On pourrait appeler cette courbe la caractéristique, mais comme nous aurons à examiner plus loin des équations aux dérivées partielles du premier ordre, il vaut mieux conserver cette locution pour les courbes caractéristiques de ces équations.

La courbe de contact (γ) varie à la fois sur (F) et sur (F′), avec le temps, en sorte que par tout point soit de (F), soit de (F′) il passe une telle courbe (γ).

Pour nous en tenir à la surface (F), il existe ainsi sur cette surface une première famille de courbes remarquables, les courbes de contact (γ).

Concevons maintenant une courbe (c) quelconque, tracée sur la surface (F). Cette courbe (c) est, à chaque instant t, coupée en un certain point par la courbe (γ). Imaginons un mobile M décrivant la courbe (c) de manière à se trouver toujours à l'instant t au point où cette courbe coupe la courbe (γ). Dans ces conditions, le mobile M se trouvera constamment non seulement sur la surface (F), mais aussi sur la surface (F′) et il décrira sur celle-ci une courbe (c').

IMPRIMERIE NATIONALE

Appelons $\overline{V_M}$, $\overline{V'_M}$ les vitesses du point mobile M sur les courbes (c) et (c') et $\overline{V'_P}$ la vitesse d'entraînement, c'est-à-dire la vitesse par rapport au corps S′ du point P du corps S avec lequel le point M coïncide actuellement. Nous aurons :

$$\overline{V'_M} = \overline{V_M} + \overline{V'_P}.$$

Or $\overline{V_M}$, $\overline{V'_M}$ sont portés par les tangentes aux courbes (c) et (c') respectivement; elles sont donc dans le plan Π tangent commun en P aux surfaces (F), (F′). En conséquence, leur différence géométrique $\overline{V'_P}$ est, elle aussi, dans le plan Π.

En tous les points P *de la courbe de contact actuelle* (γ) *des surfaces* (F) *et* (F′), *la vitesse d'entraînement est tangente aux surfaces.*

La réciproque de cette proposition classique est vraie comme on sait, et si nous en avons rappelé ici la démonstration, c'est parce que nous y trouverons un lien entre les courbes de contact et les courbes douées d'enveloppe que l'on peut tracer sur la surface.

§ 76.

COURBES DOUÉES D'ENVELOPPES SUR UNE SURFACE. DEUX FAMILLES DE COURBES SUR TOUT PROFIL. — LIGNES DE GLISSEMENT.

Prenons sur la surface (F) un point P; par ce point il passe une courbe (γ) qui, à une certaine époque t, est la courbe de contact de (F) avec son enveloppe (F′).

D'après ce qui précède, à cette époque t la vitesse d'entraînement du point P est portée par une droite t_P tangente en P à la surface.

Par là se trouve définie en tout point P de la surface (F) une certaine tangente t_P à cette surface.

Considérons alors les courbes (e) tracées sur la surface (F) et définies par la condition, équivalente à une équation différentielle du premier ordre, d'admettre pour tangente en chaque point P la tangente t_P afférente à ce point.

On définit ainsi sur la surface (F) une famille de courbes (e) telles que par chaque point P de la surface il passe une de ces courbes.

Si l'on prend, dans le raisonnement du numéro précédent, pour courbe (c) une de ces courbes (e), il se présentera ce fait spécial que, dans la relation géométrique

$$\overline{V'_M} = \overline{V_M} + \overline{V'_P},$$

les deux vitesses $\overline{V_M}$, $\overline{V_P}$ sont portées par une même droite t_P en sorte que $\overline{V'_M}$ est aussi portée par cette droite. Cela prouve que la droite t_P est aussi tangente à la courbe (e') que le mobile M décrit, comme on l'a vu, sur la surface (F'). Les courbes (e), (e') sont ainsi tangentes entre elles au point P. Les courbes (e) sont donc des courbes douées d'enveloppe tracées sur la surface (F).

En résumé, nous nous trouvons avoir sur la surface (F) deux familles de courbes telles que par tout point P de la surface il passe une courbe de chaque famille :

1° Les courbes de contact (γ) de la surface (F) avec son profil conjugué.

2° Les courbes (e) tracées sur (F) et dont les conjuguées (e') sont tracées sur l'enveloppe (F') de la surface (F).

Il est clair que lorsque deux surfaces conjuguées sont en contact en un point P, le glissement en ce point se fait suivant l'arc de la courbe (e) puisque la vitesse d'entraînement est tangente à cette courbe. De la sorte, entre profils conjugués, le glissement se fait constamment suivant les lignes (e), (e'). De là le nom de *courbes de glissement* que nous proposons de donner à ces courbes.

Si, par suite d'usure réciproque, les profils conjugués (F), (F') laissaient apparaître des stries sur leurs parements, ce sont précisément les lignes de glissement que ces stries figureraient.

§ 77.

COURBES DE GLISSEMENT SPÉCIALES. — PROFILS CONJUGUÉS SPÉCIAUX. INTERVENTION DES HÉLICES EXCEPTIONNELLES.

Avant d'aller plus loin il convient de citer une catégorie de profils exceptionnels qui offrent, nous semble-t-il, quelque intérêt.

Nous avons été conduits à admettre sur tout profil superficiel (F) l'existence d'une famille de courbes (c) par ce fait qu'en tout point P de la surface il y a une tangente t_P qui, à un moment donné, porte la vitesse d'entraînement du point P. Nous avons conclu que les courbes tracées sur (F) qui admettent pour tangente en tout point P la tangente t_P sont des lignes douées d'enveloppe tracées sur la surface. Mais il peut se faire aussi que ces lignes soient, non pas des lignes douées d'enveloppe, mais des hélices exceptionnelles.

Nous voyons donc intervenir ici encore une fois ces hélices que nous avons déjà rencontrées d'abord lors de la définition des courbes douées d'enveloppe et ensuite lorsqu'il s'est agi de les distribuer en files enveloppant une courbe (c) donnée.

La considération des surfaces lieux de ces hélices exceptionnelles va nous conduire à une catégorie remarquable et nouvelle de profils conjugués.

A chaque instant t du mouvement, construisons une hélice H_t ayant pour axe et pour pas l'axe et le pas du mouvement hélicoïdal tangent.

Le lieu de cette hélice dans le corps S sera une surface (F) et dans le corps S' une surface (F'). Ces deux surfaces ont, à chaque

époque t, en commun l'hélice H_t: *je dis qu'elles se raccordent tout le long de cette hélice.*

Appelons en effet φ l'angle qui mesure l'amplitude de la rotation sur l'hélice H_t, à partir d'une origine arbitrairement choisie sur le cercle de base : les variables φ et t sont indépendantes et constituent un système de coordonnées sur la surface (F). Si l'on suppose un mobile M parcourant l'hélice H_t suivant une loi déterminée quelconque d'ailleurs, φ sera une fonction du temps et possédera par rapport au corps S sur la surface (F) une vitesse $\overline{V_M}$ qui dépend de la loi de φ en fonction du temps.

Ce même mobile, puisqu'il est constamment à l'époque t sur l'hélice H_t, décrira une ligne sur la surface (F′) et sa vitesse $\overline{V'_M}$ sera la somme géométrique de la vitesse $\overline{V_M}$ et de la vitesse d'entraînement $\overline{V'_P}$ du point P de la surface (F) qui coïncide actuellement avec le point M; on aura :

$$\overline{V'_M} = \overline{V_M} + \overline{V'_P}.$$

Or le plan Π tangent en P (ou M) à la surface (F) est défini par la vitesse $\overline{V_M}$ et par la tangente en M à l'hélice, tangente qui n'est autre que la droite t_P qui porte la vitesse d'entraînement $\overline{V_P}$.

Le plan tangent en P à la surface (F′) est défini de même par $\overline{V'_M}$ et par t_P; or puisque le plan Π contient $\overline{V'_M}$ et $\overline{V'_P}$ il contient $\overline{V'_P}$ et $\overline{V'_M}$, c'est-à-dire $\overline{V'_M}$ et t_P. C'est dire que le plan tangent en P à la surface (F′) est encore le plan Π.

Du reste les coordonnées dont nous avons fait usage jusqu'ici se prêtent fort bien à la représentation de ces hélices.

Puisque Oz est précisément l'axe (d) du mouvement hélicoïdal tangent, toute hélice H_t peut être représentée par les équations

$$(205) \qquad x = a\cos\varphi, \qquad y = a\sin\varphi, \qquad z = h\varphi + b,$$

où a, b sont deux *fonctions arbitraires* du temps.

Si l'on se reporte aux formules (15), n° 7 qui donnent v_x, v_y, v_z, projections de la vitesse par rapport au corps S, on aura ici:

$$\begin{cases} v_x = \xi - ry + \dfrac{dx}{dt} = \xi - ra\sin\varphi + a'\cos\varphi - a\sin\varphi\varphi', \\ v_y = rx - pz + \dfrac{dy}{dt} = ra\cos\varphi - p(h\varphi + b) + a'\sin\varphi + a\cos\varphi\varphi', \\ v_z = \zeta + pa\sin\varphi + h'\varphi + b' + h\varphi', \end{cases}$$

où φ' représente la dérivée de φ, qui est la fonction indéterminée du temps que l'on a dit et a', b', h' les dérivées de a, b, h.

En se rappelant, n° 17, formule (24), que $e = hr - \zeta$, on pourra écrire :

$$(206) \qquad \begin{cases} v_x = -(r+\varphi')\,a\sin\varphi + a'\cos\varphi + \xi, \\ v_y = (r+\varphi')\,a\cos\varphi + a'\sin\varphi - p(h\varphi + b), \\ v_z = (r+\varphi')\,h + pa\sin\varphi - e + h'\varphi + b'. \end{cases}$$

Dans ces formules φ' est un paramètre qui, par ses valeurs successives, donne les diverses tangentes au point P (x, y, z) à la surface (F).

Si l'on veut avoir les cosinus directeurs α, β, γ de la normale à la surface (F) au point P, il faut exprimer que la quantité

$$(207) \qquad \alpha v_x + \beta v_y + \gamma v_z$$

est nulle quel que soit φ' ou $r + \varphi'$. Ceci donne:

$$(208) \qquad \begin{cases} -a\alpha\sin\varphi + a\beta\cos\varphi + h\gamma = 0. \\ (\xi + a'\cos\varphi)\,\alpha + [a'\sin\varphi - p(h\varphi + b)]\,\beta \\ \quad + [pa\sin\varphi - e + h'\varphi + b']\,\gamma = 0. \end{cases}$$

Or si l'on traite la même question pour la surface (F′) solidaire du corps S′, il suffit de changer dans les calculs (formules 16 [n° 7]) ζ et r en ζ' et r' et comme ni ζ, ni r ne figurent dans les équations précédentes, ce sont les mêmes qui conviennent également au calcul de la normale à la surface (F′).

§ 78.

REMARQUE RELATIVE À CES PROFILS SPÉCIAUX.

Il nous sera utile plus loin de nous rendre compte dès à présent si les normales à la surface (F) tout du long de l'hélice H_t peuvent appartenir à la congruence des normales stationnaires.

On a vu au n° 16 que la normale stationnaire issue du point P (x, y, z) a des cosinus directeurs proportionnels à A, B, C:

$$\begin{aligned} A &= x^2 - h_1 x + h(h-k), \\ B &= yx - h_1 y - hz, \\ C &= zx + (h-k)y. \end{aligned}$$

Comme on a identiquement (n° 36, éq. [81])

$$-yA + xB + hC = 0, \tag{209}$$

la première des équations (208) est vérifiée si l'on y remplace α, β, γ par A, B, C Tout revient donc à savoir si l'on peut avoir:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\xi + a'\cos\varphi)A + [a'\sin\varphi - p(h\varphi + b)]B \\ \quad + [pa\sin\varphi - e + h'\varphi + b']C = 0. \end{array} \right. \tag{210}$$

On a

$$\xi = -pk,$$

posons aussi

$$\frac{a'}{ap} = \theta, \qquad h_1 = -\frac{dh}{pdt}, \qquad \frac{b'-e}{p} + \frac{h_1}{h} b = \theta_1,$$

on peut écrire l'équation (210) :

$$(211) \qquad (-k+\theta x)\mathrm{A} + (\theta y - z)\mathrm{B} + \left(y - \frac{h_1}{h} z + \theta_1\right)\mathrm{C} = 0,$$

et rappelons-nous que pour l'hélice circulaire on ne peut avoir d'autre relation algébrique que $x^2+y^2=a^2$. Or on constate aisément que l'équation précédente, du troisième degré en x, y, z, ne peut admettre de diviseur de la forme $x^2+y^2-a^2$.

§ 79.

CAS OÙ LES PROFILS CONJUGUÉS SONT DES SURFACES GAUCHES.

A titre d'exemple de surfaces sur lesquelles les deux familles de courbes (γ) et (e) sont distinctes et séparées, nous prendrons le cas où les surfaces (F), (F′) sont des surfaces réglées non développables se raccordant suivant une génératrice commune à tout instant du mouvement. Les lignes (γ) sont donc ici les génératrices rectilignes de la surface. Nous désignerons non plus par (γ) mais par (g) une de ces génératrices.

Prenons sur la surface (F) deux courbes (e_0), (e_1) douées d'en-

veloppe, et appelons M_0, M_1 les points où la génératrice (g) coupe ces lignes. On peut définir (g) comme la droite de jonction des points M_0 et M_1. Désignons par t l'époque où (g) est la génératrice de contact des surfaces (F), (F'). Les coordonnées (x_0, y_0, z_0) du point M_0 doivent vérifier les équations du type 25, n° 17 :

$$(212)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_0}{dt} = -\xi + \mu_0 y_0, \qquad \dfrac{dy_0}{dt} = pz_0 - \mu_0 x_0, \\ \dfrac{dz_0}{dt} = -py_0 + e - h\mu_0. \end{cases}$$

De même les coordonnées (x_1, y_1, z_1) du point M_1 doivent vérifier les équations

$$(213)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -\xi + \mu_1 y_1, \qquad \dfrac{dy_1}{dt} = pz_1 - \mu_1 x_1, \\ \dfrac{dz_1}{dt} = -py_1 + e - h\mu_1, \end{cases}$$

où les quantités μ_0, μ_1 sont des fonctions de t convenablement choisies.

Maintenant, les coordonnées x, y, z de tout autre point M de la droite (g) seront de la forme

$$(214)\qquad \begin{cases} x = \rho x_0 + (1-\rho) x_1, \qquad y = \rho y_0 + (1-\rho) y_1, \\ z = \rho z_0 + (1-\rho) z_1, \end{cases}$$

où ρ représente un paramètre arbitraire.

Si l'on veut que M décrive aussi une courbe (e) douée d'enveloppe, il faudra que les coordonnées (x, y, z) pour un choix conve-

IMPRIMERIE NATIONALE.

nable de ρ vérifient aussi trois équations du type (25) où μ désigne encore une fonction appropriée du temps, savoir :

$$(215)\quad \begin{cases} \rho\frac{dx_0}{dt}+(1-\rho)\frac{dx_1}{dt}+(x_0-x_1)\frac{d\rho}{dt}=-\xi+\mu[\rho y_0+(1-\mu)y_1], \\ \rho\frac{dy_0}{dt}+(1-\rho)\frac{dy_1}{dt}+(y_0-y_1)\frac{d\rho}{dt}=p[\rho z_0+(1-\rho)z_1] \\ \qquad -\mu\rho[x_0+(1-\rho)x_1], \\ \rho\frac{dz_0}{dt}+(1-\rho)\frac{dz_1}{dt}+(z_0-z_1)\frac{d\rho}{dt}=-p[\rho y_0+(1-\rho)y_1] \\ \qquad +e-h\mu. \end{cases}$$

Si alors dans ces équations (215) on remplace les dérivées de $x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1$ par leurs expressions (212), (213), on trouve qu'elles se réduisent aux suivantes :

$$(216)\quad \begin{cases} \rho(\mu_0-\mu)y_0+(1-\rho)(\mu_1-\mu)y_1+(x_0-x_1)\frac{d\rho}{dt}=0, \\ -\rho(\mu_0-\mu)x_0-(1-\rho)(\mu_1-\mu)x_1+(y_0-y_1)\frac{d\rho}{dt}=0, \\ -\rho(\mu_0-\mu)h-(1-\rho)(\mu_1-\mu)h+(z_0-z_1)\frac{d\rho}{dt}=0. \end{cases}$$

Ces trois équations sont linéaires et homogènes par rapport aux trois quantités :

$$\rho(\mu_0-\mu), \qquad (1-\rho)(\mu_1-\mu), \qquad \frac{d\rho}{dt}.$$

Si donc le déterminant de ces équations (216) n'est pas nul, on a forcément

$$\mu_0-\mu=0, \qquad \mu_1-\mu=0, \qquad \frac{d\rho}{dt}=0.$$

Or le déterminant en question est:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -y_0 & -y_1 & x_0 - x_1 \\ x_0 & x_1 & y_0 - y_1 \\ h & h & z_0 - z_1 \end{vmatrix}$$

Si $\Delta = 0$, cela signifie que les trois directions $(-y_0, x_0, h)$, $(-y_1, x_1, h)$, $(x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$ sont parallèles à un même plan ou que les vitesses d'entraînement des points M_0, M_1 sont dans un même plan avec la génératrice M_0M_1 ou (g). Comme d'autre part les tangentes aux courbes (e_0), (e_1) portent les vitesses d'entraînement de ces deux points, on voit que le plan tangent à la surface réglée engendrée par (g) dans le corps S est le même aux points M_0 et M_1; la surface est donc développable. Réservons ce cas (voir le n° 81).

En conséquence, puisque Δ n'est pas supposé nul, nous aurons, comme il a été dit, $\mu = \mu_1 = \mu_0$ et $\frac{d\rho}{dt} = 0$ ou $\rho =$ constante.

D'abord de ce que les points M, M_0, M_1 décrivent des courbes (e), (e_0), (e_1) qui correspondent à une même détermination de la fonction μ, on peut conclure que tous ces points sont solidaires d'un même corps auxiliaire S_μ et qu'ils forment un système invariable, ce qui explique que ρ soit constant.

Mais on peut constater très aisément que les distances $\overline{M_0M_1}$, $\overline{M_0M}$, $\overline{M_1M}$ sont constantes. Par exemple en retranchant les équations (212), (213) où l'on fait $\mu_0 = \mu_1 = \mu$, on trouve:

$$\frac{d(x_0 - x_1)}{dt} = \mu(y_0 - y_1),$$

$$\frac{d(y_0 - y_1)}{dt} = -\mu(x_0 - x_1) + p(z_0 - z_1),$$

$$\frac{d(z_0 - z_1)}{dt} = -p(y_0 - y_1),$$

d'où l'on tire :

$$(x_0-x_1)\frac{d(x_0-x_1)}{dt}+(y_0-y_1)\frac{d(y_0-y_1)}{dt}+(z_0-z_1)\frac{d(z_0-z_1)}{dt}=0,$$

ou

$$(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2+(z_0-z_1)^2=\text{constante}.$$

§ 80.

LE MOUVEMENT DE FABRICATION.

Le résultat que nous venons d'obtenir se relie à une autre idée que j'ai depuis longtemps fait connaître dans des communications déjà anciennes à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus*, t. CXXXV, p. 1066).

Nous venons de voir en somme que si (F), (F′) sont deux surfaces gauches conjuguées, se raccordant à chaque instant suivant une génératrice commune (g), il existe un corps S_μ dont la droite (g) est solidaire, et le mouvement du corps S_μ est tel que la droite (g) décrit dans le corps S la surface réglée (F) et dans le corps S′ la surface réglée conjuguée (F′).

C'est ce mouvement du corps S_μ par rapport au corps S (ou au corps S′) que l'on peut appeler un *mouvement de fabrication*.

Imaginons en effet que le corps S_μ soit un *porte-outil*, ce dernier, l'outil, étant, par exemple, réalisé sous la forme du fil d'une lame tranchante, ce fil occupant dans le corps S_μ la place de la droite (g). On voit qu'au cours de son mouvement par rapport au corps S, le corps S_μ entaillera le corps S de manière à y façonner le profil de la surface réglée (F).

Au lieu d'une lame tranchante on pourrait imaginer une fraise travaillant le long de la génératrice (g).

En résumé, le mouvement $\boxed{S_\mu, S}$ constitue un mouvement relatif d'une pièce S et d'un outil S_μ propre à donner à la pièce la forme voulue en vue du guidage du mouvement donné.

On peut du reste se rendre compte que ce mouvement de fabrication n'est pas unique, car si l'on compose chaque mouvement élémentaire de S_μ par rapport à S avec un mouvement hélicoïdal élémentaire ayant pour axe la droite (g), le mouvement de celle-ci par rapport au corps S ne sera pas changé, car cette droite (g) ne fait alors que glisser sur elle-même. On pourrait profiter de ce glissement pour donner à l'outil un mouvement de va-et-vient favorable à son action tranchante.

§ 81.

COURBES DE GLISSEMENT SUR LES DÉVELOPPABLES CONJUGUÉES.

Lorsque, au paragraphe 79, nous avons cherché les surfaces réglées conjuguées entre elles se raccordant à chaque instant suivant une génératrice commune, nous avons vu le cas des développables conjuguées se placer à part et nous avons réservé ce cas.

Nous allons constater que ce cas spécial mérite d'être étudié avec soin.

Soit donc un plan Ξ qui engendre un couple (ξ), (ξ') de développables conjuguées dans S et dans S'. Ce plan peut être considéré, nous le savons, comme solidaire d'un corps S_μ auxiliaire. La ligne de contact (γ) des développables conjuguées (ξ), (ξ') n'est autre que t_Ξ, polaire dans le complexe $\mathcal{L}$ de la normale $P_\Xi I$ élevée au plan Ξ en son pôle P_Ξ dans le même complexe, normale dont le point à l'infini a été antérieurement désigné par I. Pour tout point M de la droite t_Ξ la vitesse d'entraînement est normale au plan mené par M et par la droite $P_\Xi I$. En conséquence, toutes les déductions du n° 76 s'ap-

pliquent comme elles s'appliquent à la surface la plus générale (F). En déplaçant le point M suivant la direction de la vitesse d'entraînement sur la surface (ξ) on obtiendra une famille de courbes (e) douées d'enveloppe, tracées sur la surface (ξ) et admettant comme enveloppes les lignes analogues tracées sur la surface conjuguée (ξ').

Le point M qui décrit sur (ξ) et sur (ξ') le couple de courbes conjuguées (e), (e') peut être considéré comme solidaire d'un certain corps solide S_λ.

Rappelons à ce propos qu'ayant envisagé simultanément au n° 74 un point M solidaire du corps S_λ et un plan Ξ solidaire d'un corps S_μ nous avons trouvé la relation (204)

$$\frac{d(\alpha x+\beta y+\gamma z+u)}{dt}=(\mu-\lambda)(\beta x-\alpha y+h\gamma).$$

Si l'on suppose le point dans le plan et $(\mu-\lambda)$ non nul, on voit que le point M doit vérifier à la fois les deux équations :

$$\alpha x+\beta y+\gamma z+u=0,$$
$$\beta x-\alpha y+h\gamma=0,$$

résultat évident, puisque ces deux équations, nous le savons, représentent précisément la droite t_Ξ.

Or si l'on calcule encore l'expression

$$\frac{d}{dt}(\beta x-\alpha y+h\gamma),$$

on trouve la relation suivante, en tenant compte des expressions de $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, \frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\beta}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}$ (n° 74) :

$$\frac{d}{pdt}(\beta x-\alpha y+h\gamma)=\gamma x-\alpha z+(k-h)\beta-h_1\gamma+\frac{\lambda-\mu}{p}(\alpha x+\beta y).$$

Il en résulte que le point M doit vérifier les trois équations

$$(217)\quad \begin{cases} \alpha x+\beta y+\gamma z+u=0, \\ \beta x-\alpha y+h\gamma=0, \\ \gamma x-\alpha z+(k-h)\beta-h_1\gamma+\dfrac{\lambda-\mu}{p}(\alpha x+\beta y)=0. \end{cases}$$

Ces équations résolvent complètement le problème des courbes de glissement tracées sur la surface (ξ).

D'abord on ne manquera pas de remarquer que la dernière des équations (217) représente un plan du même faisceau que le plan représenté par l'équation (194) du n° 72. En comparant la valeur de $\rho=\frac{r-\mu}{p}$ qui figure dans l'équation (194) avec la valeur $\frac{\lambda-\mu}{p}$ du coefficient analogue dans la troisième équation (217), on voit que le point M est le point de contact de t_Ξ avec l'arête de la développable que le plan Ξ engendre dans le corps S_λ.

Or le plan Ξ contient constamment le point M; d'autre part, ce point est fixe dans S_λ, donc le plan Ξ enveloppe dans le corps S_λ non pas une développable, mais un cône dont le sommet M, situé sur t_Ξ, doit évidemment se présenter comme le point où l'arête (ici réduite au point M) touche la droite t_Ξ. Nous aurions donc pu écrire *a priori* cette troisième équation.

Ajoutons que si le plan Ξ enveloppe un cône dans le corps S_λ, inversement le point M décrit une courbe plane dans le plan Ξ solidaire du corps S_μ.

Il suit de là que le problème qui nous occupe comprend ces deux autres :

1° Courbes douées d'enveloppes qui sont planes dans le mouvement $\boxed{S_\lambda,\ S_\mu}$;

2° Développables douées d'enveloppes qui sont des cônes dans le mouvement $\boxed{S_\mu,\ S_\lambda}$.

Il est clair que l'on peut définir tout point M sur la droite t_Ξ au moyen de la valeur ρ du paramètre du plan

$$\gamma x - \alpha z + (k-h)\beta - h_1\gamma + \rho(\alpha x + \beta y) = 0,$$

qui passe par ce point; la valeur de λ correspondante sera fournie par l'équation

$$\rho = \frac{\lambda - \mu}{p}. \tag{218}$$

Ces diverses remarques fournissent ainsi la solution de divers problèmes et, entre autres, de celui de la détermination des courbes (e) douées d'enveloppe qui sont tracées sur la développable (ξ). Supposons en effet α, β, γ, u, μ donnés de façon à vérifier les équations (185) du n° 70; chacune des courbes (e) est engendrée par un point M solidaire d'un certain corps S_λ. Si λ était connu, les équations (217) donneraient les coordonnées x, y, z du point M. Or, en différentiant la dernière des équations (217), puis remplaçant ρ par sa valeur (218), $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\beta}{dt}$, $\frac{d\gamma}{dt}$, $\frac{du}{dt}$ par les valeurs (185) et $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ par les valeurs (25), où λ remplace μ, on obtiendra une équation de la forme :

$$(\alpha x + \beta y)\frac{d\lambda}{dt} = ax + by + cz + d,$$

où a, b, c, d seront des fonctions connues du temps et de λ; en remplaçant alors x, y, z par leurs valeurs tirées des équations (217), on aura en définitive une équation différentielle en λ du premier ordre : x, y, z se trouvant alors exprimés en fonction de λ, et λ en fonction du temps et d'une constante c, à chaque valeur de c il correspondra, par le moyen des équations (217), une courbe (e) douée d'enveloppe sur la surface (ξ).

CHAPITRE XII.

SUR LES SURFACES INTÉGRALES LIÉES AU CÔNE DES VITESSES.

§ 82.

COURBES ET SURFACES INTÉGRALES RELATIVES À UN SYSTÈME DE CÔNES. RELATIONS ENTRE CES COURBES ET CES SURFACES.

Je me propose d'abord de rappeler les principes essentiels de la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre en vue de leur application aux questions que nous développons ici.

Rappelons d'abord que, si tout point P de l'espace se trouve être le sommet d'un cône Γ_P défini *a priori* dès que l'on connaît le point P, ce cône, ainsi qu'on l'a déjà vu du reste dans des chapitres précédents, donne lieu à deux problèmes : celui des courbes intégrales et celui des surfaces intégrales.

Est intégrale toute courbe dont la tangente en tout point P est sur le cône Γ_P qui a pour sommet ce point.

Est intégrale toute surface dont le plan tangent en tout point P est tangent au cône Γ_P.

Pour les surfaces intégrales, la condition équivaut à une équation différentielle partielle du premier ordre que ces surfaces doivent vérifier.

Les relations entre les courbes et les surfaces intégrales ont été remarquées en premier lieu par Monge et ont été étudiées de notre temps par plusieurs géomètres, et notamment par M. G. Darboux, dans son mémoire « Sur les solutions singulières », inséré au tome XXVII du *Recueil des Savants Étrangers*.

IMPRIMERIE NATIONALE.

Au rang des courbes intégrales, mais à titre spécial figurent les courbes caractéristiques de l'équation des surfaces intégrales. Chacune de ces surfaces en contient une simple infinité et ces caractéristiques possèdent généralement sur la surface intégrale une courbe enveloppe, qui constitue une véritable arête de la surface, comme M. G. Darboux l'a montré. Cette arête est précisément une courbe intégrale et, réciproquement, toute courbe intégrale peut être regardée comme l'arête d'une certaine surface intégrale.

La détermination des surfaces intégrales implique donc celle des courbes intégrales.

Dans le cas où le cône est le cône des vitesses, les courbes intégrales sont les courbes (e) douées d'enveloppes, auxquelles il faut adjoindre les hélices exceptionnelles. Quant aux surfaces intégrales, l'objet de ce chapitre est précisément de chercher ce qu'elles sont.

§ 83.

NOUVELLE FAÇON DE CONCEVOIR LES SURFACES INTÉGRALES. ÉLÉMENTS DE CONTACT. PROPRIÉTÉ DU POINT DE CONTACT. — COURBES (c_{Π}).

La question des surfaces intégrales d'une équation aux dérivées partielles est souvent, et surtout depuis les travaux de M. Darboux et de Lie, présentée sous une autre forme.

Considérons le système constitué par un point P et un plan Π passant par ce point. Un tel système est appelé élément de contact. Il admet comme coordonnées : d'abord les coordonnées x, y, z du point P et, en second lieu, les coefficients P, Q du plan Π dont l'équation est mise sous la forme

$$Z - z = P(X - x) + Q(Y - y).$$

On considère alors une équation

$$f(x, y, z, \mathrm{P}, \mathrm{Q}) = 0,$$

qui représente une propriété géométrique des éléments qui la vérifie. Disons de ces éléments de contact qu'ils appartienent au système $f = 0$.

Si l'on considère les surfaces dont l'élément de contact, constitué par tout point P de la surface et le plan tangent Π en ce point, appartient, quel que soit le point P, au système $f = 0$, il est clair que ces surfaces sont les surfaces intégrales de l'équation différentielle partielle obtenue en regardant dans f les quantités P et Q comme les dérivées partielles de z par rapport à x et à y.

Si l'on se donne le point P, les plans Π qu'il faut lui adjoindre pour constituer des éléments de contact du système $f = 0$ se trouvent être les plans tangents d'un cône Γ_p ayant pour sommet ce point, et l'on retrouve la définition que nous rappelions plus haut.

Mais au lieu de se donner le point P de l'élément de contact on pouvait se donner le plan de l'élément, savoir:

$$z = ax + by + c.$$

Dans ces conditions, les points P qu'il faut adjoindre au plan Π pour constituer les éléments de contact du système $f = 0$ s'obtiendront en coupant le plan Π par la surface

$$f(x, y, z, a, b) = 0.$$

On obtient ainsi dans le plan Π une courbe (c_Π) lieu des points P qui, associés au plan Π, donnent des éléments de contact du système $f = 0$.

La définition des surfaces intégrales prend alors une autre forme

qui, au lieu d'évoquer une propriété du plan tangent, met en avant une propriété du point de contact.

Est surface intégrale toute surface dont le point P de contact avec son plan tangent Π est un point de la courbe (c_Π) afférente à ce plan.

§ 84.

DÉVELOPPABLES INTÉGRALES. — DOUBLE DÉFINITION DE LA COURBE (c_Π) DANS LE CAS ACTUEL. — LES DÉVELOPPABLES INTÉGRALES SONT CELLES QUI ONT UNE ENVELOPPE DÉVELOPPABLE. — DÉVELOPPABLES HÉLICOÏDES EXCEPTIONNELLES.

Et de même que la considération des cônes Γ_P donnait la définition des courbes intégrales, de même, la considération des courbes (c_Π) conduit à la définition d'une catégorie de surfaces développables appelées *développables intégrales*.

Est développable intégrale toute développable dont tout plan tangent Π touche la surface suivant une génératrice de contact tangente à la courbe (c_Π) contenue dans ce plan.

Ces développables correspondent dualistiquement aux courbes intégrales.

Il faut nous demander ici quelles sont les développables intégrales et d'abord quelles sont ces courbes (c_Π) contenues chacune dans le plan Π auquel elles correspondent.

Rappelons d'abord que, au n° 71, nous avons désigné déjà par (c_Ξ) dans le plan Ξ, et par suite (c_Π) dans le plan Π, la courbe enveloppe des caractéristiques d'entraînement successives du plan Π au cours du mouvement. Mais cette similitude de notations ne préjugeant de rien, il nous faut démontrer qu'en effet la courbe enveloppe dans le plan Π des caractéristiques d'entraînement est bien la courbe (c_Π) qui correspond au plan Π au point de vue de l'équation aux dérivées partielles.

Considérons la courbe (c_Π) telle que nous l'avons définie au

moyen des éléments de contact. Soit P un point de cette courbe; puisque l'élément (P, Π) appartient au système $f=0$, le cône de sommet P, Γ_P est tangent au plan Π, en sorte que la courbe (c_Π) est le lieu des points du plan Π dont les cônes correspondants sont tangents à ce plan.

Considérons alors dans le plan Π la caractéristique d'entraînement t_Π relative à un instant t; cette droite est le lieu des points du plan dont la vitesse d'entraînement à l'instant t est dans le plan Π. Prenons alors deux instants voisins et soient t_Π, t'_Π les caractéristiques d'entraînement successives relatives à ces deux instants. Le point P d'intersection de ces deux droites possède la propriété que sa vitesse d'entraînement, à deux instants successifs, se trouve dans le plan Π; le cône Γ_P aura dès lors deux génératrices voisines dans le plan Π; il sera tangent à ce plan : le point P appartient donc à la courbe (c_Π); d'autre part, le point P, étant l'intersection de deux caractéristiques successives, appartient à leur enveloppe et il est ainsi démontré que la courbe (c_Π) est bien l'enveloppe de ces caractéristiques d'entraînement du plan Π.

Dans ces conditions on ne peut plus hésiter, les développables intégrales sont celles qui admettent comme génératrice la caractéristique d'entraînement de leur plan tangent. Ce sont donc, ou bien les développables douées d'enveloppe qui ont fait l'objet du chapitre X, ou bien les hélicoïdes développables qui admettent une hélice exceptionnelle pour arête et que nous avons appelés, eux aussi, exceptionnels, au n° 71.

§ 85.

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME AUXILIAIRE.

Avant de poursuivre dans cet ordre d'idées en abordant la question des éléments caractéristiques, nous allons préalablement démontrer une proposition subsidiaire qui nous conduira du reste naturellement à la considération de ces éléments.

Théorème :

Si, tout du long d'une courbe (c) *tracée sur une surface* Σ, *les éléments de contact vérifient une équation aux dérivées partielles*

$$f(x, y, z, \mathrm{P}, \mathrm{Q}) = 0,$$

et s'il en est de même pour tous les éléments dont le point est infiniment voisin d'un point quelconque de la courbe (c), *la surface* Σ *a tout du long de* (c) *un contact du second ordre avec la surface intégrale* V *de l'équation* $f = 0$ *qui passe par la courbe* (c).

Il n'y a exception que si la courbe (c) *est une caractéristique.*

Cette proposition résulte immédiatement de la discussion du problème de Cauchy.

Supposons que, tout du long de la courbe (c), x, y, z soient des fonctions d'un paramètre u; puisque l'équation $f = 0$ est vérifiée tout du long de (c) sur la surface Σ, on a les deux relations (x', y', z' dérivées de x, y, z) :

$$(219) \qquad z' - \mathrm{P}x' - \mathrm{Q}y' = 0, \qquad f(x, y, z, \mathrm{P}, \mathrm{Q}) = 0,$$

tout du long de (c); par là P, Q sont définis en fonction de u, ce qui prouve que la développable circonscrite (Ψ) est donnée par le fait même que (c) est donnée. Notons que les raisonnements précédents s'appliquent à la surface intégrale V aussi bien qu'à la surface Σ, en sorte que déjà ces deux surfaces sont circonscrites l'une à l'autre tout du long de la courbe (c) et, on peut ajouter, suivant la développable (Ψ).

Maintenant, par hypothèse, l'équation $f = 0$ est vérifiée aussi par tout point de Σ infiniment voisin d'un point quelconque de (c). C'est-à-dire que, quels que soient dx et dy, on a :

$$0 = df = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \mathrm{P}\frac{\partial f}{\partial z} + \mathrm{R}\frac{\partial f}{\partial \mathrm{P}} + \mathrm{S}\frac{\partial f}{\partial \mathrm{Q}}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \mathrm{Q}\frac{\partial f}{\partial z} + \mathrm{S}\frac{\partial f}{\partial \mathrm{P}} + \mathrm{T}\frac{\partial f}{\partial \mathrm{Q}}\right) dy,$$

c'est-à-dire :

$$(220) \qquad 0 = \frac{\partial f}{\partial x} + P\frac{\partial f}{\partial z} + R\frac{\partial f}{\partial P} + S\frac{\partial f}{\partial Q},$$

$$(221) \qquad 0 = \frac{\partial f}{\partial y} + Q\frac{\partial f}{\partial z} + S\frac{\partial f}{\partial P} + T\frac{\partial f}{\partial Q}.$$

R, S, T sont les dérivées partielles secondes de z par rapport à x, y sur la surface Σ.

D'autre part, en différentiant aussi l'équation $z' - Px' - Qy' = 0$, on aura :

$$(222) \qquad Rx'^2 + 2Sx'y' + Ty'^2 + Px'' + Qy'' - z'' = 0.$$

Les trois équations (220), (221), (222) linéaires en R, S, T permettront donc, en général, de calculer R, S, T, et comme ce raisonnement est de tous points applicable à la surface V, comme les équations seront les mêmes pour cette surface, R, S, T seront aussi les mêmes, ce qui démontre le théorème.

Il n'y aura exception que si ces équations linéaires sont impuissantes à définir R, S, T.

Il faudra pour cela que le déterminant

$$(223) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial P} & \frac{\partial f}{\partial Q} & 0 \\ 0 & \frac{\partial f}{\partial P} & \frac{\partial f}{\partial Q} \\ x'^2 & 2x'y' & y'^2 \end{vmatrix} = 0$$

soit nul. Or ce déterminant est le carré :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial P}y' - \frac{\partial f}{\partial Q}x'\right)^2;$$

s'il est nul on peut donc poser, θ étant un coefficient de proportionnalité :

$$x' = \theta \frac{\partial f}{\partial P}, \qquad y' = \theta \frac{\partial f}{\partial Q},$$

$$z' = Px' + Qy' = \theta \left(P \frac{\partial f}{\partial P} + Q \frac{\partial f}{\partial Q} \right);$$

maintenant on aura aussi :

$$P' = Rx' + Sy' = \theta \left(R \frac{\partial f}{\partial P} + Q \frac{\partial f}{\partial Q} \right),$$

$$Q' = Sx' + Ty' = \theta \left(S \frac{\partial f}{\partial P} + Q \frac{\partial f}{\partial Q} \right),$$

ou, en tenant compte des relations (220), (221) :

$$P' = -\theta \left(\frac{\partial f}{\partial x} + P \frac{\partial f}{\partial z} \right), \qquad Q = -\theta \left(\frac{\partial f}{\partial y} + Q \frac{\partial f}{\partial z} \right),$$

d'où, en écrivant $dx, dy, \ldots, dQ$ au lieu de $x', y', \ldots, Q'$:

$$(224) \qquad \frac{x}{\frac{\partial f}{\partial P}} = \frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial Q}} = \frac{dz}{P \frac{\partial f}{\partial P} + Q \frac{\partial f}{\partial Q}} = \frac{-dP}{\frac{\partial f}{\partial x} + P \frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{-dQ}{\frac{\partial f}{\partial y} + Q \frac{\partial f}{\partial z}}.$$

Les courbes (c) pour lesquelles ces équations sont vérifiées font donc exception, ce sont précisément les caractéristiques, tandis que la développable (Ψ) qui accompagne chacune d'elles est une développable caractéristique.

L'ensemble de la courbe (c) et de la développable (Ψ) constitue ce que l'on appelle une *multiplicité* caractéristique.

§ 86.

CARACTÈRE DISTINCTIF DES CARACTÉRISTIQUES. APPLICATION AU CAS DES INTÉGRALES DES CÔNES DES VITESSES.

Sans qu'il soit nécessaire de reproduire ici la théorie classique des caractéristiques, nous rappellerons que P étant le point de contact (x, y, z), II le plan tangent, P, Q, les équations

$$\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial P}} = \frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial Q}} = \frac{dz}{P\frac{\partial f}{\partial P} + Q\frac{\partial f}{\partial Q}}$$

expriment que la tangente à la courbe (c) en P est la génératrice (g) de contact du cône Γ_P avec le plan II, tandis que l'équation

$$\frac{dP}{\frac{\partial f}{\partial x} + P\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{dQ}{\frac{\partial f}{\partial y} + Q\frac{\partial f}{\partial z}}$$

exprime que la génératrice de contact de la développable (Ψ) avec le plan II est la tangente en P à la courbe (c_{II}).

Cette dernière interprétation a été donnée par M. Darboux, dans le mémoire déjà cité.

Autrement dit, lorsqu'il s'il s'agit d'une multiplicité caractéristique, la courbe et la développable doivent être simultanément une courbe intégrale et une développable intégrale.

Dans l'application au cas des surfaces intégrales du cône des vitesses, l'interprétation est immédiate.

Puisque les courbes intégrales sont les courbes douées d'enveloppe et les développables intégrales des développables douées d'enveloppe, on arrive au résultat suivant :

Ce qui caractérise, dans le cas des surfaces intégrales du cône des

IMPRIMERIE NATIONALE.

vitesses, les courbes caractéristiques, parmi les autres courbes à enveloppe (e), c'est que la développable (Ψ) qui accompagne une pareille courbe est elle-même douée d'une enveloppe développable.

§ 87.

MISE EN ÉQUATIONS.

Ce qui précède permettrait de former l'équation différentielle des caractéristiques.

En effet, soit, sur la ligne caractéristique (*e*), P la position à l'époque t du point décrivant; la tangente à la courbe (*e*) est la droite t_P qui porte la vitesse d'entraînement, en sorte que x, y, z vérifient les équations (25) où nous mettrons λ au lieu de μ:

$$(225)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\xi + \lambda y, \qquad \dfrac{dy}{dt} = pz - \lambda x, \\ \dfrac{dz}{dt} = -py + h\lambda - e. \end{cases}$$

La normale au plan tangent au cône Γ_P suivant t_P est la normale stationnaire d_P^{nn}, dont les paramètres directeurs sont (n° 16, équations 22):

$$A = x^2 - h_1 x + h(h-k), \qquad B = y(x-h_1) - hz,$$
$$C = zx + (h-k)y,$$

en sorte que l'on peut écrire l'équation du plan Π:

$$A(X-x) + B(Y-y) + C(Z-z) = 0.$$

Il suffira d'écrire que la caractéristique de ce plan est sa carac-

téristique d'entraînement, laquelle est la trace sur ce plan du plan

$$BX - AY + hC = 0.$$

On a ainsi en main tous les éléments de la mise en équation du problème.

Mais il est préférable d'aborder le problème un peu autrement.

Du moment où la normale en M au plan Π est la normale stationnaire issue de ce point, on peut, en partant du plan Π, définir le point M comme le point de rencontre des projections sur ce plan des directrices de la congruence des normales stationnaires. Dès lors, la définition d'une multiplicité caractéristique peut être comprise de la manière suivante :

Le plan Π *se meut par rapport au trièdre* T *de façon à envelopper dans* S *et* S′ *deux développables conjuguées, et de manière que le point* M, *point de rencontre des projections sur* Π *des directrices de la congruence des normales stationnaires, décrive dans* S, S′ *deux courbes conjuguées.*

Nous prendrons l'équation du plan Π sous la forme

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + u = 0;$$

puisque Π enveloppe dans S, S′ deux développables conjuguées, on doit avoir (éq. 185, n° 70) :

$$(226) \qquad \frac{d\alpha}{dt} = \mu\beta, \qquad \frac{d\beta}{dt} = p\gamma - \mu\alpha, \qquad \frac{d\gamma}{dt} = -p\beta,$$

$$\frac{du}{dt} = \xi\alpha - (e - h\mu)\gamma.$$

Maintenant, si l'on remarque que x, y, z étant les coordonnées

du point M, les coefficients directeurs de la normale au plan II sont aussi A, B, C, comme on le disait plus haut, on a forcément:

$$\frac{\alpha}{A}=\frac{\beta}{B}=\frac{\gamma}{C}$$

et, des identités déjà écrites antérieurement (éq. 81, n° 36)

$$-Ay+Bx+Ch=0, \qquad Az+B(h-k)+C(h_1-x)=0,$$

on tire:

$$(227) \qquad -\alpha y+\beta x+\gamma h=0, \qquad \alpha z+\beta(h-k)+\gamma(h_1-x)=0.$$

Ces équations sont alors celles de la normale stationnaire perpendiculaire en M au plan II et le point M est dès lors le point où cette droite perce le plan II.

Ainsi se trouve défini M quand on se donne le plan II.

Les coordonnées x, y, z de ce point M, puisqu'il décrit dans S et S′ deux courbes conjuguées, doivent vérifier, pour une valeur convenable de λ, les équations:

$$(228) \quad \frac{dx}{dt}=-\xi+\lambda y, \qquad \frac{dy}{dt}=pz-\lambda x, \qquad \frac{dz}{dt}=-py+e-h\lambda.$$

En tenant compte des équations (226), (227), (228) et en répétition d'un calcul déjà fait dans une circonstance analogue n° 74, nous aurons :

$$\frac{d(\alpha x+\beta y+\gamma z+u)}{dt}=(\mu-\lambda)(\beta x-\alpha y+h\gamma),$$

$$\frac{d}{dt}(\beta x-\alpha y+h\gamma)=-p\{\alpha z+(h-k)\beta+(h_1-x)\gamma\}$$

$$-(\mu-\lambda)(\alpha x+\beta y).$$

Si l'on tient compte des équations

$$(229)\qquad \begin{cases} \alpha x+\beta y+\gamma z+u=0, \qquad \beta x-\alpha y+h\gamma=0, \\ \alpha z+(h-k)\beta+(h_1-x)\gamma=0, \end{cases}$$

qui définissent le point M, les équations précédentes se réduisent à :

$$(\mu-\lambda)(\alpha x+\beta y)=0.$$

Or les trois équations précédentes n'étant pas compatibles avec $\alpha x+\beta y=0$, il reste :

$$\mu-\lambda=0.$$

Ainsi : *lorsqu'il s'agit d'une multiplicité caractéristique, les deux fonctions* λ, μ *qui interviennent dans les équations différentielles afférentes respectivement à la courbe et à la développable ont des* VALEURS ÉGALES.

Nous interpréterons dans un instant ce résultat. Montrons auparavant qu'il ne faut pas s'arrêter là et que λ est exprimable en fonction de α, β, γ.

En nous servant encore des équations (226), (228) où nous ferons $\mu=\lambda$, nous trouverons :

$$\frac{d}{dt}[\alpha z+(h-k)\beta+(h_1-x)\gamma]=-\lambda[(2h-k)\alpha+\gamma y-\beta z]$$
$$+e\alpha-p[2h_1-k_1]\beta-p[2k+h_2]\gamma,$$

où l'on a posé

$$(230)\qquad \xi=-pk, \qquad h_1=-\frac{h}{pdt}, \qquad h_2=-\frac{dh_1}{pdt}, \qquad k_1=-\frac{dk}{pdt}.$$

D'après l'identité ci-dessus on doit avoir :

$$(231) \qquad -[(2h-k)\alpha+\gamma y-\beta z]\lambda+e\alpha-p(2h_1-k_1)\beta \\ -p(2k+h_2)\gamma=0.$$

Or les équations (227) donnent :

$$\gamma x-\alpha z=(h-k)\beta+h_1\gamma,$$
$$\alpha y-\beta x=h\gamma,$$

d'où

$$\alpha\ (\gamma y-\beta z)=\beta(\gamma x-\alpha z)+\gamma(\alpha y-\beta x)=(h-k)\beta^2+h_1\beta\gamma+h\gamma^2.$$

En portant cette expression de $\gamma y-\beta z$ dans l'expression de λ, il viendra :

$$(232) \qquad \lambda=\frac{\alpha[e\alpha-p(2h_1-k_1)\beta-p(2k+h_2)\gamma]}{(2h-k)\alpha^2+(h-k)\beta^2+h_1\beta\gamma+h\gamma^2},$$

et α, β, γ doivent alors, λ *ayant cette expression,* vérifier les équations :

$$\frac{d\alpha}{dt}=\lambda\beta, \qquad \frac{d\beta}{dt}=p\beta-\lambda\alpha, \qquad \frac{d\gamma}{dt}=-p\beta.$$

Après avoir ainsi déterminé α, β, γ on aura u par la quadrature $\frac{du}{dt}=-pk\alpha-(e-h\lambda)\gamma$.

Et alors, x, y, z seront donnés par les équations (229).

C'est donc sur la détermination de α, β, γ que porte toute la difficulté du problème.

Si l'on pose comme on l'a déjà fait :

$$\alpha=\sin\theta.\cos\varphi, \qquad \beta=\sin\theta.\sin\varphi, \qquad \gamma=\cos\theta,$$

on sait que les équations prennent la forme :

$$\frac{d\theta}{dt} = p \sin \varphi, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = p \cos \varphi - \lambda, \tag{233}$$

et λ aura la valeur :

$$\lambda = \frac{[e \sin\theta \cos\varphi - p(2h_1 - k_1)\sin\theta \sin\varphi - p(2k + h_2)\cos\theta]\sin\theta\cos\varphi}{(2h-k)\sin^2\theta\cos^2\varphi + (h-k)\sin^2\theta\sin^2\varphi + h_1 \sin\theta\cos\theta\sin\varphi + h\cos^2\theta}. \tag{234}$$

Le problème se trouve ainsi réduit à son minimum de simplicité. On ne pourrait simplifier davantage qu'en particularisant le mouvement.

Maintenant revenons au fait de l'égalité des paramètres μ et λ. Cela signifie que le point M et le plan II sont solidaires d'un même corps solide auxiliaire S_λ, en sorte que ce corps se meut en entraînant ce point et ce plan (l'un portant l'autre), de manière à leur faire engendrer dans S (et aussi dans S') une multiplicité caractéristique. *Mais la fonction λ relative à ce plan n'est pas arbitraire.*

Soit en effet :

$$\lambda = F(\theta, \varphi, t), \tag{235}$$

l'expression déjà trouvée pour λ en φ, θ, t; en différentiant et tenant compte de

$$\frac{d\theta}{dt} = p \sin \varphi, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = p \cos \varphi - F,$$

on aura :

$$\frac{d\lambda}{dt} = F_1(\theta, \varphi, t), \tag{236}$$

et en différentiant encore et tenant encore compte des valeurs de $\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$, on aura :

$$\frac{d^2\lambda}{dt^2} = F_2(\theta, \varphi, t). \tag{237}$$

L'élimination de θ, φ conduira à une équation du second ordre pour λ

$$\frac{d^2\lambda}{dt} = \Phi\left(t, \lambda, \frac{d\lambda}{dt}\right). \tag{238}$$

Ainsi le paramètre λ du corps S_λ vérifie une équation différentielle du second ordre.

Cette méthode purement théorique aide à se rendre compte de la façon dont se groupent les multiplicités caractéristiques.

Supposons qu'on ait intégré l'équation en λ du second ordre et fixé les valeurs c_1, c_2 des constantes qui figurent dans la solution générale. On en déduira θ, φ et α, β, γ, en termes finis.

On aura ensuite u par une quadrature, ce qui fait une troisième constante c_3 additive à u. A chaque valeur de c_3 correspondra un plan II et un point M. Quand on prend pour c_3 diverses déterminations on obtient des plans II parallèles, tandis que le point M décrit la normale stationnaire perpendiculaire aux plans II. Il se trouve alors que tous ces plans II et ces points M sont solidaires d'un même corps S_λ et sont par conséquent à des distances invariables les uns des autres.

On reconnaît par là que : *Un même corps* S_λ *contient une droite qui lui est invariablement liée dont tous les points décrivent dans les corps* S, S′ *des courbes caractéristiques tandis que les plans normaux à la droite en ces points engendrent les développables caractéristiques correspondantes*[1].

Il est clair que toutes les multiplicités caractéristiques ainsi définies sont *parallèles*.

Cela n'est pas surprenant. Nous verrons dans un instant que les surfaces intégrales admettent comme normales les droites d'un

[1] On remarquera que, dans le corps S_λ, il y a une droite fixe qui appartient constamment à la congruence des normales stationnaires et que le problème des caractéristiques équivaut à celui de trouver les corps S_λ dont une même droite fixe soit constamment normale stationnaire.

complexe, en sorte que toute surface parallèle à une surface intégrale est aussi une surface intégrale.

Pour ce motif, la méthode qu'on a suivie en partant du plan II, qui utilise ce caractère des surfaces intégrales, réalise la forme la plus simple de la mise en équations des caractéristiques.

§ 88.

NATURE DES SURFACES INTÉGRALES. LES NORMALES DES SURFACES INTÉGRALES APPARTIENNENT À UN COMPLEXE.

Nous devons maintenant, pour terminer ce travail, pénétrer la nature des surfaces intégrales du cône des vitesses.

Une telle surface I admet en chacun de ses points P pour plan tangent un plan tangent au cône des vitesses, c'est-à-dire que sa normale appartient au cône supplémentaire de ce cône.

Mais on a vu que le cône supplémentaire est le lieu des normales stationnaires qui passe au point P.

En conséquence, la normale PN en un point P quelconque de la surface intégrale I est, à une certaine époque, la normale stationnaire issue de P.

On peut tirer de là une conclusion intéressante.

En effet, la congruence linéaire des droites stationnaires décrit dans le corps S un complexe de droites; cette remarque, rapprochée du résultat précédent, suffit pour qu'on soit en droit d'énoncer ce théorème:

Les surfaces intégrales du cône des vitesses dans le corps S *sont définies par la condition d'admettre pour normales les droites du complexe qui est le lieu dans le corps* S *de la congruence linéaire des normales stationnaires.*

IMPRIMERIE NATIONALE.

Les surfaces dont les normales font partie d'un complexe donné ont depuis longtemps attiré l'attention des géomètres. Transen les a étudiées dans une note aux *Comptes rendus* déjà très ancienne Plus récemment, M. Darboux leur a consacré quelques lignes dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*, et tout dernièrement il est revenu sur cette question dans plusieurs notes aux *Comptes rendus*.

En conséquence, ces surfaces nous amènent sur un terrain déjà exploré.

Mais si cette remarque est de nature, le cas échéant, à faciliter la détermination en termes finis de ces surfaces intégrales, en revanche elle ne nous apprendra rien de plus sur leur nature.

Mais nous pouvons poursuivre nos investigations.

§ 89.

COURBE DE CONTACT D'UNE SURFACE INTÉGRALE AVEC UN PROFIL CONJUGUÉ. — LES PROFILS CONJUGUÉS DES SURFACES INTÉGRALES SONT DES SURFACES INTÉGRALES DANS LE SECOND CORPS.

Remarquons que puisque toute normale PN est à une certaine époque normale stationnaire, une certaine valeur du temps t se trouve attachée à tout point P d'une surface intégrale, à savoir la valeur de t où la normale en P est normale stationnaire.

Considérons alors sur la surface I la courbe (γ) lieu des points P pour lesquels l'époque t est la même. Par définition, en tout point P de la courbe (γ) la normale PN est normale stationnaire à l'époque t. En conséquence, cette normale appartient à la fois au complexe linéaire $\mathcal{L}$ et au complexe linéaire auxiliaire $\mathcal{L}_1$, que l'on peut substituer au complexe $\mathcal{L}'$ infiniment voisin de $\mathcal{L}$ dans la définition de la normale stationnaire (voir n° 15).

Et d'abord les normales en tous les points de (γ) appartiennent au complexe linéaire $\mathcal{L}$.

Il faut en conclure que la courbe (γ) est la courbe de contact de la surface intégrale I avec son profil conjugué I′ dans le corps S′.

Mais puisque I′ admet tout du long de (γ) les mêmes normales que I, il faut en conclure que la surface I′ dans le corps S′ admet pour normales les droites du complexe qui, dans le corps S′, est le lieu des normales stationnaires. Autrement dit, *les surfaces* I′ *conjuguées des surfaces intégrales* I *sont, dans le corps* S′, *les surfaces intégrales du cône des vitesses.*

Ajoutons que si, au lieu de prendre l'enveloppe de I dans le corps S′, nous en prenions l'enveloppe dans l'un quelconque de ces corps que nous avons proposé de désigner par S_μ, la proposition subsisterait, car la courbe de contact avec la nouvelle surface I_μ serait toujours la courbe (γ).

§ 90.

OSCULATION D'UN HÉLICOÏDE ET D'UNE SURFACE INTÉGRALE.

Pour mener à terme la suite de nos déductions, abandonnons pour un instant les coordonnées qui nous ont servi jusqu'ici et adoptons un système d'axes rectangulaires *oxyz* solidaires du corps S.

Soient ξ, η, ζ les projections sur les axes de la vitesse d'entraînement de l'origine des axes de coordonnées et p, q, r les projections du vecteur qui représente la rotation instantanée. Ces six quantités p, q, r, ξ, μ, ζ sont des fonctions du temps dont nous représenterons par p', q', r', ξ', μ', ζ' les dérivées.

Considérons une surface I lieu du point P (x, y, z) et soient P, Q les coefficients du plan tangent en ce point. Soit t l'époque où la normale en P à la surface I est stationnaire.

Dire que cette normale PN appartient au complexe $\mathcal{C}$, c'est

dire que la vitesse d'entraînement de P est dans le plan tangent, ce qui se traduit par l'équation

$$(239)\quad (\xi+qz-ry)\,\mathrm{P}+(\eta+rx-pz)\,\mathrm{Q}-(\zeta+py-qx)=0.$$

En introduisant les coordonnées plueckeriennes de la normale PN, α, β, γ, λ, μ, ν savoir :

$$(240)\qquad \frac{\alpha}{\mathrm{P}}=\frac{\beta}{\mathrm{Q}}=\frac{\gamma}{-1}=\frac{\lambda}{-y-\mathrm{Q}z}=\frac{\mu}{x+\mathrm{P}z}=\frac{\nu}{\mathrm{Q}x-\mathrm{P}y},$$

l'équation (226) prend la forme

$$(241)\qquad \xi.\alpha+\eta.\beta+\zeta.\gamma+p.\lambda+q.\mu+r.\nu=0.$$

Mais la normale PN n'appartient pas seulement au complexe $\mathcal{C}$, elle appartient aussi à la congruence des droites stationnaires, c'est-à-dire au complexe $\mathcal{C}'$ infiniment voisin du complexe $\mathcal{C}$ et qui se rapporte à l'instant infiniment voisin. De là suit que α, β, γ, λ, μ, ν doivent aussi vérifier la relation

$$(242)\qquad \xi'.\alpha+\eta'.\beta+\zeta'.\gamma+p'.\lambda+q'.\mu+r'.\nu=0.$$

Remarquons maintenant que l'équation (239), ayant lieu en tous les points de la courbe (γ) si l'on y fixe la valeur de t, aura lieu en tout point P de la surface I si l'on a soin d'y prendre pour t la valeur du temps qui correspond, comme nous le supposons et l'avons déjà expliqué, au point P. En différentiant totalement cette équation il viendra :

$$\begin{aligned}&(\xi'.\alpha+\eta'.\beta+\zeta'.\gamma+p'.\lambda+q'.\mu+r'.\nu)\,dt\\&\quad+(\xi.d\alpha+\eta.d\beta+\zeta.d\gamma+p.d\lambda+q.d\mu+r.d\nu)=0,\end{aligned}$$

ou, en tenant compte de l'équation (242),

$$(243) \qquad \xi . d\alpha + \eta . d\beta + \zeta . d\gamma + p . d\lambda + q . d\mu + r . d\nu = 0.$$

Or cette équation exprime qu'en tout point infiniment voisin d'un point de la courbe (c), sur la surface I, la normale PN appartient encore au complexe $\mathcal{L}$.

Mais les surfaces dont les normales appartiennent au complexe $\mathcal{L}$ vérifient une équation différentielle partielle linéaire; ce sont les hélicoïdes ayant pour axe et pour pas l'axe (d) et le pas h du mouvement hélicoïdal tangent. Autrement dit, ces hélicoïdes glissent sur eux-mêmes au cours de ce déplacement hélicoïdal. Il est dès lors visible que celui de ces hélicoïdes qui contient une courbe (γ) est l'hélicoïde H (γ) engendré par (γ) au cours de ce mouvement hélicoïdal.

Ceci étant, il résulte de la proposition établie au n° 85 que cet hélicoïde H (γ) doit avoir tout du long de (γ) un contact du second ordre avec la surface I.

De là ce premier résultat.

En appelant (γ) *la courbe de contact de la surface intégrale* I *avec sa conjuguée* I', *l'hélicoïde* H (γ) *engendré par la courbe* (γ) *au cours du mouvement hélicoïdal tangent a, tout du long de* (γ), *un contact du second ordre avec la surface* I.

Il est clair que, conformément à l'exception prévue au n° 85, le théorème serait en défaut si la courbe (γ) était une caractéristique de l'équation différentielle des hélicoïdes. Mais ces caractéristiques sont, on le sait, les hélices de pas h et d'axe (d).

Or on a précisément étudié au n° 77 les surfaces (F), (F') conjuguées engendrées par ces courbes et on a fait voir au n° 78 que les normales à ces surfaces ne peuvent pas être des normales stationnaires.

Ce cas doit donc être écarté [1].

[1] Dans son mémoire *Über Complexe* inséré au tome V des *Mathematische Annalen*, Sophus Lie a démontré que les courbes intégrales qui ont leur tan-

§ 91.

OSCULATION CONSTANTE DE DEUX SURFACES INTÉGRALES CONJUGUÉES.

On sent bien que la proposition qui figure au numéro précédent n'est que transitoire et qu'elle en prépare une autre.

En effet, de même que l'hélicoïde H (γ) a un contact du second ordre tout du long de (γ) avec la surface I, il aura aussi un contact du second ordre avec la surface I'.

Dès lors les surfaces I, I' auront aussi tout du long de (γ) un contact du second ordre.

On obtient ainsi ce théorème qui constitue une importante propriété de nos surfaces intégrales.

Toute surface intégrale du cône des vitesses a un contact du second ordre, à chaque instant, tout du long de la courbe de contact avec son profil conjugué.

gente en un point P situé dans le plan tangent à une surface intégrale en ce point P ont avec cette surface un contact du second ordre. Si l'on considère une surface intégrale I et la courbe de contact (γ), à l'époque t, avec la surface conjuguée I', en tout point P de cette courbe, la vitesse d'entraînement est *à la même époque t* tangente à la surface. Si l'on considère l'hélice passant en P, d'axe (d), de pas h, elle est tangente à la vitesse d'entraînement, donc à la surface; donc en vertu du théorème de Lie, puisqu'une telle hélice figure parmi les courbes intégrales, elle a un contact du second ordre en P avec la surface. En conséquence, toutes les hélices décrites par tous les point P de (γ) au cours du mouvement hélicoïdal tangent ont avec la surface intégrale I un contact du second ordre. On peut en conclure que l'hélicoïde H (γ) qui est le lieu de ces hélices a, lui aussi, tout du long de (γ), un contact du second ordre avec la surface I.

§ 92.

EXEMPLE DU ROULEMENT D'AXOÏDES APPLICABLES.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse d'un mouvement dans lequel il existe à chaque instant une rotation tangente.

Les deux axoïdes (Φ), (Φ') roulent alors l'un sur l'autre sans glisser; ils sont de plus applicables.

On a vu au n° 55 que, dans ce cas, la congruence des normales stationnaires est constamment formée des tangentes à la surface (Φ) [ou (Φ')] tout du long de la génératrice de contact (d). Et en définitive, le complexe des normales stationnaires dans le corps S est formé des tangentes à la surface (Φ).

Les surfaces intégrales I sont donc celles qui admettent pour normales les tangentes de la surface (Φ). On sait que le problème revient à trouver sur la surface (Φ) une famille de lignes géodésiques.

La surface intégrale conjuguée I' se définit de même au moyen des tangentes de la surface réglée (Φ') dans le corps S'.

Quant à la courbe (γ) de contact elle se définira par la propriété que la normale en tous ses points à la surface I touche (Φ) en un point de la génératrice (d).

On voit ainsi que, même dans ce cas particulier, le problème des surfaces intégrales et de leurs caractéristiques, se ramenant au problème des géodésiques de la surface (Φ), exige l'intégration d'une équation du second ordre. Ceci concorde bien avec le résultat obtenu dans le cas général au n° 87.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

INTRODUCTION..... 1

CHAPITRE PREMIER.

INDICATIONS GÉNÉRALES SUR LA MÉTHODE SUIVIE.

§ 1. Torsion tangente. — Axoïdes. — Viration des axoïdes..... 16
2. Coordonnées choisies..... 17
3. Caractères du mouvement du trièdre par rapport à l'un des corps..... 18
4. Propriété des surfaces réglées. — Cas d'une surface développable..... 20
5. Expressions générales de la vitesse. — Fixité d'un point..... 22
6. Interprétation des rotations p et r..... 23
7. Conditions de viration. — Réduction des expressions des vitesses..... 25

CHAPITRE II.

LE PROBLÈME DES COURBES ENVELOPPES.

§ 8. Caractère exceptionnel des courbes douées d'enveloppes. — Courbes conjuguées. — Cas des mouvements dits plans ou sphériques..... 29
9. Cône des vitesses. — Caractère des courbes douées d'enveloppes. — Hélices exceptionnelles..... 30
10. Du glissement..... 33
11. Cas d'une rotation tangente. — Définition du cône des vitesses dans ce cas..... 34
12. Cas spécial d'un corps qui glisse sur un plan..... 35
13. Rôle du cône supplémentaire du cône des vitesses. — Le complexe linéaire $\mathcal{L}$. — Normales stationnaires..... 36

IMPRIMERIE NATIONALE.

Pages.

§ 14. Représentation analytique des normales stationnaires. — Recherche générale de la caractéristique d'un plan. — Application à la caractéristique du plan normal. — Le plan auxiliaire..... 37

15. Complexe linéaire auxiliaire $\mathcal{C}_1$..... 40

16. Directrices de la congruence des normales stationnaires..... 42

CHAPITRE III.

DÉTERMINATION DES COURBES DOUÉES D'ENVELOPPE.

§ 17. Question d'analyse à laquelle se ramène le problème. — Emploi d'une méthode particulière au problème. — Système d'équations définitif. 44

18. Les courbes d'engrènement..... 47

19. Les trajectoires comme cas particuliers d'enveloppes..... 47

20. Les courbes à enveloppes définies comme trajectoires des points d'un corps auxiliaire mobile..... 48

21. Détermination des éléments de viration du corps auxiliaire. — Mouvements hélicoïdaux tangents sur la même vis. — Viration simultanée des trois axoïdes (Φ), (Φ'), (Φ_μ)..... 50

22. Extension complète des propriétés du mouvement plan..... 52

23. Files de cercles. — Files d'hélices..... 53

24. Remarque importante sur les conditions nécessaires pour définir l'équipage des courbes (e)..... 54

25. Intégration des équations des courbes d'engrènement. — Leur réduction aux quadratures..... 55

CHAPITRE IV.

APPLICATION À LA VIRATION DE DEUX HYPERBOLOÏDES DE RÉVOLUTION.

§ 26. Formules et notations..... 60

27. Intégration complète dans ce cas des équations des courbes d'engrènement..... 63

28. Interprétation des résultats..... 66

Pages.

§ 29. Justification directe de ces résultats. — Nouvelle définition des courbes d'engrènement 68

30. Usage spécial de cette nouvelle définition. — Courbes de circonscription de deux surfaces rotoïdes 70

31. Exemples particuliers 72

32. Représentation des courbes (e), (e') 74

CHAPITRE V.

AXES DE COURBURE. — POINTS ASSOCIÉS.

§ 33. Le problème des courbures. — Recherche des axes de courbure 76

34. Interprétation des résultats. — Point associé 79

35. Caractère réciproque de la correspondance entre un point et son associé. — Plans polaires de deux points associés. — Intervention du cylindre polaire réciproque du cercle de l'infini 81

36. Correspondance birationnelle, réciproque et cubique. — Expression analytique de la correspondance 83

37. Points qui coïncident avec leur associé 85

38. Points dont l'associé est indéterminé. — Premier cas d'indétermination. — Second cas d'indétermination. — La courbe (c^4). — Les directrices de la congruence des normales stationnaires sont des cordes de (c^4) 86

39. Lieu des associés des points d'un plan. — Surface cubique Σ^3_Ω. — Génération de la surface par deux faisceaux homographiques de plans et de quadriques. — Bases des deux faisceaux. — Définition de quatre couples d'éléments homologues particuliers 87

40. Décomposition de Σ^3_Ω 91

41. Cubique gauche 93

CHAPITRE VI.

FAISCEAUX HOMOGRAPHIQUES DES AXES DE COURBURE DES COURBES CONJUGUÉES.

CENTRES DE COURBURE.

§ 42. Correspondance homographique entre les axes de courbure. — Caractère singulier de la correspondance homographique. — La droite d_P est le rayon double unique 95

Pages.

§ 43. Formes métriques de la correspondance homographique..... 97

44. Autre forme métrique. — Signification des points P_2, $\overline{P'_2}$. — Axes des trajectoires dans le mouvement direct et dans le mouvement inverse. 99

45. Détermination du point P'_2. — Le point Q..... 101

46. Expression du quotient $\frac{r'-r}{p}$..... 104

47. Plans osculateurs. — Faisceaux homographiques qu'ils forment. — Homographie sur d_p des pôles des plans osculateurs..... 105

48. Centres de courbure. — Théorème remarquable concernant ces centres. 107

49. Toute droite peut-elle être axe de courbure d'une courbe c^2..... 108

49 *bis*. Remarque sur la courbure des hélices exceptionnelles..... 109

CHAPITRE VII.

SUR L'EXTENSION DES PROPRIÉTÉS DES COURBURES DES COURBES DOUÉES D'ENVELOPPES À UNE CLASSE ÉTENDUE DE COURBES.

§ 50. Retour au cône des vitesses. — Courbes définies par une propriété de leur tangente..... 112

51. Extension de la notion de point associé..... 113

52. Faisceau des axes de courbure. — Plans osculateurs..... 115

53. Remarques sur la définition du point P_1. — Le cône supplémentaire. — Cas où P_1 est à l'infini. — Cas d'un complexe de droites..... 117

54. Examen de l'équation linéaire. — Extension des théorèmes de Meusnier et d'Euler..... 119

CHAPITRE VIII.

CAS PARTICULIER OÙ LES AXOÏDES ROULENT SANS GLISSER.

CAS PLUS SPÉCIAL DES DÉVELOPPABLES.

§ 55. Cas de la rotation tangente. — Dégénérescences afférentes à ce cas. — Congruence des normales stationnaires devenue singulière. — Situation singulière du point associé..... 123

56. Éléments de l'homographie qui relie les axes. — Construction simple dans ce cas du vecteur $\overline{PP'_2}$..... 125

Pages.

§ 57. Forme particulièrement simple de l'équation d'homographie dans ce cas. — Conséquences diverses 126

58. Cas plus particulier où les surfaces roulantes $(\Phi), (\Phi')$ sont des développables. — Nouvelles dégénérescences. — Position du point associé. — Explication de ce résultat. — Décomposition de la congruence des normales stationnaires 128

59. Détermination sans aucune intégration des lignes d'engrènement dans ce cas 130

60. Premier exemple 132

61. Deuxième exemple 134

62. Troisième exemple 135

CHAPITRE IX.

CAS OÙ LES SURFACES QUI VIRENT SONT DES CYLINDRES, AVEC OU SANS GLISSEMENT.

§ 63. Choix des coordonnées dans ce cas spécial. — Valeur des rotations. — Équations fondamentales 138

64. Recherche des axes de courbure 140

65. Correspondance entre points associés. — Homographie des axes de courbure. — Le vecteur $\overline{PP'_2}$ 143

66. Cas spécial du roulement simple. — Simplifications considérables. — Axes de courbure 145

67. Relation classique d'Euler 147

68. Cas du point fixe 150

CHAPITRE X.

DÉVELOPPABLES CONJUGUÉES.

§ 69. Le problème des développables conjuguées 151

70. Caractéristiques d'un plan. — Coïncidence des deux caractéristiques. — Équations du problème 152

71. Rôle de la caractéristique d'entraînement. — Hélicoïdes développables exceptionnels 156

SUR LE MOUVEMENT
DES MILIEUX VISQUEUX
ET
LES QUASI-ONDES

MÉMOIRES
PRÉSENTÉS PAR DIVERS SAVANTS
À L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'INSTITUT DE FRANCE
EXTRAIT DU TOME XXXV

SUR LE MOUVEMENT DES MILIEUX VISQUEUX ET LES QUASI-ONDES

PAR

LOUIS ROY

PARIS
IMPRIMERIE NATIONALE

MDCCCCXIV

MÉMOIRES

PRÉSENTÉS PAR DIVERS SAVANTS

À L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT NATIONAL DE FRANCE.

TOME XXXV. — N° 2.

SUR LE MOUVEMENT DES MILIEUX VISQUEUX ET LES QUASI-ONDES,

PAR

LOUIS ROY.

INTRODUCTION.

L'équation aux dérivées partielles qu'on rencontre dans l'étude du mouvement des milieux visqueux peu déformés est du type suivant :

$$\text{(I)} \qquad A\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial t}+a^2\Delta\varphi-\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0,$$

où A, a^2 désignent deux constantes positives, φ une fonction du temps t et de trois coordonnées x, y, z et Δ le symbole opératoire $\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

IMPRIMERIE NATIONALE.

C'est à cette équation que se ramène le problème des petits mouvements d'un milieu vitreux qui n'est soumis à aucune force extérieure et dont la température est uniforme[1]; la dilatation cubique et les composantes de la rotation moyenne vérifient alors respectivement deux équations de la forme (I), où la quantité Λ dépend des coefficients de viscosité du milieu, tandis que la seconde a^2 est fonction de ses coefficients d'élasticité. Dans le cas particulier d'un milieu fluide, le coefficient a^2 de l'équation aux rotations est nul.

L'équation (I) se rencontre aussi, avec une ou deux variables géométriques seulement, dans l'étude du mouvement longitudinal d'un fil rectiligne[2] ou du mouvement tangentiel d'une membrane plane[3]. Enfin, suivant les idées de H. von Helmholtz, c'est encore elle que vérifient, en chaque point d'un milieu conducteur de l'électricité et non diélectrique, le potentiel électrostatique, la densité de l'électricité libre et les composantes du flux longitudinal d'électricité[4]. Le coefficient a représente alors la vitesse de la lumière, et le coefficient Λ une quantité proportionnelle à la résistivité du milieu conducteur.

Quand la fonction φ ne dépend que d'une seule variable géométrique x, l'équation (I) prend la forme plus simple :

$$\text{(II)} \qquad \Lambda \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial t} + a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0.$$

Bien que les équations (I) ou (II) présentent un intérêt capital en physique mathématique, elles n'ont pas encore fait jusqu'ici, à notre connaissance, l'objet de recherches analytiques étendues.

[1] P. Duhem, « Recherches sur l'élasticité ». (*Annales de l'École normale supérieure* (3), t. XXI, XXII, XXIII, 2e part., chap. I, § 4.)

[2] L. Roy, « Recherches sur la dynamique du fil flexible ». (*Annales de l'École normale supérieure* (3), t. XXIX, chap. V, § 3, p. 417.)

[3] L. Roy, « Sur la propagation des ondes dans les membranes flexibles ». (*Journal de mathématiques pures et appliquées* (6), t. VIII, chap. I, § 7, p. 261.)

[4] P. Duhem, « Sur l'interprétation théorique des expériences hertziennes ». (*L'Éclairage électrique*, t. IV, 1895, p. 494.)

Stokes[1] a donné une solution particulière de l'équation (II); Kirchhoff[2] a étudié le mouvement résultant d'une vibration pendulaire entretenue au point $x=0$; plus récemment, M. Boussinesq[3] a rencontré la même équation dans une étude sur les ondes aériennes; enfin, nous avons tout dernièrement intégré l'équation (II) dans le cas d'un milieu limité[4].

Lorsque Λ n'est pas nul, si l'on imagine que la fonction φ de l'équation (II) représente le déplacement d'un milieu continu ayant subi une perturbation initiale, il est facile de montrer que l'énergie totale primitivement fournie au milieu se dissipe indéfiniment à partir de l'instant initial. Multiplions, en effet, l'équation (II) par $\frac{\partial\varphi}{\partial t}dx$ et intégrons entre les limites $(-\infty, \infty)$, nous aurons :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}\left(\Lambda\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t}+a^2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dx-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2dx=0.$$

La première intégrale peut être transformée par une intégration par parties : le terme tout intégré est nul, si l'on admet que le déplacement s'annule à l'infini, de sorte que l'équation précédente peut s'écrire :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2+a^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\right]dx=-\Lambda\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t}\right)^2dx\leqslant 0.$$

On voit ainsi que la première intégrale, somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle, décroît sans cesse à partir de l'instant initial. L'égalité ci-dessus permettrait aussi de démontrer,

[1] G. Stokes, *Mathematical and Physical papers*, t. I, p. 100.

[2] Kirchhoff, *Gesammelte Abhandlungen*, p. 540.

[3] J. Boussinesq, « Sur les déformations et l'extinction des ondes aériennes, isolées ou périodiques, propagées à l'intérieur de tuyaux de conduite sans eau de longueur indéfinie ». (*Journal de physique théorique et appliquée* (2), t. X, 1891, p. 301.)

[4] L. Roy, « Recherches sur la dynamique du fil flexible ». (*Annales de l'École normale supérieure*, t. XXIX, p. 417.

par la méthode habituelle de la physique mathématique, que la solution de l'équation (II) est unique, lorsqu'on lui adjoint les deux fonctions d'état initial et qu'on impose à la solution la condition de s'annuler à l'infini.

Lorsque A est nul, les équations (I) et (II) se réduisent respectivement à l'équation du son et à celle des cordes vibrantes. On sait qu'une propriété capitale des intégrales de ces équations est de pouvoir présenter des ondes au sens d'Hugoniot, ondes qui se propagent dans le milieu avec la vitesse constante a. Or, un caractère analytique essentiel des équations (I) et (II), où A n'est pas nul, nettement opposé au précédent et récemment mis en lumière par M. Duhem [1], est que les seules ondes que puisse présenter une intégrale de ces équations sont des ondes immobiles. Relativement à ces intégrales, M. Duhem est, en effet, parvenu au résultat suivant : « Les seules ondes que puisse admettre une intégrale φ des équations (I) et (II) sont des ondes immobiles, au travers desquelles les seules dérivées d'ordre n de la fonction φ qui soient discontinues sont celles qui s'obtiennent sans aucune dérivation par rapport à t. »

Ainsi, quand A n'est pas nul, les équations (I) ou (II) ne peuvent admettre aucune onde susceptible de se propager, et ceci est vrai quelque petit que soit A. Mais, lorsque A est très petit, M. Duhem a montré qu'elles pouvaient admettre ce qu'il a appelé des *quasi-ondes*, et ces quasi-ondes se propagent sensiblement avec la vitesse a, expliquant ainsi le phénomène de la transmission du son dans les milieux naturels. Rappelons à ce propos qu'on appelle quasi-onde d'ordre n un feuillet formé par deux surfaces parallèles très rapprochées, au travers duquel une au moins des dérivées d'ordre n de la fonction φ éprouve une variation finie, tout en restant continue en chaque point; une onde véritable, au sens d'Hugoniot, est alors la limite d'une quasi-onde dont l'épaisseur tendrait vers zéro.

[1] P. Duhem, *Recherches sur l'élasticité*, 2e part., chap. I, § 4.

Mais, une quasi-onde n'étant nettement limitée ni à l'avant ni à l'arrière, le terme *vitesse de propagation* cesse lui-même d'avoir un sens précis, quand A n'est pas nul. Toutefois, M. Boussinesq[1] a réussi à lui rendre un sens, en définissant cette vitesse de la façon suivante : désignant par γ la condensation $-\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ en chaque point, il considère la quantité totale d'intumescence :

$$\text{(III)} \qquad \int_x^{\infty} \gamma dx,$$

qui se trouve à droite d'un point d'abscisse x, et il appelle *vitesse de propagation* ω la vitesse avec laquelle un observateur d'abscisse x devrait se déplacer, en regardant dans le sens des x positifs, pour avoir toujours la même quantité totale d'intumescence devant lui. La vitesse ω s'obtient évidemment en annulant la dérivée totale par rapport à t de l'intégrale (III), ce qui donne :

$$-\gamma\omega + \int_x^{\infty} \frac{\partial \gamma}{\partial t} dx = 0.$$

M. Boussinesq traite l'équation (II) par approximations successives : à une première approximation, il néglige le premier terme en A; puis, à une deuxième appproximation, il remplace le premier terme de l'équation (II) par sa valeur calculée d'après la première approximation. Il obtient ainsi la valeur de $\frac{\partial \gamma}{\partial t}$ qui, substituée dans l'équation précédente, donne pour ω :

$$\omega = a\left(1 - \frac{A}{2a}\frac{1}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial x}\right),$$

formule qui redonnerait la vitesse a, si A était nul, et qui permet de se rendre compte qualitativement de la déformation graduelle qui accompagne la propagation de l'onde.

[1] J. Boussinesq, «Sur les déformations et l'extinction des ondes aériennes, etc.». (*Journal de physique théorique et appliquée*, t. X, p. 301.)

On peut donner à la vitesse de propagation ω ainsi définie une autre expression, alors rigoureuse, qui montre bien que cette vitesse doit se réduire à a pour $\Lambda = 0$: en effet, d'après la définition même de γ, l'intégrale (III) est égale au déplacement $\varphi(x, t)$; nous avons donc, en annulant la dérivée totale de φ par rapport à t :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\omega + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

Si Λ était nul, on sait que nous aurions, en considérant seulement l'onde propagée vers les x positifs :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}a + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0,$$

ce qui montre que la dernière expression de ω se réduit bien à a pour $\Lambda = 0$, si toutefois l'intégrale φ est continue par rapport à Λ.

Le présent mémoire a pour objet l'étude de l'intégrale de l'équation (II) dans le cas d'un milieu indéfini.

Dans le premier chapitre, nous recherchons l'expression de l'intégrale générale du problème pour en étudier ensuite les propriétés analytiques essentielles : l'analogie de l'équation (II) avec l'équation de la chaleur :

$$\text{(IV)} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

apparaîtra, quand nous aurons établi que l'intégrale de l'équation (II) est une fonction analytique de t pour $t > 0$; mais, tandis que l'intégrale de (IV) est une fonction analytique de x, quelle que soit la fonction d'état initial, nous verrons qu'il ne peut en être ainsi de l'intégrale de (II) que si les fonctions d'état initial sont elles-mêmes analytiques. A ce point de vue, l'équation (II) se rapproche plutôt de l'équation des cordes vibrantes :

$$\text{(V)} \qquad a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0;$$

mais il y a encore ici une différence capitale : si l'intégrale de (II) cesse d'être analytique en un certain point, ce point est fixe, tandis que si la même particularité a lieu pour l'intégrale de (V), le point correspondant se propage avec la vitesse $\pm a$. Autrement dit, si l'intégrale de (II) présente des discontinuités, celles-ci sont forcément stationnaires, et l'on voit que ces conclusions sont entièrement d'accord avec celles que M. Duhem a tirées de la méthode d'Hugoniot.

Les deux autres chapitres sont relatifs à l'intégration effective de l'équation (II) et à l'étude du cas particulier des quasi-ondes. Nous démontrerons, à cet effet, une proposition qui nous paraît capitale, à savoir que l'intégrale de l'équation (II) est une fonction continue de Λ pour $\Lambda = 0$. Il en résulte que, pour Λ extrêmement petit, le phénomène diffère très peu de ce qu'il serait pour $\Lambda = 0$; il y a donc quasi-propagation, conformément à la théorie de M. Duhem. Comme nous obtiendrons l'expression asymptotique de l'intégrale sous forme finie, nous pourrons déterminer complètement le profil de la quasi-onde et étudier la déformation qu'il subit dans le cours du temps. Nous reconnaîtrons ainsi qu'une quasi-onde initiale s'étale progressivement en se propageant, de sorte que le phénomène de sa propagation, assez net au début, finit par devenir de plus en plus flou [1].

[1] Le présent mémoire a été résumé en trois notes insérées aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences :*

« Sur le mouvement des milieux visqueux indéfinis », t. CLVI, p. 1219, 21 avril 1913; « Sur le mouvement des milieux visqueux et les quasi-ondes », t. CLVI, p. 1309, 28 avril 1913; « Complément à deux notes récentes sur le mouvement des milieux visqueux indéfinis », t. CLVI, p. 1665, 2 juin 1913.

CHAPITRE PREMIER.

GÉNÉRALITÉS.

§ 1.

EXPRESSION DE L'INTÉGRALE DÉDUITE DE LA FORMULE DE FOURIER.

L'équation à intégrer, à laquelle nous joignons les conditions initiales, est la suivante :

$$(1)\qquad \begin{cases} \Lambda \dfrac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial t} + a^2 \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 ; \\ \text{pour } t = 0 , \\ \varphi = f(x), \qquad \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} = g(x). \end{cases}$$

$f(x)$, $g(x)$ désignent deux fonctions arbitraires de x, mais finies d'après la nature même du problème, et que nous supposons s'annuler à l'infini; il s'agit de trouver la fonction $\varphi(x, t)$ satisfaisant à ces équations valable pour toute valeur de x et toute valeur positive de t. Le milieu étant supposé indéfini, les conditions aux limites disparaissent.

Afin de fixer les idées, nous supposerons que les équations (1) définissent le mouvement longitudinal d'un fil rectiligne indéfini parfaitement flexible, de température uniforme et qui n'est soumis à aucune force extérieure : φ désignera alors le déplacement de chaque point à partir de sa position d'équilibre, Λ le coefficient de viscosité du fil, tel que nous l'avons défini dans nos *Recherches sur la dynamique du fil flexible*, et a la vitesse avec laquelle se propagerait une perturbation longitudinale si la viscosité n'existait pas.

Dans le but de nous débarrasser des constantes Λ et a, posons :

$$\Lambda = 2\lambda a^2$$

et faisons le changement de variables :

$$t = \lambda\tau, \qquad x = \lambda a\omega,$$

ω, τ étant les nouvelles variables indépendantes; il est aisé de reconnaître que le nouveau coefficient de viscosité λ est homogène à un temps et que les nouvelles variables ω, τ sont des nombres sans dimensions. La fonction $\varphi(x, t)$ devient ainsi une certaine fonction $\Phi(\omega, \tau)$ et l'on a :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}, \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau^2},$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{\lambda^2 a^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\omega^2}, \qquad \frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2\partial t} = \frac{1}{\lambda^3 a^2}\frac{\partial^3\Phi}{\partial\omega^2\partial\tau},$$

de sorte que si nous posons :

$$f(\lambda a\omega) = \mathrm{F}(\omega), \qquad \lambda g(\lambda a\omega) = \mathrm{G}(\omega),$$

nous aurons, à la place des équations (1), les suivantes :

$$(2)\qquad \begin{cases} 2\dfrac{\partial^3\Phi}{\partial\omega^2\partial\tau} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\omega^2} - \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\tau^2} = 0; \\ \text{pour } \tau = 0, \\ \Phi = \mathrm{F}(\omega), \qquad \dfrac{\partial\Phi}{\partial\tau} = \mathrm{G}(\omega). \end{cases}$$

Ce sont ces équations qu'il s'agit d'intégrer.

Supposons que les fonctions arbitraires $f(x)$, $g(x)$ satisfassent aux conditions de Dirichlet; il en sera de même des fonctions $\mathrm{F}(\omega)$,

IMPRIMERIE NATIONALE.

$G(\omega)$, et l'on sait alors que ces fonctions peuvent être mises sous forme d'intégrales doubles au moyen de l'intégrale ou formule de Fourier. Nous pourrons donc écrire :

$$(3) \qquad F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\alpha)e^{i\omega\alpha}d\alpha, \qquad G(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} G_1(\alpha)e^{i\omega\alpha}d\alpha,$$

avec $i=\sqrt{-1}$ et :

$$(3') \quad F_1(\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega)e^{-i\alpha\Omega}d\Omega, \quad G_1(a)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\Omega)e^{-i\alpha\Omega}d\Omega.$$

Cela posé, pour intégrer les équations (2), nous allons chercher à vérifier l'équation indéfinie et les conditions initiales par une intégrale de la forme :

$$(4) \qquad \Phi(\omega,\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}[F_1(\alpha)T_1(\tau,\alpha)+G_1(\alpha)T_2(\tau,\alpha)]e^{i\omega\alpha}d\alpha,$$

T_1 et T_2 désignant deux fonctions de τ et de α indépendantes de ω et qu'il s'agit de déterminer. Or, nous avons :

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau^2}=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial\tau^2}F_1+\frac{\partial^2 T_2}{\partial\tau^2}G_1\right)e^{i\omega\alpha}d\alpha,$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\omega^2}=-\int_{-\infty}^{\infty}\alpha^2(T_1F_1+T_2G_1)e^{i\omega\alpha}d\alpha,$$

$$\frac{\partial^3\Phi}{\partial\omega^2\partial\tau}=-\int_{-\infty}^{\infty}\alpha^2\left(\frac{\partial T_1}{\partial\tau}F_1+\frac{\partial T_2}{\partial\tau}G_1\right)e^{i\omega\alpha}d\alpha.$$

On voit ainsi immédiatement que l'indépendance des fonctions

F_1, G_1 exige, d'après l'équation indéfinie, que les deux fonctions T_1 et T_2 satisfassent à la même équation différentielle :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2} + 2\alpha^2 \frac{\partial T}{\partial \tau} + \alpha^2 T = 0.$$

D'autre part, pour que la fonction $\Phi(\omega, \tau)$ vérifie les conditions initiales, on doit avoir évidemment :

$$\text{pour } \tau = 0,$$
$$T_1 = 1, \qquad \frac{\partial T_1}{\partial \tau} = 0,$$
$$T_2 = 0, \qquad \frac{\partial T_2}{\partial \tau} = 1.$$

Les fonctions T_1 et T_2 sont ainsi entièrement déterminées : les racines de l'équation caractéristique de l'équation différentielle étant :

$$-\alpha^2 \pm \alpha\sqrt{\alpha^2 - 1},$$

on trouve aisément pour les fonctions cherchées :

$$T_1(\tau, \alpha) = e^{-\tau\alpha^2}\left(\alpha \frac{\operatorname{sh} \alpha\tau\sqrt{\alpha^2-1}}{\sqrt{\alpha^2-1}} + \operatorname{ch} \alpha\tau\sqrt{\alpha^2-1}\right),$$

$$T_2(\tau, \alpha) = e^{-\tau\alpha^2} \frac{\operatorname{sh} \alpha\tau\sqrt{\alpha^2-1}}{\alpha\sqrt{\alpha^2-1}},$$

sh et ch désignant respectivement le sinus et le cosinus hyperboliques. Nous obtenons donc finalement pour l'intégrale cherchée, d'après les deux formules précédentes et l'égalité (4) :

$$(5) \quad \left\{ \Phi(\omega, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[F_1(\alpha)\left(\alpha \frac{\operatorname{sh} \alpha\tau\sqrt{\alpha^2-1}}{\sqrt{\alpha^2-1}} + \operatorname{ch} \alpha\tau\sqrt{\alpha^2-1}\right) + G_1(\alpha) \frac{\operatorname{sh} \alpha\tau\sqrt{\alpha^2-1}}{\alpha\sqrt{\alpha^2-1}} \right] e^{-\tau\alpha^2 + i\omega\alpha} d\alpha. \right.$$

Il reste à nous assurer que cette dernière intégrale a un sens.

Nous avons supposé seulement jusqu'ici que les fonctions d'état initial $f(x)$, $g(x)$ sont finies, satisfont aux conditions de Dirichlet et s'annulent à l'infini; nous allons démontrer que l'intégrale (5) a un sens, si les fonctions $f(x)$, $g(x)$ satisfont en outre aux conditions suivantes :

1° A partir d'une valeur suffisamment grande mais finie de $|x|$, les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ varient toujours dans le même sens et la seconde ne présente plus de discontinuités;

2° La fonction $f(x)$, nécessairement continue puisqu'elle représente le déplacement en chaque point d'un milieu continu, admet une dérivée $f'(x)$ satisfaisant aux mêmes conditions que la fonction $g(x)$.

Il est alors bien clair que les fonctions $F(\omega)$, $G(\omega)$ posséderont respectivement les mêmes propriétés que les fonctions $f(x)$ et $g(x)$.

Cela posé, remarquons que les quantités :

$$(6) \qquad e^{-\tau\alpha^2}\operatorname{sh}\alpha\tau\sqrt{\alpha^2-1}, \qquad e^{-\tau\alpha^2}\operatorname{ch}\alpha\tau\sqrt{\alpha^2-1}$$

restent finies lorsque $|\alpha|$ augmente indéfiniment, pourvu qu'on ait $\tau \geqslant 0$; en effet, si l'on met le radical $\sqrt{\alpha^2-1}$ sous la forme $\alpha\sqrt{1-\frac{1}{\alpha^2}}$ et qu'on développe en série ce dernier radical, on aura par exemple :

$$(7) \qquad 2e^{-\tau\alpha^2}\operatorname{sh}\alpha\tau\sqrt{\alpha^2-1} = e^{-\frac{\tau}{2}\left(1+\frac{1}{4\alpha^2}+\cdots\right)} - e^{-\tau\alpha^2\left(2-\frac{1}{2\alpha^2}-\cdots\right)}$$

avec une formule analogue pour le cosinus hyperbolique. Les quantités (6) ont donc comme limite commune $\frac{1}{2}e^{-\frac{\tau}{2}}$ pour $|\alpha|$ infini, de sorte que, pour établir que l'intégrale (5) a un sens, il suffit de montrer que la fonction $F_1(\alpha)$ est au plus de l'ordre de $\frac{1}{\alpha^2}$ pour $|\alpha|$ très grand et que la fonction $G_1(\alpha)$ reste finie dans les mêmes conditions.

Cette démonstration peut se faire en procédant de la même façon que pour rechercher l'ordre de grandeur des coefficients de la série de Fourier[1]. Considérons, en effet, la deuxième des formules (3′) : d'après les hypothèses faites, on peut partager le champ d'intégration illimité de la variable Ω en un nombre fini d'intervalles partiels, tels que, dans chacun d'eux, la fonction $G(\Omega)$ puisse être regardée comme la différence de deux fonctions *continues* positives non croissantes. Soit (a, b) l'un quelconque de ces intervalles partiels; on déduit aisément du second théorème de la moyenne :

$$\left| \int_a^b G(\Omega) e^{-i\alpha\Omega} d\Omega \right| < \frac{M}{|\alpha|},$$

M étant un nombre fixe et cette inégalité reste valable pour b infini. Comme le nombre des intervalles partiels est limité, il s'ensuit que la fonction $G_1(\alpha)$ est au plus de l'ordre de $\frac{1}{\alpha}$ pour $|\alpha|$ très grand, ou encore que la fonction $\alpha G_1(\alpha)$ reste finie dans les mêmes conditions.

En intégrant par parties la première des formules (3′) et en tenant compte de ce que la fonction $F(\omega)$ s'annule à l'infini, il vient :

$$F_1(\alpha) = \frac{1}{2\pi i\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} F'(\Omega) e^{-i\alpha\Omega} d\Omega ;$$

il résulte alors de la deuxième hypothèse faite et du résultat précédent que la fonction $F_1(\alpha)$ est au plus de l'ordre de $\frac{1}{\alpha^2}$ pour $|\alpha|$ très grand, ou encore que la fonction $\alpha^2 F_1(\alpha)$ reste finie.

Il est donc établi que l'intégrale (5) a un sens et nous avons bien ainsi la solution du problème.

[1] E. Picard, *Traité d'analyse*, t. I, 2e éd., p. 252.

§ 2.

PROPRIÉTÉS ANALYTIQUES DE L'INTÉGRALE ; ANALOGIE DE CELLE-CI AVEC L'INTÉGRALE DE L'ÉQUATION DE LA CHALEUR ET DE L'ÉQUATION DES CORDES VIBRANTES.

La fonction $\Phi(\omega, \tau)$ définie par l'égalité (5) peut-elle être une fonction analytique de ω et de τ? Pour répondre à cette question, nous nous appuierons sur les deux théorèmes suivants, que nous nous contenterons d'énoncer [1] :

I. Soit $f(z, \alpha)$ une fonction de deux variables z, α holomorphe par rapport à z à l'intérieur d'un cercle décrit du point $z = a$ comme centre et $\mathrm{M}(\alpha)$ le module maximum de $f(z, \alpha)$ sur ce cercle; si l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{M}(\alpha) d\alpha$ a une valeur finie, l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z, \alpha) d\alpha$$

définit une fonction de z holomorphe à l'intérieur du domaine considéré.

II. Soit $f(z)$ une fonction uniforme de z pouvant admettre à distance finie un certain nombre de points singuliers et telle que le produit $zf(z)$ reste fini quand $|z|$ augmente inéfiniment ; l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{ixz} dz$$

[1] H. Poincaré, *Théorie analytique de la propagation de la chaleur*, chap. VII, p. 123 et 118.

définit une fonction de x analytique pour toute valeur réelle de x, sauf pour la valeur $x = 0$.

Cela posé, nous allons établir la proposition suivante :

« L'intégrale $\Phi(\omega, \tau)$, définie par l'égalité (5) et où la variable τ est regardée comme une variable complexe, la variable ω ayant une valeur réelle quelconque, est une fonction holomorphe de τ en tout point du plan situé à droite de l'axe imaginaire ;

« L'intégrale $\Phi(\omega, \tau)$ cesse d'être holomorphe sur cet axe, mais elle reste continue par rapport à τ ainsi que sa dérivée $\frac{\partial \Phi}{\partial \tau}$. »

Remarquons tout d'abord que la fonction sous le signe $\int$ est une fonction holomorphe de τ et que, si les limites de l'intégrale étaient finies, la démonstration serait immédiate ; il nous suffit donc de donner celle-ci pour l'intégrale :

$$(8)\quad \int_a^\infty \left[F_1(\alpha)\left(\alpha \frac{\operatorname{sh} \alpha\tau\sqrt{\alpha^2-1}}{\sqrt{\alpha^2-1}} + \operatorname{ch} \alpha\tau\sqrt{\alpha^2-1}\right) + G_1(\alpha)\frac{\operatorname{sh} \alpha\tau\sqrt{\alpha^2-1}}{\alpha\sqrt{\alpha^2-1}}\right] e^{-\tau\alpha^2 + i\omega\alpha}\, d\alpha,$$

où l'on peut supposer $a > 1$.

Soit alors $\tau = X + iY$ l'affixe d'un point d'un cercle de rayon R décrit d'un point τ_0 comme centre ; nous aurons sur ce cercle $|e^{-\tau\alpha^2}| = e^{-X\alpha^2}$ et, comme on le voit facilement :

$$|\operatorname{sh} \alpha\tau\sqrt{\alpha^2-1}| \leq \operatorname{ch} \alpha X\sqrt{\alpha^2-1}, \qquad |\operatorname{ch} \alpha\tau\sqrt{\alpha^2-1}| \leq \operatorname{ch} \alpha X\sqrt{\alpha^2-1}.$$

L'intégrale du module de la quantité sous le signe $\int$ est donc au plus égale à l'intégrale :

$$\int_a^\infty e^{-X\alpha^2} \operatorname{ch} \alpha X\sqrt{\alpha^2-1}\left[|F_1(\alpha)|\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}} + 1\right) + \frac{|G_1(\alpha)|}{\alpha\sqrt{\alpha^2-1}}\right] d\alpha.$$

Or cette intégrale a une valeur finie, quelle que soit la position du point $\tau = X + iY$ sur le cercle, si l'on suppose $X \geqslant 0$, c'est-à-dire si le cercle de rayon R se trouve tout entier à droite de l'axe imaginaire ou est tout au plus tangent à cet axe; cela tient à ce que, pour α très grand, la quantité dépendant de X sous le signe $\int$ reste finie, tandis que la quantité entre crochets est au plus de l'ordre de $\frac{1}{\alpha^2}$. D'après le théorème I, l'intégrale (5) est donc une fonction holomorphe de τ pour toute valeur de cette variable située à droite de l'axe imaginaire.

D'ailleurs, l'intégrale ne peut être holomorphe en aucun point de cet axe : en effet, s'il en était ainsi, l'intégrale (5) devrait être finie pour une valeur $\tau = X + iY$ correspondant à une valeur de X négative et suffisamment petite. Or, il est facile de voir que, dans ces conditions, le module de la quantité sous le signe $\int$ croîtrait indéfiniment avec α, de sorte que l'intégrale serait infinie.

Toutefois, l'intégrale (5) reste continue en chaque point de l'axe imaginaire quand on se dirige vers ce point suivant un chemin situé à droite de l'axe; cela tient à ce que l'intégrale est uniformément convergente par rapport à $\tau = X + iY$ pour $X \geqslant 0$ et il en est de même de sa dérivée par rapport à τ.

Il résulte de ce qui précède qu'en particulier la fonction $\Phi(\omega, \tau)$ définie par l'égalité (5) est une fonction analytique de la variable réelle τ, pour $\tau > 0$, continue pour $\tau = 0$ ainsi que sa dérivée par rapport à τ. Donc, lorsque τ tend vers zéro par valeurs positives, les fonctions $\Phi(\omega, \tau)$, $\frac{\partial \Phi(\omega, \tau)}{\partial \tau}$ tendent respectivement vers les valeurs initiales $F(\omega)$ et $G(\omega)$.

Remarquons que les propriétés que nous venons de démontrer appartiennent également à l'intégrale bien connue :

$$(9) \qquad \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega) e^{-\frac{(\Omega - \omega)^2}{4\tau}} d\Omega,$$

donnée autrefois par Laplace de l'équation de la chaleur :

$$(10)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial\tau}=\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\omega^2}; \\ \text{pour } \tau=0, \\ \Phi=F(\omega). \end{cases}$$

Étudions maintenant l'intégrale (5) considérée comme fonction de la variable réelle ω; nous allons à cet effet établir la proposition suivante :

« L'intégrale $\Phi(\omega,\tau)$, définie par l'égalité (5) et où la variable τ a une valeur quelconque située à droite de l'axe imaginaire, est une fonction continue de la variable réelle ω;

« Si les fonctions d'état initial $F(\omega)$, $G(\omega)$ sont formées par une succession d'arcs analytiques, l'intégrale $\Phi(\omega,\tau)$ est une fonction analytique de la variable réelle ω pour toutes les valeurs de ω, sauf pour celles où les fonctions $F(\omega)$, $G(\omega)$ cessent elles-mêmes d'être analytiques. »

Tout d'abord, la continuité par rapport à ω résulte de ce que l'intégrale (5) est uniformément convergente.

Imaginons ensuite, pour simplifier la démonstration de la deuxième partie, qu'on ait $G(\omega)=0$ et que la fonction $F(\omega)$ soit définie de la manière suivante : $H(\omega)$ étant une fonction analytique dans un intervalle fini (b,c) et s'annulant aux limites de cet intervalle, nous supposerons qu'on ait :

$$\begin{aligned} &F(\omega)=0 && \text{pour} && \omega\leqslant b, \\ &F(\omega)=H(\omega) && \text{pour} && b\leqslant\omega\leqslant c, \\ &F(\omega)=0 && \text{pour} && \omega\geqslant c. \end{aligned}$$

Il s'agit de démontrer que l'intégrale correspondante :

$$(11)\qquad \Phi(\omega,\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}F_1(\alpha)\left(\alpha\frac{\operatorname{sh}\alpha\tau\sqrt{\alpha^2-1}}{\sqrt{\alpha^2-1}}+\operatorname{ch}\alpha\tau\sqrt{\alpha^2-1}\right)e^{-\tau\alpha^2+i\omega\alpha}\,d\alpha,$$

IMPRIMERIE NATIONALE.

où l'on a posé :

$$(12) \qquad F_1(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_b^c H(\Omega) e^{-i\alpha\Omega} d\Omega,$$

est une fonction analytique de ω, sauf pour les valeurs $\omega = b$ et $\omega = c$.

Comme précédemment, l'intégrale (11) serait analytique pour toute valeur de ω si ses limites étaient finies; il suffit donc de démontrer le théorème pour la fonction :

$$\Psi(\omega,\tau) = \int_a^\infty F_1(\alpha)\left(\alpha \frac{\operatorname{sh}\alpha\tau\sqrt{\alpha^2-1}}{\sqrt{\alpha^2-1}} + \operatorname{ch}\alpha\tau\sqrt{\alpha^2-1}\right) e^{-\tau\alpha^2+i\omega\alpha} d\alpha,$$

où l'on peut encore supposer $a > 1$.

La fonction $H(\omega)$ admet une suite illimitée de dérivées dans l'intervalle (b,c), puisqu'elle est analytique; nous pouvons donc intégrer n fois par parties l'expression (12) de $F_1(\alpha)$ et, en posant :

$$A_n = \frac{H^{(n-1)}(b) e^{-ib\alpha} - H^{(n-1)}(c) e^{-ic\alpha}}{2\pi},$$

$$R_n = \frac{1}{2\pi(i\alpha)^n}\int_b^c H^{(n)}(\Omega) e^{-i\alpha\Omega} d\Omega,$$

on trouve par un calcul facile :

$$(13) \qquad F_1(\alpha) = \frac{A_2}{(i\alpha)^2} + \frac{A_3}{(i\alpha)^3} + \cdots + \frac{A_n}{(i\alpha)^n} + R_n.$$

Mais, d'après un théorème dû à M. Pringsheim [1], on sait qu'une des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction soit

[1] E. Picard, *Traité d'analyse*, t. I, 2e éd., p. 27.

développable en série de Taylor dans un intervalle donné et par suite analytique, est que la fonction possède des dérivées de tout ordre restant finies, pour toute valeur de la variable appartenant à l'intervalle. Nous aurons donc dans l'intervalle (b, c), en désignant par M un nombre positif fixe :

$$|H^{(n)}(\omega)| < M$$

quel que soit n et par suite :

$$(14) \qquad |A_n| < \frac{M}{\pi}, \qquad |R_n| < \frac{M(c-b)}{2\pi\alpha^n}.$$

Posons alors, pour abréger :

$$\chi(\alpha, \tau) = e^{-\tau\alpha^2}\left(\alpha \frac{\operatorname{sh}\alpha\tau\sqrt{\alpha^2-1}}{\sqrt{\alpha^2-1}} + \operatorname{ch}\alpha\tau\sqrt{\alpha^2-1}\right),$$

puis multiplions les deux membres de l'égalité (13) par $\chi(\alpha,\tau)e^{i\omega\alpha}d\alpha$ et intégrons entre les limites (a, ∞); il viendra :

$$(15) \qquad \Psi(\omega,\tau) = \sum_{p=2}^{n} \int_a^{\infty} \frac{A_p}{(i\alpha)^p}\chi(\alpha,\tau)e^{i\omega\alpha}d\alpha + \int_a^{\infty} R_n\chi(\alpha,\tau)e^{i\omega\alpha}d\alpha.$$

Le terme complémentaire représenté par la dernière intégrale tend vers zéro quand n augmente indéfiniment. En effet, la quantité $\chi(\alpha,\tau)e^{i\omega\alpha}$ reste finie dans tout le champ d'intégration, quels que soient ω et τ; d'après la deuxième des inégalités (14), le module de cette dernière intégrale est donc inférieur au produit d'un nombre fixe par l'intégrale :

$$\int_a^{\infty} \frac{d\alpha}{\alpha^n} = \frac{1}{(n-1)a^{n-1}},$$

qui tend vers zéro. L'égalité (15) nous donne donc :

$$(16)\quad \Psi(\omega,\tau)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\int_a^{\infty}\chi(\alpha,\tau)\frac{H^{(n-1)}(b)e^{i(\omega-b)\alpha}-H^{(n-1)}(c)e^{i(\omega-c)\alpha}}{(i\alpha)^n}\,d\alpha,$$

série uniformément convergente par rapport à chacune des deux variables.

Cela posé, nous allons démontrer que chaque terme de la série (16) est une fonction analytique pour toute valeur de ω, sauf pour $\omega=b$ et $\omega=c$; montrons, par exemple, que l'intégrale :

$$\int_a^{\infty}\chi(\alpha,\tau)e^{i(\omega-b)\alpha}\frac{d\alpha}{\alpha^n}$$

ne cesse d'être analytique que pour $\omega=b$.

D'après la formule (7) et l'autre analogue que nous n'avons pas écrite, on reconnaît que l'intégrale précédente est de la forme :

$$\int_a^{\infty}f(\alpha,\tau)e^{i(\omega-b)\alpha}d\alpha+\int_a^{\infty}g(\alpha,\tau)e^{-2\tau\alpha^2+i\omega\alpha}d\alpha,$$

$f(\alpha,\tau)$ étant une fonction satisfaisant à l'énoncé du théorème II et $g(\alpha,\tau)$ une fonction finie. D'après le théorème II, la première intégrale est donc une fonction analytique de ω, sauf pour $\omega=b$; quant à la deuxième, c'est une fonction holomorphe dans tout le plan. Regardons, en effet, pour un instant, ω comme une variable complexe et posons $\omega=x+iy$, avec $\tau=X+iY$ et $X>0$; la propriété que nous venons d'énoncer résulte, d'après le théorème I, de ce que l'intégrale :

$$\int_a^{\infty}e^{-2X\alpha^2-y\alpha}d\alpha$$

a une valeur finie quel que soit y.

Ainsi, chaque terme de la série (16) est une fonction analytique de ω, sauf pour $\omega = b$ et $\omega = c$. En un point quelconque $\omega = \omega_0$ différent des précédents, on peut donc le développer en série entière en $\omega - \omega_0$ absolument et uniformément convergente et l'on reconnaît assez facilement que l'intervalle de convergence correspondant peut être choisi indépendant du rang que le terme considéré occupe dans la série (16). La fonction $\Psi(\omega, \tau)$ sera donc représentée, dans le même intervalle, par une série double absolument convergente, qu'on pourra par suite évaluer en groupant ensemble les termes de même puissance par rapport à $\omega - \omega_0$; ce sera donc aussi une fonction analytique de ω, sauf aux points déjà considérés et il en sera nécessairement de même de l'intégrale (11).

Cette dernière propriété de l'intégrale (5) du mouvement d'un milieu visqueux diffère donc essentiellement de la propriété correspondante de l'intégrale (9) du mouvement de la chaleur; en effet, on sait que, pour $\tau > 0$, l'intégrale (9) est toujours une fonction analytique de ω pour toute valeur de ω, quelle que soit la nature de la fonction d'état initial, même, par conséquent, si celle-ci est discontinue ou n'est analytique en aucun point.

Au point de vue qui nous occupe, l'intégrale (5) se rapproche plutôt de l'intégrale bien connue :

$$(17) \qquad \frac{1}{2}\left[F(\omega+\tau)+F(\omega-\tau)+\int_{\omega-\tau}^{\omega+\tau} G(\Omega)\,d\Omega\right]$$

de l'équation des cordes vibrantes :

$$(18) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\omega^2} - \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\tau^2} = 0\,; \\ \text{pour } \tau = 0\,, \\ \Phi = F(\omega), \qquad \dfrac{\partial\Phi}{\partial\tau} = G(\Omega)\,; \end{cases}$$

mais il y a là encore une différence capitale. Par exemple, si l'une des fonctions d'état initial cesse d'être analytique en un point $\omega = \omega_0$, nous venons de voir que l'intégrale (5) cessera elle-même d'être analytique en ce point $\omega = \omega_0$, quel que soit τ; au contraire, l'intégrale (17) cessera d'être analytique aux deux points $\omega = \omega_0 \pm \tau$. Ainsi les points de discontinuité de l'intégrale (5) restent stationnaires, tandis que ceux de l'intégrale (17) se propagent en sens inverse avec une vitesse constante.

Remarquons enfin que ces conclusions sont entièrement d'accord avec celles que M. Duhem a déduites de la méthode d'Hugoniot et que nous avons rappelées dans l'Introduction.

§ 3.

ÉTUDE D'UN CAS PARTICULIER.

Considérons l'expression :

$$(5') \quad \Phi(\omega, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\alpha) \left(\alpha \frac{\operatorname{sh} \alpha\tau \sqrt{\alpha^2 - 1}}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} + \operatorname{ch} \alpha\tau \sqrt{\alpha^2 - 1} \right) e^{-\tau\alpha^2 + i\omega\alpha} d\alpha$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} G_1(\alpha) \frac{\operatorname{sh} \alpha\tau \sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha \sqrt{\alpha^2 - 1}} e^{-\tau\alpha^2 + i\omega\alpha} d\alpha$$

de l'intégrale des équations (2); les fonctions $F_1(\alpha)$, $G_1(\alpha)$ étant elles-mêmes des intégrales définies données par les formules (3'), la fonction $\Phi(\omega, \tau)$ se trouve en réalité exprimée sous forme d'intégrales doubles. Pour pousser plus loin l'étude du problème posé, il est donc nécessaire d'effectuer une des deux intégrations et, si l'on tient à laisser arbitraires les fonctions d'état initial, on est conduit à effectuer l'intégration par rapport à α. Or, dans le cas

qui nous occupe, l'intégration par rapport à α de la première intégrale de l'égalité (5′) ne peut pas être effectuée de suite entre les limites $(-\infty, \infty)$, car l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\alpha\frac{\operatorname{sh}\alpha\tau\sqrt{\alpha^2-1}}{\sqrt{\alpha^2-1}}+\operatorname{ch}\alpha\tau\sqrt{\alpha^2-1}\right)e^{-\tau\alpha^2+i(\omega-\Omega)\alpha}d\alpha$$

à laquelle on est ainsi conduit n'a pas de sens, puisque la quantité sous le signe $\int$ ne tend par vers zéro pour $|\alpha|$ infini. Il faudrait donc intégrer seulement entre les limites $(-\alpha, \alpha)$, qu'on ne ferait infinies qu'à la fin des calculs. Mais une fonction primitive étant généralement plus difficile à calculer qu'une intégrale définie, il paraît préférable de procéder autrement.

Nous résoudrons donc cette difficulté en restreignant un peu la généralité des fonctions d'état initial : à cet effet, nous substituerons à la fonction $f(x)$ une fontion $f_1(x, z)$ dépendant d'un paramètre auxiliaire z, continue par rapport à ce paramètre et se réduisant à $f(x)$ pour $z=0$; en outre, la présence de ce paramètre devra introduire sous le signe $\int$ de l'intégrale précédente une exponentielle en α ou α^2 à coefficient négatif destiné à assurer sa convergence. Pour plus de généralité, nous introduirons de même un paramètre auxiliaire z' dans l'autre fonction d'état initial, en substituant à la fonction $g(x)$ une fonction $g_1(x, z')$ qui se réduira à la précédente pour $z'=0$.

Les fonctions $f_1(x, z)$, $g_1(x, z')$ seront supposées définies par les formules :

$$(19)\quad\begin{cases} f_1(x,z)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(x+\alpha\sqrt{z})e^{-\alpha^2}d\alpha=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)d\xi\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z}{4}\beta^2+i(x-\xi)\beta}d\beta, \\ g_1(x,z')=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}g(x+\alpha\sqrt{z'})e^{-\alpha^2}d\alpha=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g(\xi)d\xi\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z'}{4}\beta^2+i(x-\xi)\beta}d\beta, \end{cases}$$

avec :

$$z > 0, \qquad z' \geq 0;$$

on reconnaît ainsi dans l'une ou l'autre des formules (19) la loi du refroidissement d'une barre indéfinie placée suivant l'axe des x et où les paramètres z ou z' joueraient le rôle du temps. On sait alors que les fonctions $f_1(x, z)$, $g_1(x, z')$ sont des fonctions continues de z et de z' pour $(z, z') \geq 0$ et qu'on a :

$$f_1(x, 0) = f(x), \qquad g_1(x, 0) = g(x).$$

On peut donc toujours attribuer à z et à z' des valeurs positives suffisamment petites pour que les fonctions $f_1(x, z)$, $g_1(x, z')$ diffèrent d'aussi peu qu'on veut des fonctions arbitraires $f(x)$ et $g(x)$. Enfin, nos nouvelles fonctions d'état initial sont analytiques par rapport à x pour $(z, z') > 0$; dans ces conditions, l'intégrale correspondante $\varphi(x, t)$ sera également une fonction analytique de x.

Cela posé, faisons le changement de variables qui nous a permis de passer des équations (1) aux équations (2); il est facile de voir que les valeurs initiales de la fonction $\Phi(\omega, \tau)$ seront :

$$\Phi(\omega, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} F_2(\alpha) e^{i\omega\alpha} d\alpha, \qquad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \tau}\right)_{\tau = 0} = \int_{-\infty}^{\infty} G_2(\alpha) e^{i\omega\alpha} d\alpha,$$

avec :

$$(20) \qquad \begin{cases} F_2(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega) e^{-\frac{z}{4a^2\lambda^2}\alpha^2 - i\alpha\Omega} d\Omega, \\ G_2(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\Omega) e^{-\frac{z'}{4a^2\lambda^2}\alpha^2 - i\alpha\Omega} d\Omega, \end{cases}$$

de sorte que, si nous posons :

$$\theta = \tau + \frac{\xi}{4a^2\lambda^2}, \qquad \theta' = \tau + \frac{\xi'}{4a^2\lambda^2}$$

et si nous remarquons que les fonctions $F_1(\alpha)$, $G_1(\alpha)$ de l'égalité (5') doivent maintenant être remplacées respectivement par $F_2(\alpha)$, $G_2(\alpha)$, il viendra, d'après les égalités (5') et (20) :

$$(21)\quad \left\{\begin{array}{l} \Phi(\omega, \tau) = \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega)\int_{-\infty}^{\infty} \alpha\left(\frac{\operatorname{sh}\alpha\tau\sqrt{\alpha^2-1}}{\sqrt{\alpha^2-1}} + \operatorname{ch}\alpha\tau\sqrt{\alpha^2-1}\right) e^{-\theta\alpha^2 + i(\omega-\Omega)\alpha} d\alpha d\Omega \\ \\ + \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} G(\Omega)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}\alpha\tau\sqrt{\alpha^2-1}}{\alpha\sqrt{\alpha^2-1}}\, e^{-\theta'\alpha^2 + i(\omega-\Omega)\alpha} d\alpha d\Omega. \end{array}\right.$$

Revenons maintenant aux variables primitives x, t au moyen des formules $t = \lambda\tau$, $x = \lambda a\omega$ et posons $\xi = \lambda a\Omega$; en ne faisant plus figurer dans les intégrales que des quantités réelles et en posant :

$$(22)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathcal{F}(y, \tau) = \dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-\theta\alpha^2}\left(\alpha\frac{\operatorname{sh}\alpha\tau\sqrt{\alpha^2-1}}{\sqrt{\alpha^2-1}} + \operatorname{ch}\alpha\tau\sqrt{\alpha^2-1}\right)\cos\alpha y d\alpha, \\ \\ \mathcal{G}(y, \tau) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-\theta'\alpha^2}\frac{\operatorname{sh}\alpha\tau\sqrt{\alpha^2-1}}{\alpha\sqrt{\alpha^2-1}}\cos\alpha y d\alpha, \end{array}\right.$$

l'intégrale (21) deviendra, en définitive :

$$(23)\quad \varphi(x, t) = \frac{1}{a\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[f(\xi)\mathcal{F}\left(\frac{x-\xi}{a\lambda}, \frac{t}{\lambda}\right) + g(\xi)\mathcal{G}\left(\frac{x-\xi}{a\lambda}, \frac{t}{\lambda}\right)\right] d\xi.$$

IMPRIMERIE NATIONALE.

C'est cette intégrale que nous allons maintenant étudier; comme elle est la somme des expressions obtenues en supposant nulles successivement les fonctions f et g, nous ferons successivement ces deux hypothèses dans les deux chapitres qui vont suivre, en commençant par celle qui conduit au résultat le plus simple et qui est $f(x) = 0$.

CHAPITRE II.

CAS OÙ LE DÉPLACEMENT INITIAL EST NUL.

§ 1.

DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE DE LA FONCTION $\mathcal{G}(y, \tau)$.

Puisque nous supposons que le déplacement initial $f_1(x, z)$ est nul, il en est de même, d'après la première des formules (19), de la fonction $f(x)$, de sorte que l'égalité (23) se réduit à :

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{a\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\, \mathcal{G}\left(\frac{x-\xi}{a\lambda}, \frac{t}{\lambda}\right) d\xi. \tag{24}$$

Nous allons rechercher tout d'abord le développement de la fonction $\mathcal{G}(y, \tau)$.

On a d'une manière générale :

$$\frac{\operatorname{sh} x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

et cette série est uniformément convergente, quel que soit x. Nous avons donc aussi :

$$\frac{\operatorname{sh} \alpha\tau\sqrt{\alpha^2-1}}{\alpha\tau\sqrt{\alpha^2-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha\tau)^{2n}(\alpha^2-1)^n}{(2n+1)!}$$

et ce développement est uniformément convergent, quel que soit α; par suite, la seconde des intégrales (22) peut s'écrire :

$$(25) \qquad \mathcal{G}(y,\tau)=\tau\int_0^\infty e^{-\theta'\alpha^2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha\tau)^{2n}(\alpha^2-1)^n}{(2n+1)!}\right]\cos\alpha y\,d\alpha.$$

Nous allons montrer qu'on peut intégrer terme à terme la série entre crochets, bien que la limite supérieure de l'intégrale soit infinie.

Considérons, en effet, plus généralement une série :

$$\mathrm{S}(\alpha)=\sum u_n(\alpha)$$

uniformément convergente, quel que soit α, et telle que les intégrales :

$$\int_0^\infty \mathrm{S}(\alpha)\,d\alpha, \qquad \int_0^\infty u_n(\alpha)\,d\alpha \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\cdots)$$

aient un sens. Tout d'abord, on peut intégrer terme à terme entre 0 et un nombre l arbitrairement grand; nous avons donc :

$$\int_0^l \mathrm{S}(\alpha)\,d\alpha=\sum\int_0^l u_n(\alpha)\,d\alpha.$$

Supposons alors la série précédente, qui est une fonction de l, uniformément convergente, *quel que soit* l; on en conclura aisément que la série $\sum\int_0^\infty u_n\,d\alpha$ est convergente et représente $\int_0^\infty \mathrm{S}\,d\alpha$, ce qui justifie l'intégration terme à terme entre 0 et $+\infty$.

Nous pourrons donc intégrer terme à terme le second membre de l'égalité (25), si nous démontrons que la série :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_0^l e^{-\theta' \alpha^2} \alpha^{2n} (\alpha^2 - 1)^n \cos \alpha y d\alpha$$

est uniformément convergente par rapport à l et *quel que soit* l; or, désignons par φ_n le terme général de cette série, on a :

$$|\varphi_n| < \frac{\tau^{2n+1}}{(2n+1)!} \left(\left| \int_0^1 \right| + \left| \int_1^l \right| \right). \tag{26}$$

Quand α varie de 0 à 1, on a :

$$|(\alpha^2 - 1)^n| < 1,$$

par suite :

$$\left| \int_0^1 \right| < \int_0^1 e^{-\theta' \alpha^2} \alpha^{2n} d\alpha < \int_0^\infty e^{-\theta' \alpha^2} \alpha^{2n} d\alpha;$$

θ' étant positif, cette dernière intégrale est finie et sa valeur est bien connue, donc :

$$\left| \int_0^1 \right| < \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^{n+1}} \sqrt{\pi} \theta'^{-n-\frac{1}{2}}.$$

Quand α est supérieur à 1, on a :

$$(\alpha^2 - 1)^n < \alpha^{2n},$$

par suite :

$$\left|\int_1^l\right| < \int_1^l e^{-\theta'\alpha^2}\alpha^{4n}d\alpha < \int_0^\infty e^{-\theta'\alpha^2}\alpha^{4n}d\alpha,$$

d'où :

$$\left|\int_1^l\right| < \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(4n-1)}{2^{2n+1}}\sqrt{\pi}\,\theta'^{-2n-\frac{1}{2}}.$$

L'inégalité (26) peut donc s'écrire, en tenant compte de ce que $\tau \leqslant \theta'$:

$$|\varphi_n| < u_n + v_n, \tag{27}$$

en posant :

$$\begin{cases} u_n = \sqrt{\pi\tau}\,\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^{n+1}(2n+1)!}\,\tau^n, \\ v_n = \tau\sqrt{\dfrac{\pi}{\theta'}}\,\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(4n-1)}{2^{2n+1}(2n+1)!}\left(\dfrac{\tau}{\theta'}\right)^{2n}. \end{cases} \tag{28}$$

La convergence uniforme de la série $\sum\varphi_n(l)$ résulte alors de l'inégalité (27) et de ce que u_n et v_n sont les termes généraux de deux séries convergentes indépendantes de l. La convergence de la série $\sum u_n$ se reconnaît en formant le rapport $\frac{u_n+1}{u_n}$ qui tend vers zéro ; pour reconnaître la convergence de la série $\sum v_n$, dont le rapport $\frac{v_n+1}{v_n}$ tend vers l'unité pour $\theta' = \tau$, écrivons :

$$v_n = \tau\sqrt{\frac{\pi}{\theta'}}\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(4n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(4n+2)}\left(\frac{\tau}{\theta'}\right)^{2n}. \tag{29}$$

Mais, si p désigne un entier positif, on sait qu'on a, d'après la formule de Wallis :

$$\left[\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2p-2)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2p-1)}\right]^2 2p > \frac{\pi}{2},$$

d'où, en faisant $p = 2n$:

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(4n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(4n-2)} < \sqrt{\frac{8n}{\pi}};$$

nous avons donc :

$$(30) \qquad v_n < \frac{\tau}{\sqrt{8\theta'}} \frac{\left(\frac{\tau}{\theta'}\right)^{2n}}{\sqrt{n}(2n+1)} \leqslant \sqrt{\frac{\tau}{8}} \frac{1}{\sqrt{n}(2n+1)}$$

et comme cette dernière quantité est manifestement le terme général d'une série convergente, il en résulte que la série $\sum v_n$ est elle-même convergente, même si $\theta' = \tau$.

Nous sommes donc en droit d'intégrer terme à terme le second membre de l'égalité (25) et, par suite, d'écrire :

$$(31) \qquad \mathcal{G}(y,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_0^{\infty} e^{-\theta'\alpha^2} \alpha^{2n} (\alpha^2 - 1)^n \cos \alpha y \, d\alpha;$$

il résulte, en outre, de la démonstration précédente que la série (31) est absolument et uniformément convergente par rapport à y et à τ, pourvu qu'on ait $\theta' > 0$.

Passons au calcul des intégrales définies qui figurent dans la série précédente ; soit donc à calculer l'intégrale :

$$(32) \qquad J_n(y,\theta') = \int_0^{\infty} e^{-\theta'\alpha^2} \alpha^{2n} (\alpha^2 - 1)^n \cos \alpha y \, d\alpha.$$

Une nouvelle analogie avec l'équation de la chaleur apparaît, si l'on remarque que la fonction J_n vérifie l'équation :

$$\frac{\partial J_n}{\partial \theta'} = \frac{\partial^2 J_n}{\partial y^2}.$$

Pour calculer cette fonction, nous partirons de l'intégrale bien connue :

$$\int_0^\infty e^{-\theta'\alpha^2}\cos\alpha y d\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\theta'}}\,e^{-\frac{y^2}{4\theta'}}$$

et nous allons montrer que la fonction J_n est une des dérivées d'ordre $3n$ de la fonction :

$$I(y,\theta') = \int_0^\infty e^{-\theta'(\alpha^2-1)}\cos\alpha y d\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\theta'}}\,e^{\theta'-\frac{y^2}{4\theta'}}.$$

En effet, cette dernière intégrale peut être différentiée sous le signe $\int$ un nombre quelconque de fois par rapport à y ou à θ', car les intégrales ainsi obtenues sont uniformément convergentes puisque θ' est positif; nous aurons ainsi :

$$\frac{\partial I}{\partial\theta'} = -\int_0^\infty e^{-\theta'(\alpha^2-1)}(\alpha^2-1)\cos\alpha y d\alpha,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\frac{\partial^n I}{\partial\theta'^n} = (-1)^n\int_0^\infty e^{-\theta'(\alpha^2-1)}(\alpha^2-1)^n\cos\alpha y d\alpha.$$

Différentions maintenant $2n$ fois par rapport à y, en tenant compte de ce que :

$$\frac{\partial^{2n}\cos\alpha y}{\partial y^{2n}} = (-1)^n\alpha^{2n}\cos\alpha y,$$

et il viendra :

$$\frac{\partial^{3n} I}{\partial\theta'^n\partial y^{2n}} = \int_0^\infty e^{-\theta'(\alpha^2-1)}\alpha^{2n}(\alpha^2-1)^n\cos\alpha y d\alpha.$$

Nous aurons donc :

$$(33) \qquad J_n(y,\theta') = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\theta'} \frac{\partial^{3n}}{\partial\theta'^n \partial y^{2n}} \left(\frac{e^{\theta' - \frac{y^2}{4\theta'}}}{\sqrt{\theta'}} \right).$$

D'après les formules (32) et (33), l'égalité (31) peut donc s'écrire :

$$(34) \qquad \mathcal{G}(y,\tau) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\theta'} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{\partial^{3n}}{\partial\theta'^n \partial y^{2n}} \left(\frac{e^{\theta' - \frac{y^2}{4\theta'}}}{\sqrt{\theta'}} \right)$$

et nous avons ainsi le développement en série cherché.

Mais, au point de vue du calcul numérique, il y a lieu de remplacer dans ce développement les dérivées d'ordre $3n$ par leurs expressions algébriques; le plus simple pour y parvenir est de développer, dans l'intégrale (32), la quantité $(\alpha^2 - 1)^n$ par la formule du binôme, soit :

$$(\alpha^2 - 1)^n = \sum_{r=0}^{n} (-1)^{n-r} \frac{n!}{r!(n-r)!} \alpha^{2r},$$

d'où :

$$J_n(y,\theta') = \sum_{r=0}^{n} (-1)^{n-r} \frac{n!}{r!(n-r)!} \int_0^{\infty} e^{-\theta'\alpha^2} \alpha^{2(n+r)} \cos \alpha y \, d\alpha.$$

Posons :

$$\alpha = \frac{\beta}{\sqrt{\theta'}}, \qquad y = 2\sqrt{\theta'} s,$$

β et s étant de nouvelles variables, puis :

$$n + r = q, \text{ d'où } r = q - n, \quad n - r = 2n - q, \quad (-1)^{n-r} = (-1)^q;$$

IMPRIMERIE NATIONALE.

il viendra :

$$J_n(\gamma,\theta') = \sum_{q=n}^{2n} (-1)^q \frac{n!}{(q-n)!\,(2n-q)!}\,\theta'^{\,q-\frac{1}{2}} \int_0^\infty e^{-\beta^2}\beta^{2q}\cos 2\beta s d\beta.$$

Différentions alors $2q$ fois par rapport à s l'intégrale :

$$\int_0^\infty e^{-\beta^2}\cos 2\beta s d\beta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-s^2},$$

il viendra :

$$(-1)^q \int_0^\infty e^{-\beta^2}(2\beta)^{2q}\cos 2\beta s d\beta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{d^{2q}e^{-s^2}}{ds^{2q}}.$$

Mais on sait que la dérivée d'ordre m d'une fonction $\varphi(s^2)$ de s^2 est donnée par la formule générale :

$$\frac{d^m\varphi(s^2)}{ds^m} = \sum \frac{m!}{p!\,(m-2p)!}\,(2s)^{m-2p}\,\frac{d^{m-p}\varphi(s^2)}{d(s^2)^{m-p}},$$

la sommation s'étendant depuis la valeur o de p jusqu'au plus grand nombre entier contenu dans $\frac{m}{2}$. Nous aurons ici :

$$m = 2q, \qquad \frac{d^{2q-p}e^{-s^2}}{d(s^2)^{2q-p}} = (-1)^p e^{-s^2},$$

d'où :

$$\frac{d^{2q}e^{-s^2}}{ds^{2q}} = e^{-s^2}\sum_{p=0}^{q} \frac{2q!}{p!\,(2q-2p)!}\,(2s)^{2(q-p)}(-1)^p.$$

Nous obtiendrons ainsi pour J_n, en revenant à la variable γ :

$$J_n(\gamma,\theta') = \frac{n!}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\theta'}}\,e^{-\frac{\gamma^2}{4\theta'}} \sum_{q=n}^{2n}\sum_{p=0}^{q} A^n_{p,q}\,\gamma^{2(q-p)}\theta'^{-2q+p},$$

en posant :

$$A^n_{p,q} = (-1)^p \frac{2q!}{2^{2q}(q-n)!\,(2n-q)!\,p!\,(2q-2p)!}.$$

Nous arrivons ainsi à cette expression plus explicite de $\mathcal{G}(y,\tau)$:

$$(35)\quad \mathcal{G}(y,\tau) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\theta'}}\, e^{-\frac{y^2}{4\theta'}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!}\, \tau^{2n+1} \sum_{q=n}^{2n} \sum_{p=0}^{q} A^n_{p,q}\, y^{2(q-p)}\, \theta'^{-2q+p},$$

où il est facile de reconnaître que le terme d'indice n de la série est lui-même une somme de $\frac{(n+1)(3n+2)}{2}$ termes.

Calculons enfin une limite supérieure de l'erreur commise lorsque, dans le calcul des séries (34) ou (35), on se limite aux n premiers termes. Nous aurons, d'après l'inégalité (27) :

$$\left| \mathcal{G}(y,\tau) - \sum_{0}^{n-1} \right| < (u_n + u_{n+1} + \cdots) + (v_n + v_{n+1} + \cdots);$$

or, il est facile de comparer la série $\sum u_n$ à une progression géométrique et de même la série $\sum v_n$, si l'on suppose toutefois pour cette dernière $\tau < \theta'$, c'est-à-dire $z' > 0$. Le calcul n'offre aucune difficulté et l'on obtient :

$$(36)\quad \left\{ \begin{aligned} \left| \mathcal{G}(y,\tau) - \sum_{0}^{n-1} \right| &< \sqrt{\pi\tau}\, \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2^{n+1}(2n+1)!}\, \frac{\tau^n}{1-\frac{\tau}{4(n+1)}} \\ &+ \frac{\tau}{\sqrt{8\theta' n}\,(2n+1)}\, \frac{\left(\frac{\tau}{\theta'}\right)^{2n}}{1-\left(\frac{\tau}{\theta'}\right)^2}. \end{aligned} \right.$$

Mais si l'on fait $\theta' = \tau$, c'est-à-dire $z' = 0$, il faut prendre,

comme limite supérieure de v_n, celle fournie par la deuxième des inégalités (30), soit :

$$v_n < \sqrt{\frac{\tau}{8}} \frac{1}{\sqrt{n}(2n+1)}.$$

Alors, d'après un théorème bien connu dû à Cauchy, nous aurons comme limite supérieure du reste de la série $\sum v_n$:

$$v_n + v_{n+1} + \cdots < \sqrt{\frac{\tau}{8}} \int_{n-1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(2x+1)} = \frac{\sqrt{\tau}}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}}.$$

Comme cette dernière quantité tend très lentement vers zéro quand n augmente indéfiniment, les séries (34) ou (35) sont vraisemblablement peu convergentes. Quand z' n'est pas nul, l'inégalité (36) montre que la convergence est assez rapide tant que τ reste de l'ordre de $\frac{z'}{4a^2\lambda^2}$, mais elle se ralentit à mesure que τ augmente et que, par suite, le rapport $\frac{\tau}{\theta'}$ se rapproche de l'unité.

§ 2.

EXPRESSION DE L'INTÉGRALE.

L'intégrale (24) du problème peut s'écrire plus explicitement sous deux formes équivalentes, suivant qu'on fait usage des développements (34) ou (35) de $\mathcal{G}(y, \tau)$:

Dans le premier cas et d'après la formule :

$$\frac{\partial^{3n}}{\partial\theta'^n \partial y^{2n}} = (\lambda a)^{2n} \frac{\partial^{3n}}{\partial\theta'^n \partial x^{2n}},$$

on aura :

$$\varphi(x,t)=\frac{te^{-\theta'}}{2a\lambda\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(\xi)\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(at)^{2n}}{(2n+1)!}\frac{\partial^{3n}}{\partial\theta'^{n}\partial x^{2n}}\left[\frac{e^{\theta'-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2\lambda^2\theta'}}}{\sqrt{\theta'}}\right]\right\}d\xi,$$

et, comme la série entre crochets est uniformément convergente par rapport à la variable d'intégration, on peut sûrement intégrer terme à terme si, par exemple, la fonction g est nulle en dehors d'un intervalle fini; il vient ainsi :

$$(37)\quad \varphi(x,t)=\frac{te^{-\theta'}}{2a\lambda\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(at)^{2n}}{(2n+1)!}\int_{-\infty}^{\infty}g(\xi)\frac{\partial^{3n}}{\partial\theta'^{n}\partial x^{2n}}\left[\frac{e^{\theta'-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2\lambda^2\theta'}}}{\sqrt{\theta'}}\right]d\xi.$$

Dans le second cas, on aura :

$$\left\{\begin{aligned}&\varphi(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi\theta'}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{(2n+1)!}\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{2n+1}\\&\times\sum_{q=n}^{2n}\sum_{p=0}^{q}A_{p,q}^{n}\theta'^{-2q+p}\int_{-\infty}^{\infty}g(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2\lambda^2\theta'}}\left(\frac{x-\xi}{a\lambda}\right)^{2(q-p)}d\xi,\end{aligned}\right.$$

ou, en faisant le changement de variable :

$$\xi=x+2a\lambda\sqrt{\theta'}\alpha$$

et en posant :

$$\mathfrak{A}_{p,q}^{n}=\frac{n!}{(2n+1)!}\,2^{2(q-p)}A_{p,q}^{n}:$$

$$(37')\quad\left\{\begin{aligned}\varphi(x,t)=\frac{\lambda}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{q=n}^{2n}\sum_{p=0}^{q}\mathfrak{A}_{p,q}^{n}\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{2n+1}\theta'^{-q}\\\int_{-\infty}^{\infty}g(x+2a\lambda\sqrt{\theta'}\alpha)\,e^{-\alpha^2}\alpha^{2(q-p)}d\alpha.\end{aligned}\right.$$

Rappelons que nous avons posé $\theta' = \frac{t}{\lambda} + \frac{z'}{4a^2\lambda^2}$ et que les formules (37) ou (37′) sont valables pour $z' \geqslant 0$.

§ 3.

EXPRESSION ASYMPTOTIQUE DE L'INTÉGRALE; SA CONTINUITÉ POUR $\Lambda = 0$.

Nous allons rechercher l'expression asymptotique de l'intégrale (24) lorsque le coefficient de viscosité $\Lambda = 2a^2\lambda$ est très petit; il nous faut pour cela obtenir l'expression asymptotique correspondante de la fonction $\mathcal{G}$. A cet effet, nous allons rechercher ce que devient cette fonction lorsque la variable $\tau = \frac{t}{\lambda}$ et, par suite, la variable $\theta' = \tau + \frac{z'}{4a^2\lambda^2}$ augmentent indéfiniment; nous partirons pour cela de son expression sous forme d'intégrale définie :

$$\mathcal{G}(y, \tau) = \int_0^\infty e^{-\theta'\alpha^2} \frac{\operatorname{sh} \alpha\tau\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha\sqrt{\alpha^2 - 1}} \cos \alpha y \, d\alpha. \tag{38}$$

Soit η un nombre positif fixe inférieur à l'unité; nous pouvons décomposer l'intégrale précédente en trois autres et écrire :

$$\mathcal{G}(y, \tau) = \int_0^\eta + \int_\eta^1 + \int_1^\infty .$$

Quand α est compris entre η et 1, écrivons la fonction sous le signe $\int$: $e^{-\theta'\alpha^2} \frac{\sin \alpha\tau\sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha\sqrt{1 - \alpha^2}} \cos \alpha y$; on voit alors qu'on a :

$$\left| e^{-\theta'\alpha^2} \sin \alpha\tau\sqrt{1 - \alpha^2} \cos \alpha y \right| < e^{-\theta'\eta^2}$$

dans tout le champ d'intégration, donc :

$$\left|\int_{\eta}^{1}\right| < e^{-\theta'\eta^2}\int_{\eta}^{1}\frac{d\alpha}{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}} = e^{-\theta'\eta^2}\operatorname{Log}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\arccos\eta}{2}\right),$$

quantité qui tend vers zéro quand τ augmente indéfiniment.

Lorsque α est supérieur à 1, on a :

$$\left| e^{-\theta'\alpha^2}\operatorname{sh}\alpha\tau\sqrt{\alpha^2-1}\cos\alpha y\right| < \frac{1}{2}e^{-\frac{\tau}{2}},$$

donc :

$$\left|\int_{1}^{\infty}\right| < \frac{1}{2}e^{-\frac{\tau}{2}}\int_{1}^{\infty}\frac{d\alpha}{\alpha\sqrt{\alpha^2-1}} = \frac{\pi}{4}e^{-\frac{\tau}{2}},$$

quantité qui tend également vers zéro pour τ infini. Nous sommes donc ramenés, en définitive, à chercher la limite de l'intégrale :

$$\int_{0}^{\eta} e^{-\theta'\alpha^2}\frac{\sin\alpha\tau\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}\cos\alpha y\,d\alpha. \tag{39}$$

Or, si l'on pose :

$$\sqrt{1-\alpha^2} = 1-\varepsilon_1, \qquad \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} = 1+\varepsilon_2,$$

ε_1, ε_2 seront des séries entières en α^2 sans termes constants et à coefficients tous positifs; le théorème des accroissements finis nous donnera :

$$\sin\alpha\tau\sqrt{1-\alpha^2} = \sin\alpha\tau - \varepsilon_1\alpha\tau\cos\alpha\tau\,(1-\theta_1\varepsilon_1) \qquad (0<\theta_1<1),$$

d'où :

$$\frac{\sin\alpha\tau\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}=\frac{\sin\alpha\tau}{\alpha}+\varepsilon\tau,$$

en posant :

$$\varepsilon=\varepsilon_2\frac{\sin\alpha\tau}{\alpha\tau}-\varepsilon_1(1+\varepsilon_2)\cos\alpha\tau(1-\theta_1\varepsilon_1).$$

L'intégrale (39) pourra donc s'écrire :

$$\int_0^\eta e^{-\theta'\alpha^2}\frac{\sin\alpha\tau}{\alpha}\cos\alpha y d\alpha+\int_0^\eta e^{-\theta'\alpha^2}\varepsilon\tau\cos\alpha y d\alpha.$$

Nous allons montrer que la dernière intégrale est au plus de l'ordre de $\frac{\tau}{\sqrt{\theta'^3}}$; cherchons, à cet effet, une limite supérieure de son module; on a :

$$|\varepsilon|<\varepsilon_2+\varepsilon_1(1+\varepsilon_2),\quad \text{d'où}\quad |\varepsilon|<\alpha^2\varpi(\alpha),$$

$\varpi(\alpha)$ étant une série entière en α^2 à termes tous positifs; nous aurons donc :

$$\left|\int_0^\eta e^{-\theta'\alpha^2}\varepsilon\tau\cos\alpha y d\alpha\right|<\frac{\tau}{\theta'}\int_0^\eta e^{-\theta'\alpha^2}\varpi(\alpha)\theta'\alpha^2 d\alpha.$$

Tout revient donc à démontrer que la dernière intégrale est au plus de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{\theta'}}$; or, cela résulte immédiatement de la double inégalité :

$$\int_0^\eta e^{-\theta'\alpha^2}\varpi(\alpha)\theta'\alpha^2 d\alpha<\varpi(\eta)\int_0^\eta e^{-\theta'\alpha^2}\theta'\alpha^2 d\alpha<\frac{\varpi(\eta)}{\sqrt{\theta'}}\int_0^\infty e^{-u^2}u^2 du,$$

puisque la dernière intégrale a une valeur finie.

Ainsi, nous avons démontré jusqu'ici que la fonction $\mathcal{G}(y, \tau)$ diffère d'aussi peu qu'on veut, pour τ très grand, de l'intégrale :

$$\int_0^{\eta} e^{-\theta'\alpha^2} \frac{\sin \alpha\tau}{\alpha} \cos \alpha y d\alpha,$$

c'est-à-dire de l'intégrale :

$$\int_0^{\infty} e^{-\theta'\alpha^2} \frac{\sin \alpha\tau}{\alpha} \cos \alpha y d\alpha, \tag{40}$$

car la différence entre ces deux dernières intégrales :

$$\int_{\eta}^{\infty} e^{-\theta'\alpha^2} \frac{\sin \alpha\tau}{\alpha} \cos \alpha y d\alpha$$

tend vers zéro pour τ infini; on a, en effet, d'après le second théorème de la moyenne :

$$\left| \int_{\eta}^{\infty} e^{-\theta'\alpha^2} \frac{\sin \alpha\tau}{\alpha} \cos \alpha y d\alpha \right| < \frac{1}{\eta^2} \int_{\eta}^{p} e^{-\theta'\alpha^2} \alpha d\alpha = \frac{e^{-\theta'\eta^2} - e^{-\theta' p^2}}{2\theta'\eta^2} \quad (p > \eta).$$

Or l'intégrale (40) peut se décomposer en deux autres et s'écrire :

$$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-\theta'\alpha^2} \frac{\sin \alpha(\tau + y)}{\alpha} d\alpha + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-\theta'\alpha^2} \frac{\sin \alpha(\tau - y)}{\alpha} d\alpha; \tag{41}$$

ces intégrales ont des valeurs connues; elles se présentent notamment dans le problème du refroidissement d'un mur d'épaisseur indéfinie [1] et se ramènent à la fonction :

$$\int_0^{x} e^{-\alpha^2} d\alpha,$$

[1] J. Boussinesq, *Théorie analytique de la chaleur*, t. II, p. 13.

IMPRIMERIE NATIONALE.

dont on a construit des tables[1]. En définitive, on trouve facilement que l'expression (41) a pour valeur :

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_{\frac{-\tau+y}{2\sqrt{\theta'}}}^{\frac{\tau+y}{2\sqrt{\theta'}}} e^{-\alpha^2}d\alpha.$$

Revenons maintenant aux variables primitives x, t au moyen des formules :

$$y=\frac{x-\xi}{a\lambda}, \qquad \tau=\frac{t}{\lambda}, \qquad \theta'=\frac{t}{\lambda}+\frac{z'}{4a^2\lambda^2};$$

il résulte de ce qui précède que, pour $\tau=\frac{t}{\lambda}$ assez grand, on a :

$$(42) \qquad \mathcal{G}\left(\frac{x-\xi}{a\lambda},\frac{t}{\lambda}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_{\frac{x-\xi-at}{\sqrt{z'+4a^2\lambda t}}}^{\frac{x-\xi+at}{\sqrt{z'+4a^2\lambda t}}} e^{-\alpha^2}d\alpha+\mu,$$

μ étant une fonction qui, d'après les démonstrations précédentes, est au plus de l'ordre de :

$$\frac{\tau}{\sqrt{\theta'^3}}=\frac{8a^3\lambda^3 t}{\sqrt{(z'+4a^2\lambda t)^3}}.$$

Cela posé, imaginons tout d'abord qu'on attribue à λ une valeur fixe et qu'on fasse croître t indéfiniment : τ croîtra aussi indéfiniment, la fonction μ tendra vers zéro en même temps que les limites de la dernière intégrale deviendront infinies, si nous supposons toutefois que la quantité $x-\xi$ reste finie. On a ainsi :

$$(43) \qquad \lim_{t=\infty}\mathcal{G}\left(\frac{x-\xi}{a\lambda},\frac{t}{\lambda}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2}d\alpha=\frac{\pi}{2}.$$

[1] J. Bertrand, *Calcul des probabilités*, p. 329.

Dans le cas où l'on ferait croître $|x|$ indéfiniment en même temps que t de telle sorte qu'on eût $|x| = at$, on aurait de même :

$$\lim_{\substack{t=\infty \\ |x|=at}} \mathcal{G}\left(\frac{x-\xi}{a\lambda}, \frac{t}{\lambda}\right) = \frac{\pi}{4}. \tag{44}$$

Supposons ensuite que, t ayant une valeur positive quelconque, on fasse tendre λ vers zéro : τ croît encore indéfiniment et l'on a, pour λ très petit :

$$\mathcal{G}\left(\frac{x-\xi}{a\lambda}, \frac{t}{\lambda}\right) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_{\frac{x-\xi-at}{\sqrt{z'^2+4a^2\lambda t}}}^{\frac{x-\xi+at}{\sqrt{z'^2+4a^2\lambda t}}} e^{-\alpha^2} d\alpha, \tag{45}$$

le signe $\sim$ indiquant une égalité asymptotique, où les termes négligés sont au plus de l'ordre de λ^2, si z' n'est pas nul.

Si, dans l'égalité (42), on fait $z' = 0$ et λ très petit, μ est tout au plus de l'ordre de $\sqrt{\lambda}$; en passant à la limite, il vient :

$$\text{pour } z' = 0, \quad \lim_{\lambda=0} \mathcal{G}\left(\frac{x-\xi}{a\lambda}, \frac{t}{\lambda}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \text{ pour } -t < \frac{x-\xi}{a} < t, \\ \frac{\pi}{4} \text{ pour } \frac{x-\xi}{a} = \pm t, \\ 0 \text{ pour } \frac{x-\xi}{a} > t \text{ ou } \frac{x-\xi}{a} < t. \end{cases}$$

Revenons maintenant à l'expression (24) de l'intégrale et cherchons ses limites correspondant aux formules (43) et (44), ainsi que sa valeur asymptotique correspondant à la formule (45).

Posons, pour abréger :

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) d\xi; \tag{46}$$

il résulte des formules (24) et (43) qu'on a :

$$\lim_{t=\infty} \varphi(x, t) = \frac{A}{2a};$$

ainsi, à partir de l'instant initial, le déplacement en chaque point tend vers une même valeur limite.

D'après les formules (24) et (44), on aurait de même :

$$\lim_{\substack{t=\infty \\ |x|=at}} \varphi(x, t) = \frac{A}{4a}.$$

Passons au cas particulièrement intéressant où λ est très petit; les formules (24) et (45) nous donnent, en tenant compte de ce que $2a^2\lambda = \Lambda$:

$$\varphi(x, t) \sim \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \int_{\frac{x-\xi-at}{\sqrt{z'+2\Lambda t}}}^{\frac{x-\xi+at}{\sqrt{z'+2\Lambda t}}} e^{-\alpha^2} d\alpha d\xi,$$

les termes négligés étant au plus de l'ordre de Λ^2, si z' n'est pas nul, et de l'ordre de $\sqrt{\Lambda}$ dans le cas contraire. En changeant de variables d'intégration, cette expression, que nous représenterons par $\varphi(x, t, \Lambda)$, s'écrit encore :

$$(47) \qquad \varphi(x, t, \Lambda) \sim \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_{x-at}^{x+at} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} g\left(\xi + \alpha\sqrt{z' + 2\Lambda t}\right) e^{-\alpha^2} d\alpha.$$

C'est l'expression asymptotique de l'intégrale, pour Λ très petit, que nous nous proposions d'obtenir.

Nous avons vu que l'intégrale générale $\Phi(\omega, \tau)$ est une fonction continue de ω et de τ pour $\tau \geqslant 0$; d'après les formules $t = \lambda\tau$,

$x = \lambda a \omega$, $\Lambda = 2a^2\lambda$, il s'ensuit que l'intégrale $\varphi(x, t)$ est une fonction continue de Λ pour $\Lambda > 0$. Nous allons démontrer, au moyen de la formule (47), que la continuité s'étend à la valeur $\Lambda = 0$.

En effet, quand Λ est nul, on sait que l'équation :

$$a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

$$\left[\text{pour } t = 0 : \quad \varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = g_1(x, z')\right],$$

admet pour intégrale l'expression :

$$\varphi(x, t, 0) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g_1(\xi, z') d\xi,$$

qui peut encore s'écrire, en tenant compte de la deuxième des formules (19) :

$$\varphi(x, t, 0) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_{x-at}^{x+at} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi + \alpha\sqrt{z'})\, e^{-\alpha^2} d\alpha.$$

En comparant cette dernière égalité à la formule (47), nous voyons qu'on a :

$$\lim_{\Lambda = 0} \varphi(x, t, \Lambda) = \varphi(x, t, 0),$$

ce qui établit la continuité, et ceci est encore vrai pour $z' = 0$.

Nous verrons d'ailleurs, au prochain chapitre, que la continuité de l'intégrale pour $\Lambda = 0$ subsiste lorsque le déplacement initial n'est pas nul.

§ 4.

APPLICATION AUX QUASI-ONDES.

Il résulte de ce qui précède que le phénomène, pour Λ très petit, diffère très peu de ce qu'il serait pour $\Lambda = 0$. L'expression asymptotique du déplacement est alors donnée par la formule (47) exacte aux termes de l'ordre de Λ^2 près, si z' n'est pas nul, et aux termes de l'ordre de $\sqrt{\Lambda}$ près, si z' est nul.

Cette continuité de l'intégrale pour $\Lambda = 0$ présente une importance physique capitale, non seulement dans la dynamique des milieux continus, mais aussi en électricité, comme nous le verrons dans un instant.

Une conclusion essentielle de la théorie de la propagation des ondes dans les milieux visqueux est que ces milieux ne peuvent propager aucune onde proprement dite, quelque petits que soient leurs coefficients de viscosité. Or, tous les milieux connus sont visqueux à des degrés divers, et cependant ces milieux, tels que l'air, l'eau, les solides élastiques, transmettent les ondes sonores, au sens des physiciens, avec la même vitesse que si leur viscosité était nulle. Il y a donc là une apparente contradiction qu'explique toutefois le résultat précédent : ces milieux étant très peu visqueux, la transmission du mouvement s'y effectue à peu près comme si leur viscosité n'existait pas. Il n'y a plus d'ondes proprement dites au sens d'Hugoniot, mais propagation de ce que M. Duhem a appelé des *quasi-ondes* [1]. Ces quasi-ondes sont régies par l'équation (47).

Précisons ces conclusions par un exemple très simple : supposons que la fonction $g(x)$ soit nulle en dehors d'une région infiniment petite entourant l'origine $x = 0$ et que z' soit très petit. Si

[1] P. Duhem, *Recherches sur l'hydrodynamique*, 1re série, 3e partie.

nous posons encore l'égalité (46) et que nous attendions un temps suffisant pour que z' devienne négligeable vis-à-vis de $2\Lambda t$, l'égalité (47), prise sous sa première forme, nous donnera :

$$(48) \qquad \varphi(x, t, \Lambda) \sim \frac{A}{2a\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x-at}{\sqrt{2\Lambda t}}}^{\frac{x+at}{\sqrt{2\Lambda t}}} e^{-\alpha^2} d\alpha,$$

d'où nous déduisons, en faisant tendre Λ vers zéro :

$$\text{pour } z' = 0, \qquad \varphi(x, t, 0) = \begin{cases} \frac{A}{2a} \text{ pour } -at < x < at, \\ 0 \text{ pour } x > at \text{ et } x < -at. \end{cases}$$

La fonction $\varphi(x, t, 0)$, pour $z' = 0$, est représentée graphiquement par une courbe (fig. 1) composée de segments de droite,

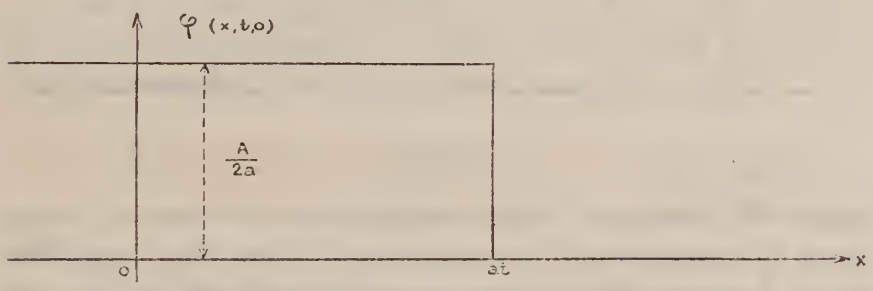


Fig. 1.

dont nous figurons seulement la partie relative aux x positifs; l'onde qui se propage correspond au segment vertical au point $x = at$.

Au contraire, la fonction $\varphi(x, t, \Lambda)$ définie par l'égalité (48) est représentée graphiquement par une courbe (fig. 2) dont les ordonnées sont sensiblement égales à $\frac{A}{2a}$, pour $|x|$ notablement

inférieur à at, et sensiblement nulles, pour $|x|$ notablement supérieur à at. Les ordonnées aux points $|x| = at$ valent sensiblement $\frac{A}{4a}$.

On trouve, d'autre part :

$$\left[\frac{\partial\varphi(x,t,\Lambda)}{\partial x}\right]_{x=at} \sim -\frac{A}{a\sqrt{8\pi\Lambda t}}\left(1-e^{-\frac{t}{\lambda}}\right) = \operatorname{tg}\alpha,$$

α étant l'angle que fait avec l'axe des x la tangente à la courbe au point M d'abscisse at. Nous voyons ainsi qu'à mesure que t augmente, $|\operatorname{tg}\alpha|$ diminue à peu près comme $\frac{1}{\sqrt{t}}$; autrement dit, à l'onde véritable propagée avec la vitesse a, quand Λ est nul, et représentée par le segment vertical de la figure (1), correspond, quand Λ est très petit, une quasi-onde représentée par la région mal définie CD de la figure 2, et dont le milieu est sensiblement

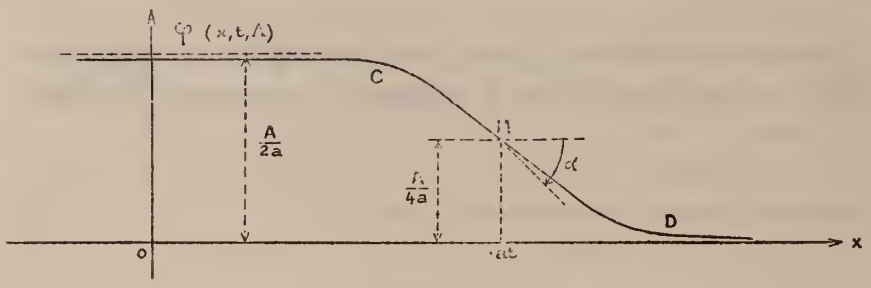


Fig. 2.

le point M d'abscisse at, qui se propage avec la vitesse a. Le mot *vitesse de propagation de la quasi-onde* n'a donc plus aucun sens précis. A mesure que t augmente, cette quasi-onde, qui, tout au début, était presque verticale et assez bien limitée comme l'onde réelle pour $\Lambda = 0$, s'étale de plus en plus sur l'axe des x; il en résulte que son épaisseur mesurée grossièrement par la différence des abscisses des deux coudes D et C va constamment en croissant, en même temps que ces coudes s'arrondissent davantage. Ainsi, tandis que l'onde réelle (pour $\Lambda = 0$) se propage en restant identique à soi-même, la quasi-onde (pour Λ très petit) se propage

aussi, mais en s'étalant progressivement, de sorte que le phénomène de sa propagation, assez net au début, finit par devenir de plus en plus flou.

Le cas où Λ est très petit intéresse aussi la théorie électrodynamique de Helmholtz : nous savons, en effet (Introduction), que les équations (1) sont, par exemple, celles que vérifie, dans cette théorie, le potentiel électrostatique au sein d'un milieu conducteur non diélectrique. Tout d'abord, la théorie de Helmholtz nous enseigne qu'on a dans un tel milieu :

$$\Lambda = \frac{\rho}{4\pi \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \lambda}, \qquad a^2 = \frac{\varepsilon}{\frac{\mathfrak{A}^2}{2} \lambda},$$

ρ désignant la résistivité du milieu conducteur, $\frac{\mathfrak{A}^2}{2}$ la constante fondamentale des actions électrodynamiques, ε la constante fondamentale des actions électrostatiques et λ la constante de Helmholtz[1]. Supposons, pour fixer les idées, que le milieu considéré soit en cuivre de résistivité $\rho = 1{,}6$ microhms cm/cm^2 et adoptons, pour la constante de Helmholtz, la détermination de Neumann généralement admise $\lambda = 1$; en faisant le calcul dans le système électromagnétique C. G. S., nous aurons :

$$\rho = 1{,}6 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{9} = 1{,}6 \cdot 10^{3}, \qquad \frac{\mathfrak{A}^2}{2} = 1, \qquad \varepsilon = (3 \cdot 10^{10})^2,$$

d'où :

$$\Lambda = 127{,}5, \qquad a^2 = 9 \cdot 10^{20}.$$

Mais l'unité naturelle de longueur est ici l'espace parcouru par la lumière dans le vide en une seconde; donc, en employant un système d'unités qui ne différerait du système électromagnétique

[1] Nous désignons cette constante par λ pour nous conformer à l'usage généralement adopté; il ne peut en résulter aucune confusion avec le second coefficient de viscosité $\frac{\Lambda}{2a^2}$.

IMPRIMERIE NATIONALE.

C. G. S. qu'en ce que l'unité de longueur vaudrait 3.10^{10} centimètres, on aura, en tenant compte de ce qu'une résistivité est homogène dans le système choisi au produit d'une longueur par une vitesse :

$$\Lambda = \frac{127,5}{(3\cdot 10^{10})^2} = 1,42\cdot 10^{-19}, \qquad a^2 = 1.$$

Λ étant extrêmement petit, nous en concluons que, dans un milieu conducteur non diélectrique et suivant la théorie de Helmholtz, le potentiel électrostatique, la densité de l'électricité libre ainsi que les composantes du flux longitudinal d'électricité se propagent très sensiblement avec la vitesse de la lumière dans le vide.

CHAPITRE III.

CAS OÙ LA VITESSE INITIALE EST NULLE.

§ 1.

EXPRESSION DE L'INTÉGRALE.

Puisque nous supposons que la vitesse initiale $g_1(x, z)$ est nulle, il en est de même, d'après la deuxième des formules (19), de la fonction $g(x)$, de sorte que l'égalité (23) se réduit à :

$$\varphi(x,t)=\frac{1}{a\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,\mathcal{F}\left(\frac{x-\xi}{a\lambda},\frac{t}{\lambda}\right)d\xi. \tag{49}$$

Nous allons rechercher tout d'abord le développement de la fonction $\mathcal{F}(y,\tau)$, que nous allons déduire de celui de la fonction $\mathcal{G}(y,\tau)$.

Récrivons les formules (22), en faisant toutefois dans la deuxième $\theta'=\theta$, c'est-à-dire $z'=z$; on a :

$$\left\{\begin{aligned}
&\mathcal{F}(y,\tau)=\frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty} e^{-\theta\alpha^2}\left(\alpha\frac{\operatorname{sh}\alpha\tau\sqrt{\alpha^2-1}}{\sqrt{\alpha^2-1}}+\operatorname{ch}\alpha\tau\sqrt{\alpha^2-1}\right)\cos\alpha y\,d\alpha,\\
&\mathcal{G}(y,\tau)=\int_0^{\infty} e^{-\theta\alpha^2}\frac{\operatorname{sh}\alpha\tau\sqrt{\alpha^2-1}}{\alpha\sqrt{\alpha^2-1}}\cos\alpha y\,d\alpha.
\end{aligned}\right. \tag{22'}$$

Le paramètre z étant supposé essentiellement positif, la deuxième des intégrales (22′) peut être différentiée sous le signe $\int$ un nombre quelconque de fois; il vient ainsi :

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \tau} = \int_0^\infty e^{-\theta\alpha^2}\left(-\alpha\frac{\operatorname{sh}\alpha\tau\sqrt{\alpha^2-1}}{\sqrt{\alpha^2-1}} + \operatorname{ch}\alpha\tau\sqrt{\alpha^2-1}\right)\cos\alpha y d\alpha,$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial y^2} = -\int_0^\infty e^{-\theta\alpha^2}\alpha\frac{\operatorname{sh}\alpha\tau\sqrt{\alpha^2-1}}{\sqrt{\alpha^2-1}}\cos\alpha y d\alpha$$

et, par suite, d'après la première des formules (22′) :

$$\lambda\mathcal{F}(y,\tau) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \tau} - 2\frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial y^2}. \tag{50}$$

Nous pouvons donc, par une simple différentiation, déduire la fonction $\mathcal{F}(y,\tau)$ des formules (34) ou (35). En partant de la formule (34) et en tenant compte de ce que la fonction que nous avons désignée par $\mathrm{I}(y,\theta)$ [chap. II, § 1] vérifie l'équation :

$$\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 \mathrm{I}}{\partial y^2} + \mathrm{I},$$

l'égalité (50) nous donne par un calcul facile :

$$\left\{\begin{aligned}\lambda\mathcal{F}(y,\tau) = &-\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\theta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tau^{2n+1}}{(2n+1)!}\frac{\partial^{3n+2}}{\partial\theta^n\partial y^{2n+2}}\left(\frac{e^{\theta-\frac{y^2}{4\theta}}}{\sqrt{\theta}}\right)\\ &+\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\theta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tau^{2n}}{2n!}\frac{\partial^{3n}}{\partial\theta^n\partial y^{2n}}\left(\frac{e^{\theta-\frac{y^2}{4\theta}}}{\sqrt{\theta}}\right).\end{aligned}\right. \tag{51}$$

Nous aurions de même, en partant de la formule (35) et en posant :

$$A'^{n}_{p,q} = (-1)^p \frac{2q!}{2^{2q}(q-n-1)!\,(2n-q+1)!\,p!\,(2q-2p)!} :$$

$$(52)\quad \left\{ \begin{aligned} \lambda \mathcal{F}(y,\tau) = &-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\theta}}\, e^{-\frac{y^2}{4\theta}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!}\, \tau^{2n+1} \sum_{q=n+1}^{2n+1} \sum_{p=0}^{q} A'^{n}_{p,q}\, y^{2(q-p)}\, \theta^{-2q+p} \\ &+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\theta}}\, e^{-\frac{y^2}{4\theta}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2n!}\, \tau^{2n} \sum_{q=n}^{2n} \sum_{p=0}^{q} A^{n}_{p,q}\, y^{2(q-p)}\, \theta^{-2q+p}. \end{aligned} \right.$$

Les expressions (51) ou (52) ainsi obtenues ne sont sûrement valables que si elles sont uniformément convergentes; c'est ce dont on peut se rendre compte en partant de l'expression de $\mathcal{F}(y, \tau)$ sous forme d'intégrale définie et en raisonnant comme au chapitre II.

Remplaçons alors dans l'égalité (49) la fonction $\mathcal{F}$ par son développement (51), il viendra :

$$(53)\quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(x,t) = &-\frac{e^{-\theta}}{2\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(at)^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, \frac{\partial^{3n+2}}{\partial\theta^n \partial x^{2n+2}} \left[\frac{e^{\theta - \frac{(x-\xi)^2}{4a^2\lambda^2\theta}}}{\sqrt{\theta}} \right] d\xi \\ &+\frac{e^{-\theta}}{2a\lambda\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(at)^{2n}}{2n!} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, \frac{\partial^{3n}}{\partial\theta^n \partial x^{2n}} \left[\frac{e^{\theta - \frac{(x-\xi)^2}{4a^2\lambda^2\theta}}}{\sqrt{\theta}} \right] d\xi. \end{aligned} \right.$$

En employant le développement (52) et en posant :

$$\xi = x + 2a\lambda\sqrt{\theta}\,\alpha,$$

$$\mathfrak{B}^{n}_{p,q} = \frac{n!}{(2n+1)!}\, 2^{2(q-p)} A'^{n}_{p,q}, \qquad \mathfrak{C}^{n}_{p,q} = \frac{n!}{2n!}\, 2^{2(q-p)} A^{n}_{p,q},$$

il viendra de même :

$$(53')\quad \left\{\begin{aligned}\varphi(x,t) = &-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{q=n+1}^{2n+1}\sum_{p=0}^{q}\mathfrak{B}_{p,q}^{n}\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{2n+1}\theta^{-q}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+2a\lambda\sqrt{\theta}\alpha)e^{-\alpha^2}\alpha^{2(q-p)}d\alpha\\ &+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{q=n}^{2n}\sum_{p=0}^{q}\mathfrak{C}_{p,q}^{n}\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{2n}\theta^{-q}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+2a\lambda\sqrt{\theta}\alpha)e^{-\alpha^2}\alpha^{2(q-p)}d\alpha.\end{aligned}\right.$$

En ajoutant les seconds membres soit des égalités (37) et (53), soit des égalités (37′) et (53′), on obtiendrait l'intégrale générale correspondant aux fonctions d'état initial (19).

§ 2.

EXPRESSIONS ASYMPTOTIQUES DE L'INTÉGRALE; SA CONTINUITÉ POUR $\Lambda = 0$.

Proposons-nous de rechercher ce que devient la fonction $\mathcal{F}(y,\tau)$ lorsque la variable $\tau = \frac{t}{\lambda}$ augmente indéfiniment, l'autre variable y ayant une valeur quelconque.

Commençons par étudier à ce point de vue la fonction :

$$\mathcal{F}_1(y,\tau) = \int_0^{\infty} e^{-\theta\alpha^2}\alpha\frac{\operatorname{sh}\alpha\tau\sqrt{\alpha^2-1}}{\sqrt{\alpha^2-1}}\cos\alpha y d\alpha.$$

Soit η un nombre positif fixe inférieur à l'unité; nous écrirons, en partageant l'intégrale en trois autres :

$$\mathcal{F}_1(y,\tau) = \int_0^{\eta} + \int_{\eta}^{1} + \int_{1}^{\infty}.$$

Quand α est inférieur à 1, écrivons la fonction sous le signe $\int$: $e^{-\theta\alpha^2}\alpha\frac{\sin\alpha\tau\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{1-\alpha^2}}\cos\alpha y$; nous aurons :

$$\left|\int_\eta^1\right| < e^{-\theta\eta^2}\int_\eta^1\frac{\alpha d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} = e^{-\theta\eta^2}\sqrt{1-\eta^2},$$

quantité qui tend vers zéro quand τ augmente indéfiniment.

Lorsque α est supérieur à 1, on a :

$$\left| e^{-\tau\alpha^2}\operatorname{sh}\alpha\tau\sqrt{\alpha^2-1}\cos\alpha y\right| < \frac{1}{2}e^{-\frac{\tau}{2}}$$

et, par suite :

$$\left|\int_1^\infty\right| < \frac{1}{2}e^{-\frac{\tau}{2}}\int_1^\infty e^{-\frac{z}{4\alpha^2\lambda^2}\alpha^2}\frac{\alpha d\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}},$$

quantité qui tend également vers zéro, puisque z est positif. Il reste donc à étudier l'intégrale :

$$\int_0^\eta e^{-\theta\alpha^2}\alpha\frac{\sin\alpha\tau\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{1-\alpha^2}}\cos\alpha y d\alpha, \tag{54}$$

qui est analogue à l'intégrale (39). Un calcul tout pareil à celui qui a été fait à propos de cette intégrale nous donnerait comme expression de l'intégrale (54) et avec les mêmes notations :

$$\int_0^\eta e^{-\theta\alpha^2}\alpha\sin\alpha\tau\cos\alpha y d\alpha + \int_0^\eta e^{-\theta\alpha^2}\varepsilon\alpha^2\tau\cos\alpha y d\alpha.$$

La deuxième de ces intégrales est au plus de l'ordre de $\frac{\tau}{\theta^2\sqrt{\theta}}$; en se rappelant que $|\varepsilon| < \alpha^2\varpi(\alpha)$, on a, en effet :

$$\left|\int_0^\eta e^{-\theta\alpha^2}\varepsilon\alpha^2\tau\cos\alpha y d\alpha\right| < \frac{\tau}{\theta}\int_0^\eta e^{-\theta\alpha^2}\varpi(\alpha)\theta\alpha^4 d\alpha < \frac{\tau}{\theta^2\sqrt{\theta}}\varpi(\eta)\int_0^\infty e^{-u^2}u^4 du.$$

La première peut être remplacée par :

$$\int_0^\infty e^{-\theta\alpha^2}\alpha \sin\alpha\tau\cos\alpha y d\alpha, \tag{55}$$

car on a :

$$\left|\int_\eta^\infty e^{-\theta\alpha^2}\alpha\sin\alpha\tau\cos\alpha y d\alpha\right| < \int_\eta^\infty e^{-\theta\alpha^2}\alpha d\alpha = \frac{e^{-\theta\eta^2}}{2\theta}.$$

Or, l'intégrale (55) peut se décomposer en deux autres :

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\theta\alpha^2}\alpha\sin\alpha(\tau+y)d\alpha + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\theta\alpha^2}\alpha\sin\alpha(\tau-y)d\alpha,$$

qui deviennent, en intégrant par parties :

$$\frac{\tau+y}{4\theta}\int_0^\infty e^{-\theta\alpha^2}\cos\alpha(\tau+y)d\alpha + \frac{\tau-y}{4\theta}\int_0^\infty e^{-\theta\alpha^2}\cos\alpha(\tau-y)d\alpha.$$

Ces deux dernières intégrales ont des valeurs bien connues, de sorte qu'en définitive nous pouvons écrire, pour $\tau = \frac{t}{\lambda}$ assez grand :

$$\mathcal{F}_1(y,\tau) = \frac{\sqrt{\pi}}{4\theta}\left[\frac{\tau+y}{2\sqrt{\theta}}e^{-\frac{(\tau+y)^2}{4\theta}} + \frac{\tau-y}{2\sqrt{\theta}}e^{-\frac{(\tau-y)^2}{4\theta}}\right] + \nu, \tag{56}$$

ν étant une fonction qui, d'après la démonstration précédente, est au plus de l'ordre de $\frac{\tau}{\theta^2\sqrt{\theta}}$.

Passons à l'étude de la fonction :

$$\mathcal{F}_2(y,\tau) = \int_0^\infty e^{-\theta\alpha^2}\operatorname{ch}\alpha\tau\sqrt{\alpha^2-1}\cos\alpha y d\alpha,$$

que nous écrirons également :

$$\mathcal{F}_2(y,\tau)=\int_0^\eta+\int_\eta^1+\int_1^\infty.$$

On a tout d'abord :

$$\left|\int_\eta^1\right|<e^{-\theta\eta^2},\qquad \left|\int_1^\infty\right|<\tfrac{1}{2}e^{-\frac{\tau}{2}}\int_1^\infty e^{-\frac{z}{4a^2\lambda^2}\alpha^2}d\alpha,$$

et ces deux quantités tendent vers zéro.

En posant encore $\sqrt{1-\alpha^2}=1-\varepsilon_1$, on a dans l'intervalle $(0,\eta)$:

$$\cos\alpha\tau\sqrt{1-\alpha^2}=\cos\alpha\tau+\varepsilon_1\alpha\tau\sin\alpha\tau\,(1-\theta_2\varepsilon_1)\qquad(0<\theta_2<1),$$

d'où :

$$(57)\qquad\begin{cases}\displaystyle\int_0^\eta=\int_0^\eta e^{-\theta\alpha^2}\cos\alpha\tau\cos\alpha y d\alpha\\ \qquad\displaystyle+\int_0^\eta e^{-\theta\alpha^2}\varepsilon_1\alpha\tau\sin\alpha\tau(1-\theta_2\varepsilon_1)\cos\alpha y d\alpha.\end{cases}$$

Le module de la dernière intégrale est plus petit que l'intégrale :

$$\int_0^\eta e^{-\theta\alpha^2}\varepsilon_1\alpha\tau d\alpha=\frac{\tau}{\theta}\int_0^\eta e^{-\theta\alpha^2}\varepsilon_1\theta\alpha d\alpha;$$

or, en intégrant par parties, on a :

$$\int_0^\eta e^{-\theta\alpha^2}\varepsilon_1\theta\alpha d\alpha=-\tfrac{1}{2}\varepsilon_1(\eta)e^{-\theta\eta^2}+\tfrac{1}{2}\int_0^\eta e^{-6\alpha^2}d\varepsilon_1,$$

et, comme $d\varepsilon_1=\dfrac{\alpha d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}$, on a encore :

$$\int_0^\eta e^{-\theta\alpha^2}d\varepsilon_1<\frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}}\int_0^\eta e^{-\theta\alpha^2}\alpha d\alpha=\frac{1-e^{-\theta\eta^2}}{2\theta\sqrt{1-\eta^2}}.$$

IMPRIMERIE NATIONALE.

Ainsi, la dernière intégrale de l'égalité (57) est au plus de l'ordre de $\frac{\tau}{\theta^2}$.

Comme on a, d'autre part :

$$\left| \int_\eta^\infty e^{-\theta\alpha^2} \cos\alpha\tau \cos\alpha y d\alpha \right| < \frac{1}{\eta} \int_\eta^p e^{-\theta\alpha^2} \alpha d\alpha = \frac{e^{-\theta\eta^2} - e^{-\theta p^2}}{2\eta\theta} \quad (p > \eta),$$

il résulte de l'égalité (57) et de ce qui précède que la fonction $\mathcal{F}_2$ diffère d'aussi peu qu'on veut, pour τ très grand, de l'intégrale :

$$\int_0^\infty e^{-\theta\alpha^2} \cos\alpha\tau \cos\alpha y d\alpha = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\theta\alpha^2} \cos\alpha(\tau + y) d\alpha + \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\theta\alpha^2} \cos\alpha(\tau - y) d\alpha.$$

Ces dernières intégrales ont des valeurs connues, de sorte qu'il vient :

$$\mathcal{F}_2(y, \tau) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\theta}} \left[e^{-\frac{(\tau+y)^2}{4\theta}} + e^{-\frac{(\tau-y)^2}{4\theta}} \right] + \rho, \tag{58}$$

ρ étant une fonction au plus de l'ordre de $\frac{\tau}{\theta^2}$.

Les formules (56) et (58) nous font alors connaître la valeur asymptotique de $\mathcal{F}(y, \tau)$; si l'on tient compte de ce que :

$$\mathcal{F}(y, \tau) = \frac{1}{\lambda} [\mathcal{F}_1(y, \tau) + \mathcal{F}_2(y, \tau)]$$

et qu'on revienne aux variables primitives, on aura :

$$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{F}\left(\frac{x-\xi}{a\lambda}, \frac{t}{\lambda}\right) \sim{}& \frac{a\sqrt{\pi}}{\sqrt{z + 4a^2\lambda t}} \left[\frac{1}{2} + \frac{a\lambda}{z + 4a^2\lambda t} (x - \xi + at) \right] e^{-\frac{(x-\xi+at)^2}{z+4a^2\lambda t}} \\ &+ \frac{a\sqrt{\pi}}{\sqrt{z + 4a^2\lambda t}} \left[\frac{1}{2} - \frac{a\lambda}{z + 4a^2\lambda t} (x - \xi - at \right] e^{-\frac{(x-\xi-at)^2}{z+4a^2\lambda t}}, \end{aligned} \right. \tag{59}$$

égalité asymptotique où les termes négligés sont au plus de l'ordre de :

$$\frac{\tau}{\lambda\theta^2} = \frac{16a^4\lambda^2 t}{(z+4a^2\lambda t)^2}.$$

Tout d'abord, si nous attribuons à λ une valeur fixe et que nous fassions croître t indéfiniment, le second membre de l'égalité (59) tendra vers zéro et l'on aura :

$$\lim_{t=\infty} \mathcal{F}\left(\frac{x-\xi}{a\lambda}, \frac{t}{\lambda}\right) = 0.$$

Il résulte alors de l'égalité (49) qu'on a aussi :

$$\lim_{t=\infty} \varphi(x,t) = 0.$$

On peut d'ailleurs déduire de l'égalité (59) l'expression asymptotique de $\mathcal{F}$ pour t très grand dans le cas particulier où $|x| = at$; il vient, en effet, dans ce cas :

$$\mathcal{F}\left(\frac{x-\xi}{a\lambda}, \frac{t}{\lambda}\right) \sim \frac{a\sqrt{\pi}}{2\sqrt{z+4a^2\lambda t}},$$

les termes négligés étant au plus de l'ordre de $\frac{1}{t}$. Si nous posons alors, pour simplifier :

$$\mathrm{B} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, d\xi, \tag{60}$$

et que nous tenions compte de ce que $2a^2\lambda = \Lambda$, l'égalité (49) nous donnera :

$$\varphi(x,t) \sim \frac{\mathrm{B}}{2\sqrt{\pi(z+2\Lambda t)}} \qquad (|x| = at).$$

Cette formule nous montre qu'aux points $|x| = at$, le déplacement tend vers zéro à peu près comme $\frac{1}{\sqrt{t}}$.

Supposons maintenant que, t ayant une valeur positive quelconque, le coefficient de viscosité Λ soit très petit; les égalités (49) et (59) nous donnent :

$$\varphi(x,t) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi(z+2\Lambda t)}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 + \frac{\Lambda}{a}\frac{x-\xi+at}{z+2\Lambda t}\right] e^{-\frac{(x-\xi+at)^2}{z+2\Lambda t}} f(\xi)\,d\xi$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi(z+2\Lambda t)}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 - \frac{\Lambda}{a}\frac{x-\xi-at}{z+2\Lambda t}\right] e^{-\frac{(x-\xi-at)^2}{z+2\Lambda t}} f(\xi)\,d\xi,$$

ou, en changeant de variable d'intégration :

$$(61)\quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(x,t,\Lambda) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Bigg[& f\left(x+at+\alpha\sqrt{z+2\Lambda t}\right)\left(1 - \frac{\Lambda\alpha}{a\sqrt{z+2\Lambda t}}\right) \\ & + f\left(x-at+\alpha\sqrt{z+2\Lambda t}\right)\left(1 + \frac{\Lambda\alpha}{a\sqrt{z+2\Lambda t}}\right)\Bigg] e^{-\alpha^2} d\alpha. \end{aligned} \right.$$

C'est l'expression asymptotique de l'intégrale, où les termes négligés sont au plus de l'ordre de Λ^2; les termes où Λ est en facteur sont même exacts à une quantité près de l'ordre de Λ^3, car ils proviennent de la fonction $\mathcal{F}_1(\gamma,\tau)$, dont l'expression asymptotique (56) est exacte à une quantité près de l'ordre de $\frac{\tau}{\theta^2\sqrt{\theta}}$.

Il nous est dès lors facile d'établir la continuité de l'intégrale pour $\Lambda = 0$; en effet, quand Λ est nul, on sait que l'équation :

$$a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0$$

$$\left[\text{pour } t = 0 : \quad \varphi = f_1(x,z), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0\right]$$

admet comme intégrale l'expression :

$$\varphi(x, t, 0) = \tfrac{1}{2}[f_1(x+at, z) + f_1(x-at, z)],$$

qui peut s'écrire encore, d'après la première des formules (19) :

$$(62)\quad \varphi(x, t, 0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [f(x+at+\alpha\sqrt{z}) + f(x-at+\alpha\sqrt{z})]\, e^{-\alpha^2} d\alpha.$$

Or, la comparaison des égalités (61) et (62) montre qu'on a :

$$\lim_{\Lambda=0} \varphi(x, t, \Lambda) = \varphi(x, t, 0),$$

ce qui démontre la continuité.

En ajoutant les seconds membres des égalités (61) et (47), on obtiendrait l'expression asymptotique de l'intégrale générale pour Λ très petit, les termes négligés étant au plus de l'ordre de Λ^2.

§ 3.

APPLICATION AUX QUASI-ONDES.

Quand Λ est très petit, l'égalité (61) nous enseigne qu'une quasi-onde initiale $f_1(x, z)$ se scinde en deux autres, qui se propagent en sens inverse avec la vitesse a, autant qu'on peut encore parler de vitesse de propagation. Chacune de ces quasi-ondes est soi-même la superposition de deux quasi-ondes, l'une comparable comme amplitude à celle de la quasi-onde initiale, l'autre très petite ayant une amplitude de l'ordre de Λ, et toutes deux s'étalant progressivement sur l'axe des x. Prenons tout de suite un cas par-

ticulier très simple, qui nous permettra de comparer facilement ce qui se passe pour Λ très petit à ce qui a lieu pour $\Lambda = 0$.

Supposons donc que la fonction $f(x)$ soit nulle en dehors d'une région infiniment petite entourant l'origine et que z soit très petit; si nous posons encore la formule (60), la première des égalités (19) nous donnera comme expression du déplacement initial :

$$f_1(x, z) = \frac{B}{\sqrt{\pi z}} e^{-\frac{x^2}{z}},$$

et l'égalité (61), comme expression asymptotique du déplacement actuel :

$$(63) \quad \left\{ \varphi(x, t, \Lambda) \sim \frac{B}{2\sqrt{\pi(z+2\Lambda t)}} \left\{ \left[1 + \Lambda \frac{x+at}{a(z+2\Lambda t)} \right] e^{-\frac{(x+at)^2}{z+2\Lambda t}} + \left[1 - \Lambda \frac{x-at}{a(z+2\Lambda t)} \right] e^{-\frac{(x-at)^2}{z+2\Lambda t}} \right\} \right.$$

Nous aurions de même, d'après l'égalité (62) :

$$(64) \qquad \varphi(x, t, 0) = \frac{B}{2\sqrt{\pi z}} \left[e^{-\frac{(x+at)^2}{z}} + e^{-\frac{(x-at)^2}{z}} \right].$$

Tout d'abord, l'égalité (64) exprime ce résultat bien connu que la quasi-onde initiale représentée en CAD (fig. 3) s'est scindée en deux autres ondes égales entre elles, qui se propagent en sens inverse et sans altération avec la vitesse a et qu'on déduit de la première en divisant ses ordonnées par 2. Nous avons représenté en C'A'D' l'onde qui se propage dans le sens des x positifs, à un instant suffisamment grand pour que les deux ondes soient séparées.

Au contraire, l'égalité (63) exprime que la quasi-onde initiale représentée en CAD (fig. 4) s'est scindée en deux autres ondes

égales entre elles, qui se propagent encore en sens inverse mais avec altération. Cette altération consiste en une diminution progressive de l'amplitude et en un étalement graduel sur l'axe des x, par suite de la présence de la quantité $z+2\Lambda t$ dans la formule.

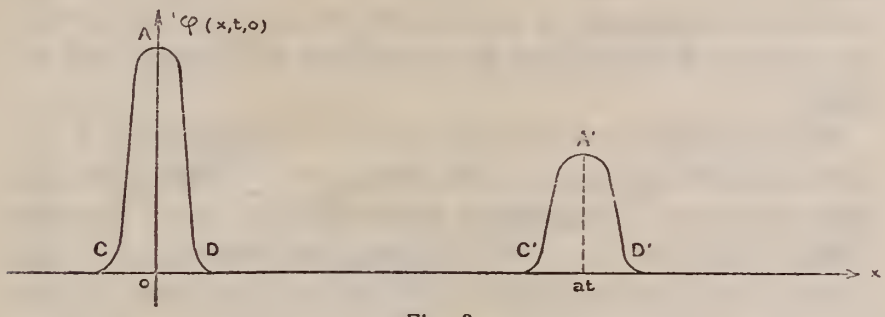


Fig. 3.

Chaque quasi-onde, telle que celle représentée en C'A'D' qui correspond au second terme de l'égalité (63), est dissymétrique par rapport à l'ordonnée menée au point $|x| = at$. Cela tient à la présence des petits termes où Λ est en facteur et qui proviennent de

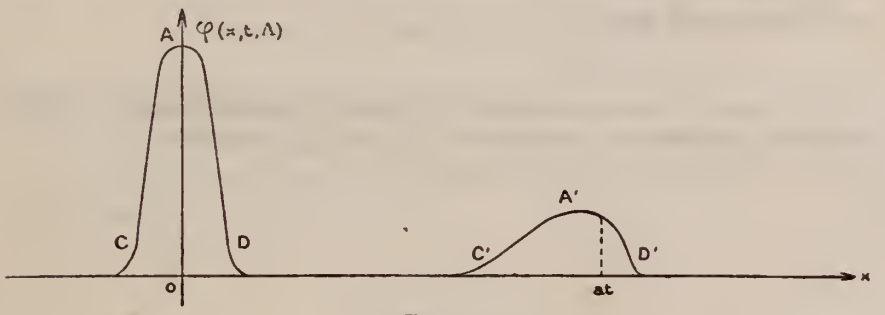


Fig. 4.

la fonction $\mathcal{F}_1$; chacun d'eux renforce la quasi-onde correspondante pour $|x| < at$ et l'affaiblit pour $|x| > at$, de sorte que le sommet de chaque quasi-onde se trouve reporté légèrement en arrière du point $|x| = at$ par rapport au sens de sa propagation.

Tant que t reste petit, $\varphi(x, t, \Lambda)$ diffère peu de $\varphi(x, t, o)$, et, comme la quasi-onde initiale CAD est en réalité assez bien limitée de part et d'autre par suite de la petitesse de z, il s'ensuit que le phénomène de propagation est assez net à son début. Mais, dès que $2\Lambda t$ vient à l'emporter notablement sur z, l'épaisseur des deux quasi-ondes augmente et devient de plus en plus mal définie, de sorte que le phénomène de propagation finit par devenir très vague.

Si l'on compare ces résultats relatifs aux quasi-ondes à ceux correspondants que nous avons obtenus au chapitre précédent, nous voyons que la propagation d'une quasi-onde due à un déplacement initial sans vitesse est beaucoup plus nette que la propagation d'une quasi-onde due à une vitesse initiale sans déplacement. Dans le cas général où, à l'instant initial, il y a à la fois déplacement et vitesse, c'est donc surtout la perturbation due à la vitesse initiale qui donne du flou.

Enfin et ainsi que l'a remarqué M. Duhem[1], on passe immédiatement du cas du mouvement par ondes planes, traité dans ce mémoire, au cas du mouvement par ondes sphériques : il suffit de remplacer la variable x par la distance au centre r et la fonction inconnue φ par $r\varphi$.

[1] P. Duhem, «Remarque élémentaire sur le problème des ondes sphériques». (*Comptes rendus*, t. CLVI, p. 1727, 9 juin 1913.)

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

INTRODUCTION 1

CHAPITRE PREMIER.

GÉNÉRALITÉS.

§ 1. Expression de l'intégrale déduite de la formule de Fourier 8

2. Propriétés analytiques de l'intégrale; analogie de celle-ci avec l'intégrale de l'équation de la chaleur et de l'équation des cordes vibrantes 14

3. Étude d'un cas particulier 22

CHAPITRE II.

CAS OÙ LE DÉPLACEMENT INITIAL EST NUL.

§ 1. Développement en série de la fonction $\mathcal{G}(\gamma, \tau)$ 27

2. Expression de l'intégrale 36

3. Expression asymptotique de l'intégrale; sa continuité pour $A = 0$ 38

4. Application aux quasi-ondes 46

CHAPITRE III.

CAS OÙ LA VITESSE INITIALE EST NULLE.

§ 1. Expression de l'intégrale 51

2. Expressions asymptotiques de l'intégrale; sa continuité pour $A = 0$ 54

3. Application aux quasi-ondes 61

IMPRIMERIE NATIONALE.

Date Due

187609

Engin.

3 1430 02794372 1

a31430027943721b

UNIV. OF MD. COLLEGE PARK